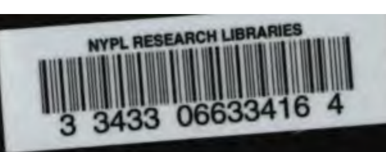

Google


NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06633416 4



(Grossmann)

3.0E

DIE MATHEMATIK

im

Dienste der Nationalökonomie

unter Rücksichtnahme auf die

praktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik

mit einigen, durch selbständige wissenschaftliche Errungenschaften auf dem Gebiete der reinen Mathematik begründeten, neuen Fundamenten der politischen Arithmetik

für Versicherungs- und Bank-Institute, sowie auch Lehrkräfte höherer Bildungsanstalten besonders geeignet.

Supplementband zum gleichnamigen Werke.

Verfasst

von

Dr. LUDWIG GROSSMANN

Inhaber des Ersten Wiener mathematischen Bureau und Herausgeber der Fachschrift „Controle".

Achte Lieferung.

WIEN 1896.

Im Selbstverlage des Verfassers,

III., Sofienbrückengasse Nr. 14.

Druck von Josef Bayer & Comp., Wien, I., Wollzeile 25.

VORREDE.

Im vorliegenden Theile meines Werkes habe ich es unternommen, die Gesetze der Wahrscheinlichkeit in ein präcises wissenschaftlich begründetes System zu bringen. Die Frage der Ausgleichung der Beobachtungsresultate auf Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung bildet bekanntlich eines jener wichtigen Probleme, welches die Fachgelehrten der letzten Jahrhunderte ununterbrochen beschäftigt, da in demselben der Schlüssel zur Lösung einer Reihe von Fragen sich birgt, welche alle Gebiete der exacten Wissenschaften betreffen. Nicht nur die Beobachtungswissenschaften (Physik, Astronomie, Chemie, Geodäsie etc.), sondern auch alle technischen Wissenschaften sind auf diese mathematische Disciplin angewiesen, da man sich nur auf Grund deren Principien von der Genauigkeit der Beobachtungen und von dem Werthe statistischer Daten Rechenschaft zu geben vermag. Seit Jacob Bernoulli und Gauss bilden die Wahrscheinlichkeits-Gesetze den Gegenstand eifriger Forschung und unser Jahrhundert hat bedeutende wissenschaftliche Ergebnisse in dieser Beziehung aufzuweisen. Dessenungeachtet war man bisher stets nur auf Näherungsmethoden angewiesen, weil das geometrisch analytische Wesen der Wahrscheinlichkeits-Gesetze nicht festgestellt werden konnte und die sonstigen wissenschaftlichen Hilfsmittel unzureichend waren, um verlässliche Resultate zu liefern. Während meiner langjährigen Forschungen, betreffend die allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, machte ich nun die wichtige Entdeckung, dass diese Kategorie von Gleichungen das ganze System der Wahrscheinlichkeitscurven umfasst, was mich bewog, das Wesen dieser Materie einer gründlichen Untersuchung zu unterziehen. Nachdem ich bereits in den früheren Theilen dieses Werkes die Grundlage zur allgemeinen Lösung dieses Problemes gelegt hatte, gelangte ich durch fortgesetzte Untersuchungen endlich zu einem befriedigenden diesbezüglichen Ergebniss und gleichzeitig zu einer präcisen Darstellung des originären Principes der Wahrscheinlichkeits-Gesetze, auf diese Art jene Umstände feststellend, welche das Wesen der Beobachtungsresultate in ihrer mathematischen Gesetzmässigkeit bedingen.

Diese Ergebnisse bilden nun die Basis meiner in diesem Buche dargestellten Methode der Ausgleichung der Mortalitätstafeln, deren Zuverlässigkeit nach jeder Richtung hin wissenschaftlich verbürgt ist und die sich daher von den bisherigen Näherungsmethoden vortheilhaft unterscheidet.

Wien, am 1. Jänner 1896.

Der Verfasser.

INHALT.

—

Versicherungstechnik.

Finanztechnik.

Druckfehler und Correcturen:

Auf Seite 13 sollen die Formen 1) und 2) richtig lauten:

$$P_x = S\left[1 + M_x\left(\frac{1}{r} - 1\right)\right] \quad \text{und} \quad p_x = S\left(\frac{1}{M_x} + \frac{1}{r} - 1\right)$$

Auf Seite 24, vierte Zeile von unten, soll es heissen anstatt: Corretationsprincipes, richtig Correlationsprincipes.

Auf Seite 32 soll die zweite Form lauten:

$$\frac{dx}{w_x} = 4\left(\frac{du}{\cos^2 u} + tg\, u \cdot \frac{dw_x}{w_x}\right)$$

Auf Seite 55 soll es in der ersten Zeile unter Form 18) ebenso wie in der bezüglichen Fussnote heissen anstatt: Nährungswerth, richtig: Näherungswerth.

Auf Seite 65 unten soll es in den beiden Differentialgleichungen c) und d) anstatt $f'(x)$ richtig $f(x)$ heissen.

Auf Seite 66 soll zwischen 38) und 39) in der zweiten der beiden nebeneinander stehenden Formen ebenso wie in der ersteren im Zähler des Bruches 2 anstatt 1 stehen.

Zur Lösung der Silberfrage.

Die internationale Regelung der Silberfrage beschäftigt seit langer Zeit die Finanzpolitik aller jener Staaten, welche ein Interesse daran nehmen, die erschütterte Position dieses Edelmetalles als Verkehrsvaluta wieder zu befestigen und das schwankende Werthverhältniss zwischen diesem und der Goldvaluta wieder in's Gleichgewicht zu bringen. Seit nahezu zwei Jahrzehnten wurden wiederholt internationale Münzconferenzen abgehalten, bei welchen die verschiedensten Massregeln vorgeschlagen und in Erwägung gezogen wurden, um der stetigen Verschiebung des Werthverhältnisses zwischen Gold und Silber entgegenzuwirken und dem Silber seinen früheren Einfluss als Umlaufsmittel im internationalen Geldverkehr wieder zu sichern. Alles was jedoch diesbezüglich berathen und beschlossen wurde, scheint nur geeignet gewesen zu sein, den Nachweis zu führen, dass jedes Bemühen in dieser Richtung insolange ein vergebliches bleiben muss, als sich die Untersuchung blos auf die äusseren Merkmale und Folgewirkungen dieses monetären Uebelstandes beschränkt und nicht auch die inneren Ursachen vom Gesichtspunkte der allgemeinen Münzpolitik gründlich in Erwägung zieht. Wir haben bereits gelegentlich der Berathungen der zu diesem Zwecke im Jahre 1886 in London eingesetzten Gold- und Silbercommission in einer damals in diesem Werke unter dem Titel „Beiträge zur Lösung der Währungsfrage" erschienenen Abhandlung auf jene Anomalie aufmerksam gemacht, welche darin liegt, zwei verschiedene Werthmasse, Gold und Silber, von denen jedes für sich infolge mannigfaltiger Einflüsse einer wesentlichen Veränderlichkeit ausgesetzt ist, in ein fixes Werthverhältniss zu zwängen. Die Supposition eines derartigen Werthverhältnisses konnte sich nur insolange behaupten, als nicht durch das eine oder andere Edelmetall eine Sättigung des Weltmarktes sich einstellte, d. h. solange noch jener neben dem substantiellen Werthe mit in Betracht kommende Seltenheitswerth den Werthbegriff trübte. Lassen wir die diesbezüglichen, diesen Gegenstand behandelnden Ausführungen hier nochmals im Wortlaute folgen.

„Wenn man die Wandlungen der Valutawerthe in ihren verschiedenen Stadien beobachtet hat, so muss man zur Ueberzeugung gelangt sein, dass die beiden Edelmetalle Gold und Silber neben ihrem specifisch eingebildeten Werthe noch einen anderen relativen Werth besitzen, auf den der erstere seinen thätigen Einfluss ausübt, welcher umso grösser wird, je flüchtiger oder besser gesagt veränderlicher der eingebildete Werth sich gestaltet. Diese Thatsache tritt aber umso mehr noch in den Vordergrund, wenn sich die beiden genannten Werthformen eines einzelnen Edelmetalles merklich von einander entfernen; dann entsteht zwischen dem relativen und dem durch eine etwaige grössere Production herabgeminderten specifisch eingebildeten Werthe eine Lücke, die eine Art Unsicherheit im Verkehre verursacht und auf diese Weise verwirrend, ja oft verheerend auf die Valutaverhältnisse einwirkt.

Innerhalb der Grenzen eines Staates kann freilich diese Veränderlichkeit nicht direct zur Geltung gelangen, weil hier sowohl der Werth des Geldes, als auch das Verhältniss desselben von der legislatorischen Gewalt geregelt und festgesetzt ist, daher nur eine indirecte Wirkung möglich ist, die sich durch eine positive oder negative Strömung des einen oder anderen Edelmetalles auswärts der Grenzen kundgibt; innerhalb derselben wird der substantielle Werth vollständig durch den legislatorisch zuerkannten verdrängt. Anders verhält es sich jedoch im Verkehre zweier oder mehrerer Staaten untereinander, wenn nicht Münzverträge oder Gleichheit der Münzprägung den vermittelnden Factor bilden, der die Legislative in Betreff ihrer Wirkung innerhalb der Staatsgrenzen, auch ausserhalb derselben ersetzt. Dann treten die Sonderinteressen in Betreff der Werthschätzung in nackten Formen hervor, und Angebot und Nachfrage regeln unbekümmert um die internen Geldbegriffe den Marktwerth.

Um wieviel müssen sich aber diese Contraste verschärfen, wenn noch ein zweites Edelmetall von anderer Werthbedeutung und anderer substantieller Massgabe, welches ähnlichen Processen, wie die genannten, unterworfen ist, den Geldmarkt beeinflusst; insbesondere wenn die aus der natürlichen Ungleichheit des Werthverhältnisses resultirende Veränderlichkeit, durch eine im entgegengesetzten Sinne entstandene Lücke, die zwischen dem relativen und dem durch etwaige geringere Production des betreffenden Edelmetalles erhöhten specifisch eingebildeten Werthe entsteht, noch um ein Bedeutendes erhöht wird. Neben diesem wichtigen Umstande tritt aber noch ein anderer der Erwägung noch würdigerer in Betracht; und zwar ist dies die unklare Auffassung des Werthbegriffes, insoferne der Werth des einen Edelmetalles mit dem des anderen gemessen wird. Berücksichtigen wir nun, dass jenes Werthmass einer ebensolchen Veränderlichkeit unterworfen ist wie der zu messende Werth, so ergibt sich daraus, dass wir es hier mit keinen bestimmten, sondern blos mit veränderlichen Werthverhältnissen zu thun haben, die von einer Unzahl wechselnder Factoren beeinflusst, in ihrer Beschaffenheit jeder sicheren Grundlage entbehren."

Wenn sich also die Mängel dieses veralteten monetären Principes nicht schon früher fühlbar machten, so lag die Ursache hievon in dem Umstande, dass Angebot und Nachfrage nicht in so ausgedehntem Masse wie heute ihre Wirkung ausüben konnten und daher bei Beurtheilung des substantiellen Werthes der beiden Edelmetalle, bezw. deren Werthverhältnisses nicht hinreichend zur Geltung gelangten. Der rationelle Ausgleich der Werthe vollzog sich ebenso wie im Allgemeinen bei jeder Waare erst mit den Fortschritten der Transportmittel, der Ausgestaltung der Productionsbedingungen und mit der directen Antheilnahme der weitesten Ländergebiete an der Production selbst und am Welthandel. Hinsichtlich der beiden Edelmetalle lässt sich eine derartige Entwicklung am spätesten constatiren und dürfte gerade hier der Ausgleich der Werthe bis in die zweite Hälfte des Jahrhundertes ein beschränkter und unzureichender geblieben sein.

Es ist daher nicht ausgeschlossen, dass die angenommene Relation durch lange Zeit trotz der thatsächlich schon bedeutend verschobenen Productionsverhältnisse den Anforderungen noch scheinbar zu entsprechen vermochte, obwohl der substantielle Werth der beiden Edelmetalle, resp. dessen Verhältniss längst nicht mehr innerhalb der ursprünglichen Grenzen sich bewegte.

Dieser unhaltbare Zustand musste daher ganz unvermittelt eine Reaction herbeiführen und die scheinbar feststehenden Grundlagen des stipulirten Werthverhältnisses zwischen Gold und Silber in's Wanken bringen, als eine ganz unerwartet grosse Mehrproduction an Silber sich einstellte. Zudem kam noch der Umstand, dass infolge des bedeutenden wirthschaftlichen Aufschwunges und jenes mit demselben verbundenen Anwachsens des internationalen Geldverkehres innerhalb der letzten Jahrzehnte die Goldvaluta als internationales Zahlungsmittel eine entsprechend grössere Bedeutung erlangte, während die Silbermünze wegen ihrer Schwerfälligkeit aus dem grossen Handelsverkehre immer mehr verdrängt wurde und auch der Ersatz des Silbers in der Industrie durch andere ähnliche Metalle stets grösseren Eingang fand. Zu dem grösseren Angebot gesellte sich daher noch eine unerwartete Verminderung der Nachfrage, was naturgemäss angesichts der sich geltend machenden Verschiebung des Bedarfes an Münzmetall zu Gunsten des Goldes, einen sehr ungünstigen Einfluss auf den Silberpreis auszuüben geeignet war. Dass auf diese Weise dem alten Werthverhältniss vollständig der Boden entzogen war, wenn auch dasselbe bei Ausprägung von Silbermünzen weiterhin beibehalten wurde, hat die Erfahrung gelehrt. Die Silbermünze, deren innerer Werth somit jede Bedeutung verlor, gilt heute ähnlich wie die Note blos als Pfand oder Anweisung auf einen bestimmten Geldwerth. Das Festhalten an einem fixen Werthverhältnisse der beiden Edelmetalle hat sich daher, soweit hiedurch die Declarirung des inneren Werthes der Silbermünzen in Betracht kommt, als Massregel von sehr problematischem Werthe erwiesen. Gegenwärtig kann es sich also blos darum handeln, einen Modus zu finden, um die monetäre Verwendung des Silbers neben derjenigen der principalen Goldvaluta, wenn auch blos in untergeordnetem Sinne, aufrecht zu erhalten.

Unser diesbezüglich im Jahre 1886 der königl. Gold- und Silber-Commission in London unterbreiteter und von derselben in Berathung gezogener Vorschlag, welcher dahin ging, dass zwischen sämmtlichen Staaten Europas, den Vereinigten Staaten Amerikas und Britisch-Indien ein Vertrag geschlossen werde, demzufolge eine auf vereinbarter Grundlage zu prägende Silbermünze mit gesetzlichem Vollwerthe die Basis einer neben den bestehenden Währungen der betheiligten Staaten einzuführenden internationalen Silberwährung zu bilden hätte, wurde damals als diesem Zwecke besonders entsprechend anerkannt, doch erst in letzer Zeit auch von dem Bimetalisten als eventuelle Massnahme in's Programm aufgenommen. Wohl würden diese der reinen Doppelwährung auf internationaler Grundlage den Vorzug geben, doch stösst die Durchführung einer monetären Transaction in diesem Sinne auf fast unüberwindliche Schwierigkeiten. Obwohl also schon die Lösung im Sinne unseres

Vorschlages zu befriedigen geeignet wäre, weil sie die Hebung des Silberpreises im Auge hat und diesem Zwecke thatsächlich zu entsprechen vermag, so hätte sie noch den Vortheil, ein Compromiss zu ermöglichen, da eine internationale Silberwährung im Sinne unseres Vorschlages die bestehenden Währungen im Wesen nicht tangirt.

Nun liegt aber die Schwierigkeit in der Feststellung der Grundlage der auszuprägenden Silbermünze, welche für den internationalen Verkehr bestimmt, einer möglichst stetigen Vollwerthigkeit entsprechen soll. Dies könnte aber nur erreicht werden, wenn zu diesem besonderen Zwecke eine Standardmünze geschaffen würde, deren Werth wohl kein fixer, doch dem inneren Silbergehalte gemäss stets dem jeweiligen Marktpreise dieses Metalles angemessener wäre.

Wir stellen uns diese für eine zu schaffende internationale Silberwährung geeignete Münze auf folgendem monetären Principe beruhend vor:

Sämmtliche an einer internationalen Silberwährung interessirte Staaten mögen unbeschadet ihrer bisherigen Währungsgrundlagen zur Prägung einer gleichen Münze schreiten, welche eine Gewichtsmenge von zwei Unzen Feinsilber enthalten würde. Dieses Zweiunzenstück könnte als Handelsmünze, für Zollzahlungen und im Colonialen Geldverkehre allgemeine Verwendung finden, sonst aber blos unter folgenden Bedingungen: die Münze soll an öffentlichen Zahlstellen, nur in Verbindung mit einer gleich grossen Summe in Gold als Zahlung angenommen und ausgegeben werden. Hingegen wäre dieselbe im gewöhnlichen Geldverkehre als Zahlungsmittel möglichst zu beschränken. Der Werth dieser Münze ist veränderlich; u. zw. ihrem Feingehalte an Silber gemäss derjenige, welchen zwei Standardunzen Silber nach dem Londoner Marktcurs unter Einbeziehung der Prägungskosten zur Zeit besitzen. Der jeweilige Werth derselben wäre in allen Staaten auf die beziehungsweise gesetzliche Währung umgerechnet, zu publiciren.

Für diese Münze wird die freie Silberprägung gewährt, jedoch blos bis zur Erreichung einer für jeden betheiligten Staat besonders zu fixirenden Maximalgrenze, welche alle drei Jahre nach Bedarf zu regeln wäre, wie auch gleichzeitig ein gegenseitiger Ausgleich der etwaigen Ueberschüsse an fremden Standardmünzen bankmässig eingeleitet werden könnte, um ein übermässiges Einströmen derselben in einzelne Staatsgebiete hintanzuhalten.

Durch die Bestimmung, der zufolge die Zahlung in Standardmünzen von der gleichen Summe in Gold abhängig gemacht wird, wäre dem Einströmen allzugrosser Silbermengen überhaupt ein Riegel vorgeschoben, wobei auch der Umstand in Betracht käme, dass bei steigendem Silberpreise auch eine Verschiebung des Mengenverhältnisses zwischen Silber und Gold zu Gunsten des letzteren sich vollziehen würde.

Auf diese Weise wäre es möglich, bei Erfüllung des Zweckes, von der neuerlichen Fixirung einer Relation zwischen Gold und Silber, welche ohnehin in dieser Beziehung nur von platonischer Wirkung sein könnte, gänzlich abzusehen, und eine solche blos für den inneren Geldverkehr bei Curantmünzen auf der alten Grundlage aufrechtzuerhalten.

Lebensversicherung. — Der Storno und dessen Einfluss auf die Zuschlagsprämie bei der Versicherung mit steigendem Gewinnantheil.

Die bisherigen Abhandlungen über das Thema des steigenden Gewinnantheiles bei Lebensversicherungen haben das Wesen dieser Frage hinsichtlich der Vererbung der Gewinnantheile soweit erschöpft, als dies unter Berücksichtigung der Sterblichkeit überhaupt möglich war. Dagegen wurde die aus dem Storno sich ergebende Vererbung der Gewinnantheile wohl allgemein in Betracht gezogen, doch konnte aus Gründen versicherungstechnischer Art auf deren Einfluss in dieser Beziehung vom mathematischen Gesichtspunkte keine Rücksicht genommen werden. Die zur Ermittlung der Zuschlagsprämie aufgestellten Formen beschränkten sich daher, soweit dies die Art der directen Vererbung betraf, blos auf die Ergebnisse jener aus der Sterblichkeit resultirenden Rechnungsgrundlagen, während bei der Form der indirecten Vererbung auch die Sterblichkeit in der Rechnung unberücksicht blieb und nur eine aus der Zuschlagsprämie allein zu bestreitende steigende Rente in der Höhe des Gewinnantheiles das Wesen der diesbezüglichen Rechnung bildete, indem jene durch Vererbung sich ergebenden Ueberschüsse in diesem Falle zur reichlicheren Dotirung dieser Rente herangezogen wurden.

Nun äussert sich aber der Einfluss des Storno auf die Vererbung der Gewinnantheile erfahrungsgemäss in gleichem, ja noch höherem Maasse, als derjenige der Sterblichkeit und ist daher eine Berücksichtigung desselben bei directer Vererbung umso dringender geboten, als bei dieser Form die Höhe der Zuschlagsprämie davon abhängt, in welchem Maasse die Erfordernisse zur Bestreitung des Gewinnantheiles durch Vererbung entlastet werden. Die Zuschlagsprämie, welche ausserhalb des Rahmens der eigentlichen, die Grundlage der reducirten Polizze resp. des Polizzenbaarwerthes bildenden Prämienleistung steht, wird im Stornirungsfalle stets dem Gewinnantheilfond zufallen und auf diese Weise den übrigen Versicherten zu Gute kommen. Sie repräsentirt die Quelle, aus welcher das Erforderniss zur Bestreitung der steigenden Gewinnantheile fliesst und welche sofort für die einzelne Versicherung versiegt, sobald die Prämienzahlung für diese aufhört, mag dies aus welchem Anlasse immer erfolgen. Ob daher die Prämienzahlung aufhört in Folge der Fälligkeit der Versicherungssumme bei eingetretenem Todesfalle oder in Folge Auflösung oder Aenderung des Versicherungsvertrages; in allen Fällen werden die geleisteten Zuschlagsprämien, soweit dieselben nicht schon zur Deckung fällig gewordener Gewinnantheilquoten herangezogen wurden, auf die activen Versicherungen übergehen. Aus diesem Grunde bleibt es hier für die Rechnungsgrundlage irrelevant, ob die Einstellung der Prämienzahlung eines Versicherten

und die hiedurch entfallende Gewinnantheilleistung der Versicherungsbank an denselben ihre Ursache im Fälligwerden der Versicherung oder in deren Stornirung findet. Dieser Form des Gewinnantheiles mit directer Vererbung liegt daher das Princip der Tontine zugrunde, nur mit dem Unterschiede, dass hier der Ansammlung der Fonds nach kurzer Zeit auch deren Ausschüttung folgt und zwar in der Weise, dass der angesammelte Fond die zur Ausschüttung gelangende Quote dermassen übersteigt, dass für die eventuellen ferneren Gewinnantheil-Ausschüttungen stets eine angemessene Reserve verbleibt. Soll daher der Anforderung der thatsächlichen Vererbungs-Verhältnisse Genüge geleistet werden, ist es nothwendig, neben der Sterblichkeit auch den Storno in gleichem Maasse zu berücksichtigen. Es frägt sich nur in welcher Weise dies angesichts des vollständigen Mangels diesbezüglicher versicherungstechnisch verwendbarer, statistischer Tafeln bewerkstelligt werden soll. Als hinreichende rechnerische Grundlage vermag nur eine nach dem Muster der Mortalitätstafel eingerichtete statistische Tabelle der jährlichen Storni für die einzelnen Altersclassen zu genügen, welche es gestattet, unter Hinzuziehung der Sterbetafel den totalen Abgang der activen Versicherten in Rechnung zu bringen.

Nachdem jedoch eine derartige Tabelle nicht leicht herzustellen ist, werden wir uns damit begnügen müssen, die aus praktischen Erfahrungen gesammelten Daten zur Schaffung einer brauchbaren diesbezüglichen Grundlage, welche annähernd den wirklichen Ergebnissen zu entsprechen vermag, zu verwerthen. Nach den bisherigen Beobachtungen beträgt der Storno bei gemischten Versicherungen mit steigendem Gewinnantheil durchschnittlich 33—40 Percent der jährlichen Neuproduction, wobei insbesondere der Umstand von Wichtigkeit ist, dass mit der Höhe der Altersclasse der Storno abnimmt. Diese Erscheinung lässt sich dadurch erklären, dass den höheren Altersclassen eine relativ grössere Zahl von Versicherungen älteren Bestandes entspricht, welche naturgemäss eine grössere Stabilität aufweisen. Dieser Umstand wird aber durch den Modus des steigenden Gewinnantheiles und jene mit demselben verbundene successive Reduction der Prämie noch gefördert. Wird ferner erwogen, dass jüngere Personen der billigeren Prämie wegen für die Versicherung leichter zugänglich sind, wie auch ihres besseren Risikos wegen, eher der Auswahl entsprechen, so lässt sich annehmen, dass die niederen Altersclassen zum Versicherungsstocke auch in höherem Maasse beitragen, was umso erklärlicher ist, als dieselben naturgemäss einen bedeutend grösseren Bestandtheil des Menschenmateriales bilden. Er wird sich daher im Rahmen des Versicherungsstockes ein annähernd gleiches Verhältniss der Versicherten nach ihrem Alter wie in der Sterbetafel selbst herausbilden. In Folge dieses Umstandes dürfte auch die jeweilige Gesammtsumme der Lebenden nach der Sterbetafel dem wirklichen Altersverhältnisse der Versicherten stets am nächsten kommen, so dass dieselbe als Grundlage der diesbezüglichen Untersuchungen dienen kann.

Aber auch der Bedingung einer angemessenen Vertheilung des Storno wird hier entsprochen werden können, falls eine gleichmässige percentuelle Inan-

spruchnahme sämmtlicher jeweilig in Betracht kommenden Altersclassen supponirt wird, da auf diese Weise die geringer vertretenen höheren Altersclassen auch mässiger durch den Storno getroffen werden. Solchermassen dürfte ein den praktischen Ergebnissen entsprechendes Altersverhältniss im Rahmen des supponirten Versicherungsstockes erreicht werden, wie auch dafür gesorgt sein, dass der rechnungsmässige Storno die einzelnen Altersclassen im angemessenen Verhältnisse ihrer wirklichen Frequenz treffe.

Dies vorausgesetzt mag daher die Annahme gelten, dass die Summe der Lebenden respective deren discontirten Zahlen der Neuproduction in einem Jahre, die Summe der Summen derselben hingegen der Gesammtproduction während der ganzen Versicherungsdauer entspreche.

Hiedurch wäre für unsere Untersuchungen eine versicherungstechnische Basis geschaffen, auf Grund derer wir zu weiteren Conclusionen gelangen.

Ueberall dort, wo die Summen der discontirten Zahlen oder die Summen der Summen derselben sich in den Rahmen der jeweiligen Versicherungsperiode einfügen lassen und in obigem Sinne als Jahres- oder Gesammtproduction aufgefasst werden können, wird auch der Stornoprocentsatz in Function gelangen. Derselbe muss naturgemäss ebenso wie für die jährliche Neuproduction auch für die Gesammtproduction innerhalb jener Perioden gelten, aus deren Durchschnitte er ermittelt wurde, d. h. das durchschnittliche percentuelle Verhältniss zwischen Brutto- und Netto-Production in einem Jahre ist das gleiche wie während der ganzen in Betracht gezogenen Versicherungsperiode.

In diesem Sinne werden die bezüglichen Formen, welche den percentuellen Prämienzuschlag k für den steigenden Gewinnantheil mit directer Vererbung durch Todesfall darstellen, auch eine rechnungsmässige Einflussnahme durch den Abgang in Folge Storno zulassen, indem alle jene Factoren, welche im Rahmen der jeweiligen Versicherungsperiode als Jahres- oder Gesammtproduction im genannten Sinne sich auffassen lassen, als dem Einflusse des Storno ausgesetzt, angenommen werden.

Demzufolge können die ausserhalb der Versicherungsperiode stehenden Lebenden beziehungsweise deren discontirte Zahlensummen vom Storno nicht getroffen werden. Nur dann, wenn sie die Begrenzung der Summe innerhalb der Versicherungsperiode bedingen, fallen sie mit unter den Einfluss des Storno. Mit Rücksicht darauf werden jene in der siebenten Lieferung dieses Werkes unter dem Titel „Noch einige mathematische Grundlagen für den steigenden Gewinnantheil bei Lebensversicherungen“ VII und VIII dargestellten Formen, sobald in denselben neben der Sterblichkeit auch der Storno Berücksichtigung finden soll, einer Modification in dem Sinne unterzogen werden müssen, dass alle in denselben vorkommenden Summenausdrücke, welche jene in die Versicherungsperiode fallenden Altersclassen mit ihrer Function umfassen, mit dem Factor, welcher die Reduction durch den Storno zum Ausdrucke bringt, multiplicirt werden.

Bezeichnet man den Storno-Percentsatz mit $S = 100s$, so wird für diesen Factor der Ausdruck $(1 - s)$ gelten. Demgemäss wird bei Annahme eines

33%igen Storno, $S = 100s = 33$ sein und somit durch $1 - s = 0{\cdot}67$ jener Factor ziffermässig zur Darstellung gelangen.

Die bezüglichen Formen gestalten sich demgemäss in folgender Weise:

Die Form 18), welche für einen sofort nach dem ersten Jahre beginnenden und während der ganzen Versicherungsdauer fortlaufenden, steigenden Gewinnantheil gilt, wird bei Berücksichtigung des Storno lauten:

$$k = m \,.\, \frac{(1-s)\,[\Sigma\Sigma D_{x+1} - \Sigma\Sigma D_{x+n}] - (n-1)\,\Sigma D_{x+n}}{(1-s)\,[\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n+1}]}$$

so dass beispielsweise bei einen Storno von 33%, also $(1-s) = 0{\cdot}67$ für eine im Alter von 30 Jahren abgeschlossene 20jährige gemischte Versicherung unter Zugrundelegung eines 4%igen Zinsfusses; also für $x = 30$, $n = 20$ und $P = 100\,p = 4$ der Prämienzuschlag

$$k = 4{\cdot}25 \,.\, m$$

sich ergibt, daher für einen 3%igen steigenden Gewinnantheil, d. i. $M = 100\,m = 3$, dessen Ausmaass $k = 12{\cdot}75\%$ beträgt, während sich derselbe ohne Berücksichtigung des Storno auf 23%, also nahezu das Doppelte beläuft.

Hingegen wird bei einem Fälligwerden des Gewinnantheiles nach einem Versicherungsbestande von $a + 1$ Jahren in der Höhe von $(a + 1)\,M\%$, die entsprechend modificirte Form 19) gelten, d. i.

$$k = m\, \frac{(1-s)\,[\Sigma\Sigma D_{x+a+1} + a\,.\,\Sigma D_{x+a+1} - \Sigma\Sigma D_{x+n}] - (n-1)\,\Sigma D_{x+n}}{(1-s)\,[\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n+1}]}$$

Für $a = 2$ und sonst gleichen Voraussetzungen des gegebenen Beispieles ergibt sich nun für diesen Fall

$$k = 4{\cdot}015 \,.\, m$$

beziehungsweise $k = 12{\cdot}05$ für einen 3%igen steigenden Gewinnantheil als Prämienzuschlag. Diese Zuschläge genügen jedoch blos für eine percentuelle Bemessung des Gewinnantheiles von der Normalprämie. Da jedoch der percentuell steigende Gewinnantheil auch auf die Zuschlagsprämie ausgedehnt werden muss, so wird dieselbe um $\frac{k^2}{100}$ grösser werden müssen, um dieser Anforderung zu genügen.

Der thatsächliche Zuschlag k_1 wird in Folge dessen

im ersteren Falle $k_1 = 12{\cdot}75 + 1{\cdot}63 = 14{\cdot}38\%$,

im letzteren Falle $k_1 = 12{\cdot}05 + 1{\cdot}45 = 13{\cdot}50\%$ betragen.

In gleicher Weise werden die weiteren Formen eine entsprechende Modification erfahren, indem die Form 20) unter Berücksichtigung des Storno die Gestalt

$$k = m \,.\, \frac{(1-s)\,[\Sigma\Sigma D_{x+1} - \Sigma\Sigma D_{x+\mu+1}] - \mu\,.\,\Sigma D_{x+n}}{(1-s)\,[\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n+1}]}$$

nnd die Form 21) diejenige von

$$k = m \,.\, \frac{(1-s)\,[\Sigma\Sigma D_{x+a+1} + a\,.\,\Sigma D_{x+a+1} - \Sigma\Sigma D_{x+\mu+a+1}] - (\mu + a)\,\Sigma D_{x+n}}{(1-s)\,[\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n+1}]}$$

annimmt, so dass auch hier dem Einflusse des Storno Rechnung getragen ist.

Der sinkende Zinsfuss und dessen Einfluss auf die garantirte Rente.

Der Begriff einer garantirten Rente beruht auf dem Wesen eines Vertragsverhältnisses, nach welchem gegen Zahlung eines einmaligen Betrages das Bezugsrecht einer dauernden fixen Jahresrente erworben wird. Die öffentliche Staatsschuld repräsentirt daher eine derartige garantirte Rente, welche jedoch blos in einem fixen Zinsenertrage besteht, da eine Rückzahlung bei derselben im Allgemeinen nicht vorgesehen ist. Der Werth einer solchen Rente ist also stets derjenige, welchen ein ewiger Zinsengenuss darstellt.

Einem ähnlichen Principe entspricht die sogenannte Leibrente, d. i eine durch Versicherungsvertrag bedingte garantirte lebenslängliche Rente, deren Grundlage wohl ebenfalls auf einer garantirten fixen Verzinsung beruht, jedoch überdies eine Tilgung des Capitales innerhalb der entsprechenden wahrscheinlichen Lebensdauer des Versicherten voraussetzt. Insoferne nun die Garantie der Leibrente theilweise auf der garantirten Verzinsung der öffentlichen Schulden beruht, bildet dieselbe eine Erweiterung dieses Principes dahin, dass der Capitalswerth des ewigen Zinsengenusses, abzüglich desjenigen eines lebenslänglichen, auf dem Wege der jährlichen Tilgung mit in die Leibrente einbezogen erscheint. Das Wesen dieses Principes lässt sich aus der historischen Entwicklung desselben erklären.

Bis zum Jahre 1808 war für die Gebahrung des Leibrentenfonds in England keine staatliche Aufsichtsbehörde bestellt, sondern die fallweise nöthigen Anordnungen über Verwaltung und Investition des Fonds-Capitales dem Schatzkanzler überlassen. Das englische Leibrenten-Gesetz vom Jahre 1808 übertrug die Agenden der „Life Annuities" an die Commission für Reducirung der National-Schuld. Als oberster Grundsatz für das gegenseitige Verhältniss der Leibrentenschuld und der anderen Staatsschulden-Gattungen wurde aufgestellt, dass es jedem Eigenthümer von consolidirten oder reducirten 3percentigen Stocks freistehen solle, dieselben bei der obgenannten Commission zu überreichen behufs Umtausches gegen eine begrenzte Annuität, abhängig von der Lebensdauer entweder einer einzelnen Person oder zweier Personen und des Ueberlebenden von ihnen.

Als Massstab für die Berechnung der Lebensdauer der Leibrenteninhaber beider Geschlechter wurde die „Northampton'sche Mortalitäts-Tabelle", ein Werk des berühmten politischen Arithmetikers Dr. Price, zu Grunde gelegt. Die durch Ankauf von Leibrenten gewonnenen Capitals-Beträge an Staatsschuld-Titeln werden in den Staatsschulden-Tilgungsfond (Sinking Fund) übernommen und die auf diese Capitalien entfallenden Zinsen für Rechnung dieses Fonds ausbezahlt. Zum Zwecke des exacten Altersnachweises der Leibrentenwerber ist ein System minutiöser Vorsichtsmassregeln geschaffen. Ueber die

Transactionen des Fonds soll jährlich an das Parlament Rechnung gelegt werden.

Der ökonomische Erfolg eines Leibrentenplanes als eines Mittels zur Tilgung der Staatsschuld ist vorzüglich von der Richtigkeit zweier Annahmen abhängig.

1. von der Wahrscheinlichkeit einer Courssteigerung der Staatspapiere, gegen welche die Leibrenten eingetauscht wurden, für die Dauer dieser Leibrenten.

2. von der richtigen Schätzung der Lebensdauer jener Personen, von deren Leben die Leibrente abhängig ist.

In letzterer Beziehung weist die von Dr. Price im Jahre 1782 verfasste Northampton'sche Mortalitäts-Tabelle Mängel auf, welche von der englischen Staatsschuldenverwaltung verbessert worden sind.

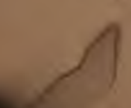
Sämmtliche der in Vorstehendem angeführten Arten der Staatsschuld bedürfen urkundlicher Grundlagen. Speciell hinsichtlich der Beurkundung von Rentenschulden herrscht in den einzelnen Staaten grosse Verschiedenheit. Das französische System der Inscription besteht in der Eintragung der Rente in das Grosse Buch der Staatsschuld, worüber eine Bescheinigung ausgestellt wird, aus welcher das Recht auf den Bezug eines bestimmten Betrages jährlicher Rente hervorgeht.

Das österreichische System beispielsweise ist, hievon abweichend, gekennzeichnet durch die Ausfertigung bestimmter auf den Nominal-Betrag des Capitales ausgestellter Obligationen, welche bei der nicht rückzahlbaren Schuld nur die Zinsverpflichtung und nicht die Pflicht zur Capitalsrückzahlung ausgedrückt enthalten. Trotzdem nun beispielsweise die auf 100 Gulden lautende Renten-Obligation dem Gläubiger nur den Anspruch auf den Bezug jährlicher Zinsen dieses Nominal-Schuldcapitales, niemals aber auf Capitals-Rückzahlung selbst gibt, hat die Obligation dennoch einen Capitalswerth. Der Umstand nämlich, dass durch den Besitz der Obligation der jährliche Bezug einer Rente gesichert ist, gibt dem Titre den Handelswerth, als dessen Ausdruck der Rentencours an der Börse erscheint.

Beide Systeme, das der Inscription und das der Obligations-Ausfertigung kennen Schuldtitres, die auf Ueberbringer und solche, die auf Namen lauten.

Ebenso, wie bei Ausstellung von Rentenurkunden durch Private, war auch bei der Beurkundung von Staatsschulden das Erste und Ursprüngliche die Ausfertigung der Rentenurkunde auf eine bestimmte Person. Das Inhaber- (au porteur-) Papier kommt zeitlich später. Privatrechtliche Forschungen haben die Priorität des Namenpapieres unumstösslich bewiesen. Durch die Bedürfnisse des Börsenverkehres begünstigt, hat sich das Ueberbringer-Effect zu jener führenden Rolle emporgeschwungen, welche ihm — dem Objecte und Substrat der Speculation — heutzutage zukommt, während das Namenpapier mehr den Interessen des ständigen Rentenbesitzers zu dienen bestimmt und zu diesem Zwecke in den einzelnen Staaten mit besonderem Rechtsschutze ausgestattet ist*).

*) Siehe Körner „Die Conversion öffentlicher Schulden."



Die jährliche Zinsensumme, zu deren Leistung der Staat aus dem Staatsschuldverhältnisse verpflichtet erscheint, ist für die ganze Dauer des Bestandes der Schuld bestimmt und in dem Verhältnisse, in welchem sich der Zinsfuss zum Nominalbetrage befindet, ist bei Staatsschulden der jährliche Zinsbetrag für die ganze Dauer des Bestandes der betreffenden Schuldgattung fix und invariabel; variabel hingegen ist der Capitalsbetrag, welcher zur Erlangung des jährlichen Zinses jeweilig erforderlich ist. Das Steigen des Capitals bedeutet das Sinken des Zinsfusses und umgekehrt. Infolge dessen repräsentirt dieses Capital den jeweiligen Werth der Rentenurkunde, als dessen Ausdruck der Cours des Papieres erscheint. Solange dieser Cours den Nominalwerth des Papieres nicht erreicht, bleibt die effective Verzinsung des Capitals eine höhere, als dies dem fixen nominellen Zinsfusse entspricht, und bildet die jeweilige Differenz zwischen Nominalwerth und Courswerth den capitalisirten Werth zwischen effectivem und nominellen Zinsenertrage. Daraus folgt, dass die effective Verzinsung, welche dem Erstehungswerthe eines Rentenpapieres entspricht, thatsächlich für den Besitzer eine fixe bleibt, nur wird derjenige Theil der Verzinsung, welcher aus der Unterwerthigkeit des Papieres gegenüber dessen Nominalwerthe entspringt, durch das Schwinden dieser Unterwerthigkeit capitalisirt. Nehmen wir zum Beispiel an, dass ein 4percentiges Papier mit dem Course von 80 erworben worden wäre und successive jenen dem Nominalwerth entsprechenden Cours von 100 erreicht, so wird die dem Course von 80 entsprechende effective Rentabilität von 5 Percent wohl einer solchen von 4 Percent weichen, doch wird der Zinsenausfall von 1 Percent durch den Courszuwachs von 20 vollends capitalisirt. *Fundirte Verpflichtungen des Privatcapitals, welche also auf Grund der ursprünglichen Verzinsungs-Grundlage eingegangen wurden, behalten daher auch bei sinkendem Zinsfusse ihre sichere Unterlage, sobald der Courszuwachs beim Capitale verbleibt.* Leibrenten, deren garantirte Zinsen durch öffentliche Schuldbriefe fundirt sind, behalten demzufolge unter allen Umständen ihre volle Sicherheit, u. z. auch dann, wenn durch Conversion dieser Schuldbriefe eine Reduction des nominellen Zinsfusses erfolgt, vorausgesetzt, das der Courszuwachs mit zur neuerlichen Fundirung herangezogen wird.

Da nun auch die Grundlage der Lebens- sowie Todesfallversicherungen auf der Basis einer Leibrente beruht, welche jedoch im Gegensatze zur gewöhnlichen Leibrente umgekehrt vom Versicherten an die Versicherungsbank in Form der jährlichen Prämie geleistet wird, wie auch sonst die Gesammtleistung vom fixen Zinsfusse abhängt, so wird auch hier für die bereits bestehenden Versicherungen die fernere Leistung des Versicherten der eingegangenen Verpflichtung der Versicherungsbank entsprechen und von etwaigen, im Laufe der Zeit eintretenden veränderten Zinsfussverhältnissen unbeeinflusst bleiben.

Hingegen werden neu eingegangene Verpflichtungen den neuen Zinsfussverhältnissen angepasst werden müssen, weil der Erstehungswerth eines gleichen Zinsertrages einen höheren Capitalsaufwand erfordert.

Diese Anforderung tritt umso dringender an den Versicherer heran, je mehr der allgemeine Zinsfuss das Bestreben zeigt, den der Prämie versicherungstechnisch zugrundegelegten zu unterbieten. Diesem Bestreben wird jedoch durch den Nominalwerth der Rentenpapiere insolange eine Grenze gesetzt, als nicht zu einer Conversion des nominell zugrundegelegten Zinsfusses geschritten wird.

Das Bedürfniss der Conversion stellt sich nämlich in dem Momente ein, wo der Courswerth des Papieres den Nominalwerth desselben zu überschreiten beginnt, welcher Umstand nichts anderes bedeutet, als eine Kundgebung des öffentlichen Geld-Marktes, dass die betreffende Schuld besser verzinst ist, als dies den vorhandenen Zinsfussverhältnissen entspricht.

In einem solchen Falle tritt der Staat oder der private öffentliche Schuldner an den Geldmarkt heran mit der Alternative, die alten Schuldtitres gegen neue minderverzinsliche einzutauschen oder zum Nominalwerthe einzulösen. Natürlich wird der Cours der neuen Titres, ihrer geringeren Verzinsung entsprechend angepasst sein, so dass wieder ein Spielraum zwischen diesem und dem Nominalwerthe derselben entsteht, innerhalb dessen wieder einer eventuellen weiteren fallenden Tendenz des allgemeinen Zinsfusses Rechnung getragen zu werden vermag. Diesem den alten Zinsfuss unterbietenden Niveau unterordnen sich denn auch nach und nach die übrigen Schuldgattungen, auf diese Weise einen natürlichen Ausgleich der Rentabilität bewirkend.

Eine solche allgemein durchgeführte Reduction des nominellen Zinsfusses bildet nun jenen Markstein, bei welchem der Versicherer in die Zwangslage versetzt wird, den der Prämie versicherungstechnisch zugrundegelegten Zinsfuss ebenfalls in angemessener Weise zu reduciren, wie auch die garantirte Leibrente demselben anzupassen, so dass der jeweilige Erstehungswerth der neuen Rentenpapiere abermals die Grundlage für weitere, auf Decennien hinaus eingegangene Verpflichtungen zu bilden geeignet ist, bis auch das neue minderverzinsliche Papier in seinem Course den Nominalwerth erreicht und auf diese Weise zu einer neuerlichen Conversion drängt, hiedurch einen weiteren Markstein der Rentabilitätsbedingungen bildend.

Die Beziehung der einmaligen Prämie zur Leibrenten-Mise mit Rücksicht auf den zu Grunde gelegten Zinsfuss.

I.

Angesichts der sich immer mehr geltend machenden Nothwendigkeit, der allgemein sinkenden Tendenz des Zinsfusses auch in der Lebensversicherung die erforderliche Aufmerksamkeit zuzuwenden, drängt sich unwillkürlich die Frage auf, ob im Falle einer vorzunehmenden Reduction jenes der Prämienberechnung zu Grunde liegenden Zinsfusses die Dringlichkeit einer vollständigen Umrechnung der versicherungstechnischen Grundlagen, auf den neuen Zinsfuss nothwendig vorhanden ist und ob nicht auf dem Wege einer entsprechenden Rectification die geeignete Vereinfachung dieser Arbeit angestrebt werden könne. Die Wichtigkeit dieser Frage äussert sich insbesondere darin, dass die Umarbeitung des ganzen Tarifmateriales besondere Mühe und Zeit erfordert und daher ein derartiges Auskunftsmittel bei Neuberechnung der Prämien sich als äusserst vortheilhaft erweisen müsste. Hinsichtlich der Form, in welcher wir diesbezüglich zu einem günstigen Resultate gelangen könnten, ist der Umstand in Erwägung zu ziehen, dass die Prämien der verschiedenen fundamentalen Versicherungs-Combinationen sich als von einer einzigen Variablen abhängig erweisen, indem jeweilig die Mise der entsprechenden temporären, bezw. lebenslänglichen Leibrente das Wesen der zu bestimmenden Prämien bedingt, so dass die Reflexion naheliegt, ob nicht bei veränderter Zinsfussgrundlage durch alleinige Ermittlung der Mise den Anforderungen Genüge geleistet werden könnte. In der fünften Lieferung dieses Werkes wurde in einer Abhandlung unter dem Titel: „Zur Theorie und näherungsweisen Berechnung der Prämienreserve eines Versicherungsstockes“ dieser Gegenstand einer näheren Erörterung unterworfen und gelangten wir in den Formen 34) bis 45) zu Resultaten, welche die Abhängigkeit nicht nur der Prämie, sondern auch der Reserve von der Mise allein manifestiren.

Bezüglich der einfachen Todesfallversicherung äussert sich dies in den Formen

1) $$P_x = S\left(1 + M_x\left(\frac{1}{r} - 1\right)\right)$$

2) $$p_x = S\left(\frac{1}{M_x} - \frac{1}{r} + 1\right) \text{ und}$$

3) $$ {}_{x\,|}{}^{m}Res\,(p_x) = S\left(1 - \frac{M_{x+m}}{M_x}\right)$$

worin S die Versicherungssumme und r den Aufzinsungsfactor bezeichnet. Um daher bei verändertem Zinsfusse die Prämie p_x festzustellen, ist es noth-

wendig, jene in diesem Falle sich vollziehende Rectification der Mise rechnungsmässig zur Geltung zu bringen. Für diesen Zweck eignet sich am besten die Form 1), da dieselbe mathematisch die Gleichung einer Geraden darstellt und daher die einfachste Rechnungsmethode zulässt.

Nehmen wir hierin die zugrundegelegte Versicherungssumme $S = 1$ an, indem wir voraussetzen, dass nicht nur die Mise M_x für eine lebenslängliche Rente 1, sondern auch die einmalige Prämie P_x für eine Versicherungssumme in der gleichen Höhe gilt, dann erhalten wir gemäss der allgemeinen Gleichung einer Geraden

$$y = \xi\, tg\, \alpha + b$$

den der Form 1) entsprechenden Ausdruck.

4) $$M_x = -P_x \frac{r}{r-1} + \frac{r}{r-1}$$

worin also M_x die Ordinate und P_x die Abscisse bedeutet, während der Neigungswinkel der Geraden zur Abscissenaxe durch $tg\, \alpha = -\frac{r}{r-1}$ gekennzeichnet ist und der Abstand des Schnittpunktes der Graden mit der Ordinatenaxe vom Anfangspunkte des Coordinatensystemes durch $b = \frac{r}{r-1}$ zum Ausdrucke gelangt.

Erleidet nun der Aufzinsungsfactor $r = 1 + q$, in welchem $Q = 100\, q$ den zugrundegelegten Zinsfuss bedeutet, eine Veränderung, so wird sowohl der Neigungswinkel zur Abcissenaxe α, als auch der kürzeste Abstand des Ordinatenschnittpunktes von der Abcissenaxe b eine Veränderung erfahren. Hingegen wird der kürzeste Abstand des Abcissenschnittpunktes dieser Geraden von der Ordinatenaxe constant bleiben, und zwar ist derselbe $a = 1$, wie dies aus der Gleichung 4), im Falle in derselben $M_x = 0$ gesetzt wird, hervorgeht.

Es ergibt sich nämlich für $M_x = 0$ $\qquad P_x = a = 1$

und für $P_x = 0$ $\qquad M_x = b = \frac{r}{r-1}$

welche Werthe wohl blos theoretisch in Betracht kommen können.

Bringt man daher zwei oder mehrere Zinsfüsse in Rechnung, so wird mit jedem derselben eine andere Gerade correspondiren. Doch haben alle diese Geraden den Schnittpunkt mit der Abscissenaxe gemeinsam, so dass wir es hier mit einem Strahlenbüschel zu thun haben, in welchem die einzelnen Strahlen verschiedenen Zinsfüssen entsprechen.

Denken wir uns daher zwei derartige Gerade G und G' in einem Coordinatensysteme dargestellt und bezeichnen wir ihren gemeinsamen Schnittpunkt mit der Abscissenaxe durch den Buchstaben A, die Schnittpunkte derselben mit der Ordinatenaxe hingegen mit B und B', so werden zwischen diesen beiden Geraden gewisse Beziehungen bestehen, welche in der gemeinsamen Form ihrer analytischen Function begründet sind. Der Geraden G' muss nämlich analog zur Form 4) die Gleichung

5) $$M'_x = -P'_x \frac{r'}{r'+1} + \frac{r'}{r'-1}$$

entsprechen, so dass hier $tg\,\omega' = -\frac{r'}{r'-1}$, wie auch dementsprechend $b' = \frac{r'}{r'-1}$ sich ergibt, wobei natürlich der Aufzinsungsfactor r' einen anderen Zinsfuss als r repräsentirt.

Während also der Neigungswinkel der Geraden G zur Abscissenaxe durch ω ausgedrückt erscheint, wird derselbe bei der Geraden G' durch ω' zur Darstellung gelangen, so dass die beiden Geraden den Winkel $\omega - \omega'$ einschliessen werden.

Soll nun für einen der Geraden G entsprechenden Punkt der correspondirende Punkt der Geraden G' ermittelt werden, was derart zu verstehen ist, dass beide Punkte als Functionen von M_x und P_x, resp. M'_x und P'_x der gleichen Altersclasse x Genüge leisten, so werden vor allen Dingen die Bedingungen zu ermitteln sein, welche zwischen den beiderseitigen Functionen bei constantem Alter jedoch veränderlichem Aufzinsungsfactor r bestehen.

Greifen wir zu diesem Zwecke auf die bereits genannte Abhandlung in der fünften Lieferung nochmals zurück, so finden wir in der Formel 24) derselben jenen Anhaltspunkt, welcher in dieser Hinsicht geeignet ist, über die Beschaffenheit der einmaligen Prämie den nöthigen Aufschluss zu geben.

Es ist hier nämlich die auf dem Wege entsprechender mathematischer Ableitung ermittelte Form für P_x durch die Gleichung

6) $$P_x \,.\, D_x = S \,.\, \int r^{-x}\, d L_x + \text{Const.}$$

dargestellt. Da wir nun den Werth für S durch 1 ausgedrückt haben, so wird dasselbe aus der Rechnung verschwinden und erhalten wir aus dieser Form

$$P_x\, D_x = L_x\, r^{-x} - \int L_x\, d\, r^{-x} + \text{Const.}$$

beziehungsweise, da $D_x = L_x \,.\, r^{-x}$ ist, die Relation

7) $$P_x - 1 = \frac{\text{Const.} - \int L_x\, d\, r^{-x}}{L_x\, r^{-x}}$$

Ebenso lässt sich aus der in der gleichen Abhandlung dargestellten Form 15) die Gleichung

8) $$M_x\, D_x = \text{Const.} - \int D_x\, dx = \text{Const.} - \int L_x\, r^{-x} \,.\, dx$$

ableiten, woraus sich durch den gleichen Vorgang die Relation

$$M_x\, D_x = \text{Const.} - L_x \int r^{-x}\, dx + \int \left(\int r^{-x}\, dx\right) d L_x$$

ergibt, welche nach durchgeführter Rechnung in folgende übergeht. Es ist nämlich:

$$\int r^{-x}\, dx = -\frac{r^{-x}}{lr} + C$$

daher das Resultat:

$$M_x D_x = \text{Const.} - L_x \left(C - \frac{r^{-x}}{lr}\right) + \int \left(C - \frac{r^{-x}}{lr}\right) d\, L_x$$

respective

$$M_x D_x = \text{Const.} + L_x \frac{r^{-x}}{lr} - \int \frac{r^{-x}}{lr}\, d\, L_x$$

folgt, welches für M_x den Ausdruck

$$9) \qquad M_x \left(1 - \frac{1}{lr}\right) = \frac{\text{Const.} - \int \frac{r^{-x}}{lr}\, d\, L_x}{r^{-x} L_x}$$

liefert.

Hieraus ergibt sich der für unsere Zwecke brauchbare Ausdruck:

$$10) \qquad \frac{M_x}{P_x - 1} = \frac{\text{Const.} - \int \frac{r^{-x}}{lr} .\, d\, L_x}{\text{Const.} - \int L_x .\, d\, r^{-x}} \qquad \frac{lr}{lr - 1} = tg\, x = - \frac{r}{r - 1}$$

Auf dieser Grundlage sind wir nun in der Lage, der Annahme eines constanten x und eines variablen Aufzinsungsfactors r Rechnung zu tragen, indem wir alle Factoren, in welchen die Derivation nach x das Wesen dieser Formen beeinflusst, aus der Rechnung eliminiren.

Durch geeignete Anwendung dieser Form wird es uns möglich, den Einfluss einer Zinsfussveränderung auf die vom Aufzinsungsfactor abhängigen Functionen der Mise und der einmaligen Prämie vom mathematischen Gesichtspunkte aus zu beurtheilen und dementsprechend die Beziehung ihrer Beschaffenheiten in verschiedenen Stadien der Variation rechnungsmässig darzustellen.

Diese Thatsache ist geeignet, vorderhand die Richtung zu kennzeichnen, nach welcher sich unsere diesbezüglichen Untersuchungen zu bewegen haben werden, um den Anforderungen in dieser Hinsicht Rechnung zu tragen.

Die Beschaffenheit der Geraden-Gleichung 4) ist eine derartige, dass hierin die Beziehung der beiden Variablen M_x und P_x durch den Aufzinsungsfactor allein bedingt ist, während das Alter x als verborgene Variable, von welcher sowohl M_x als auch P_x abhängt, auf die Beschaffenheit der diesbezüglichen Function keinen directen Einfluss ausübt, so dass deren Wesen wohl in der Veränderlichkeit der Coordinaten sich ausdrückt, doch in deren Function selbst eliminirt erscheint. Wenn wir nun dennoch das Alter x in den Bereich unserer Rechnung ziehen, so geschieht es, um die correspondirenden Werthe der beiden Coordinaten bei gleichen Altern zu ermitteln, sobald die Veränderung des Aufzinsungsfactors die Function derselben beeinflusst. Im Principe handelt es sich also um die Bestimmung jenes Gesetzes, nach welchem bei Veränderung des Aufzinsungsfactors die den einzelnen Altersclassen entsprechenden Punkte der gegebenen Geraden im Systeme ihrer jeweiligen Stellung sich verschieben.

Die Beziehung der einmaligen Prämie zur Leibrenten-Mise mit Rücksicht auf den zu Grunde gelegten Zinsfuss.

II.

Aus der Form 10) der vorigen Abhandlung ist zu entnehmen, dass bezüglich des Verhältnisses zwischen Mise und einmalige Prämie bei Veränderlichkeit des Aufzinsungsfactors r und gleichem Alter, sich eine Verschiebung des Punktes g in g' derart vollziehen muss*), dass die Verbindungslinie zwischen beiden die Tangente einer Hyperbel darstellt, so zwar, dass jene den verschiedenen Altersclassen entsprechenden Verbindungslinien ein- und dieselbe hyperbolische Curve berühren.

Es ergibt sich nämlich durch Differentiation des Ausdruckes

$$\frac{M_r}{1-P_r} = \frac{r}{r-1}, \text{ die Relation } \frac{d\,M_r}{d\,P_r} = -\frac{r}{r-1} = -\frac{M_r}{1-P_r}$$

welche offenbar die Tangente einer Hyperbel darstellt, wenn die Veränderlichkeit des Aufzinsungsfactors r als leitend angenommen wird. Aus dieser Form geht aber auch hervor, dass jene Hyperbel eine gleichseitige sein wird, wenn auch nicht ausgeschlossen ist, dass der Neigungswinkel ihrer Hauptaxe zum ursprünglichen Axensystem eine abnormale Abweichung aufweist, indem derselbe mehr oder weniger als 45° beträgt. Dieser Umstand führt zu der Conclusion, dass bei Feststellung der Werthe der betreffenden Constanten dieser Curve sich Schwierigkeiten ergeben würden, deren Ueberwindung mit dem Werthe des Resultates nicht in Einklang steht, wenn auch nicht bestritten werden kann, dass bei bekannter Gleichung dieser Hyperbel der Punkt g' auf directem Wege sich allgemein ermitteln liesse, indem durch jeden Punkt g zur Hyperbel jeweilig eine Tangente geführt werden könnte, welche mit der Geraden G' zum Schnitt gebracht, den gesuchten correspondirenden Punkt g' bestimmen würde. Durch allgemeine Darstellung dieses Schnittpunktes wäre auf diese Weise den Anforderungen Genüge geleistet.

Es muss sich uns jedoch darum handeln, auf einfachere Weise zum Resultate zu gelangen und werden wir dies auf folgendem Wege versuchen: Es ergibt sich nämlich aus obigem Ausdrucke durch Differentiation nach r

$$\frac{d\,P_r}{M_r} - \frac{P_r-1}{M_r} \cdot \frac{d\,M_r}{M_r} = -\frac{dr}{r^2} \text{ resp. } \frac{d\,M_r}{M_r}\left(\frac{d\,P_r}{d\,M_r} - \frac{P_r-1}{M_r}\right) = -\frac{dr}{r^2}$$

und nach entsprechender Substitution

$$\frac{d\,P_r}{d\,M_r} = -\frac{1}{r}\,\frac{d\,l\,r}{d\,l\,M_r} - \frac{r-1}{r}$$

daraus folgt für das Mittel zwischen den Punkten g und g' der Ausdruck

*) g und g' entsprechen correspondirenden Punkten der Geraden G und G'.

$$\frac{P'_x - P_x}{M'_x - M_x} = -\frac{2}{r' + r} \cdot \frac{l\,r' - l\,r}{lM'_x - lM_x} - \frac{1}{2}\left(\frac{r'-1}{r'} + \frac{r-1}{r}\right.$$

titution der Werthe P_x und P'_x ergibt sich sodann

$$\frac{\frac{1}{\,} - M'_x \frac{r'-1}{r'}}{{}'_x - M_x} = -\frac{2}{r'+r} \cdot \frac{l\,r' - l\,r}{lM'_x - lM_x} - \frac{1}{2}\left(\frac{r'-1}{r'} + \right.$$

slich

$$\frac{M'_x + M_x}{M'_x - M_x}\; l\, \frac{M'_x}{M_x} = 4 \cdot \frac{(l\,r' - l\,r)\, r'\, r}{r'^2 - r^2} = k$$

en wir nun hierin $\frac{M'}{M} = tg^2\, u$ an, so erhalten wir, da

$$-\cos 2\,u = \frac{tg^2\, u - 1}{tg^2\, u + 1} \text{ ist, den Ausdruck}$$

$$2\, l\, tg\, u = -k \cdot \cos 2\, u$$

st aber bekanntlich

$$\int \frac{dv}{\cos v} = -l\, tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right),$$

$$\int \frac{dv}{\cos 2\, v} = -\frac{1}{2}\, l\, tg\left(\frac{\pi}{4} - v\right) = \frac{1}{2}\, l\, tg\left(\frac{\pi}{4} + v\right)$$

ı wir daher $u = \frac{\pi}{4} + v,$

Betrachten wir nun die Formel 12), welche mit Rücksicht auf den Werth von k

$$l\, tg\, u = -\cos 2\, u$$

lautet, so finden wir, dass diese Gleichung auch dann aufrecht bleibt, wenn u den Bogenwinkel $\frac{\pi}{4}$ um ein Geringes übersteigt, und zwar wird dieser Zuwachs bis zu 2° zulässig sein, ohne die Giltigkeit der Gleichung zu beeinflussen. Der Form 12) entsprechend, ergibt sich nun durch Substitution des ursprünglichen Werthes

14) $tg^2\, u = \frac{M'_x}{M_x}$ die Gleichung $\frac{M'_x}{M_x} = e^{-2\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2v\right)} = e^{2 \sin 2v}$

und da thatsächlich der Quotient $\frac{M'}{M}$ die Zahl 1 blos um ein Geringes überschreitet, indem der Winkel u im Maximum blos um 1·5° grösser als $\frac{\pi}{4}$ ist, so wird diese Form für sämmtliche Altersclassen Giltigkeit besitzen.

Nun handelt es sich darum, den Winkelzuwachs v für die einzelnen Alter zu bestimmen. Zu diesem Zwecke ist es nothwendig, denselben hinsichtlich seines Maximums und Minimums zu untersuchen. Im höchsten, wahrscheinlich erreichbaren Alter $x = 100$ ist die Mise für jeden zugrunde gelegten Zinsfuss stets gleich 1, daher $M_{100} = M'_{100} = 1$, somit auch $tg\, u = 1$ oder $u = \frac{\pi}{4}$ und $v = 0$.

Hinsichtlich des jüngsten Alters, also für $x = 0$ wird für die Ermittlung des Verhältnisses zwischen den Misen M' und M die aus der Formel 2) der vorigen Abhandlung sich ergebende Relation zum Ziele führen, und zwar ist

15) $$\frac{M'_x}{M_x} = \frac{p_x + \frac{r-1}{r}}{p'_x + \frac{r'-1}{r'}}$$

Wird nun jene auf die Versicherungssumme 1 berechnete jährliche Prämie für das jüngste Alter durch die reciproke Zahl des höchsten wahrscheinlich zu erreichenden Menschenalters, d. i. durch $\frac{1}{100}$ ausgedrückt, so ergibt sich als Grundlage des Maximums beim Winkelzuwachs

16) $$\frac{M'_0}{M_0} = \frac{\frac{1}{100} + \frac{r-1}{r}}{\frac{1}{100} + \frac{r'-1}{r'}}$$

und somit der Winkelzuwachs während des gesammten Menschenalters

17) $u_0 - u_{100} = \operatorname{arc} tg \sqrt{\frac{\frac{1}{100} + \frac{r-1}{r}}{\frac{1}{100} + \frac{r'-1}{r'}}} - \frac{\pi}{4}$ und daher $\frac{u_0 - u_{100}}{100} = \vartheta$

der Winkelzuwachs in einem Jahre. Da jedoch v im jüngsten Alter das Maximum und im höchsten Alter das Minimum erreicht, so wird

$$v_x = (100 - x - 1)\,\vartheta$$

den jeweiligen Gesammtzuwachs in den verschiedenen Altersclassen darstellen. Derselbe erweist sich aber nicht als durchaus regelmässig, weil auch ϑ nicht ganz genau ermittelt werden kann, da jener für verschiedene Zinsfüsse sich bei der jährlichen Prämie auch im jüngsten Alter ergebende kleine Unterschied hier in der Rechnung unberücksichtigt bleibt. Es wird sich daher eine Correctur als zweckmässig erweisen, so dass nachstehende Form der Anforderung beiläufig zu entsprechen vermag

$$18)\qquad v_x = (100 - x + 1)\,\vartheta - (100 + x - 1)\,\frac{100}{\vartheta}$$

demnach erhalten wir als endgiltige Formel für das annähernde Verhältniss zweier, verschiedenen Zinsfüssen entsprechender Leibrenten-Misen

$$19)\qquad M'_x = M_x\, tg^2\left[\frac{\pi}{4} + (100 - x + 1)\,\vartheta - (100 + x - 1)\,\frac{100}{\vartheta}\right]$$

Ist daher M_x gegeben, so lässt sich M'_x direct berechnen. Nehmen wir z. B. den für M_x zugrundegelegten Zinsfuss mit 4% an, so wird falls M'_x dem Zinsfusse von $3\frac{1}{2}$% entsprechen soll, folgendes Resultat sich ergeben: In diesem Falle ist $r = 1{\cdot}04$, $r' = 1{\cdot}035$ und der Form 17) gemäss $u_0 - u_{100} = 1^\circ\, 26'\, 36''$, daher der einjährige Zuwachs $\vartheta = 52''$.

Daraus ergeben sich für M' beispielsweise für die Alter von 18, 58 und 70 Jahren die Werthe

$$x = 18\ ,\quad \frac{\pi}{4} + v = 46^\circ\ 8'\ 11''\quad M_x = 19{\cdot}6807\quad M'_x = 21{\cdot}29$$

$$x = 58\ ,\quad \frac{\pi}{4} + v = 45^\circ\ 32'\ 14''\quad M_x = 11{\cdot}0463\quad M'_x = 11{\cdot}47$$

$$x = 70\ ,\quad \frac{\pi}{4} + v = 45^\circ\ 20'\ 17''\quad M_x = 7{\cdot}3172\quad M'_x = 7{\cdot}50$$

Da nun mittelst der Formen 1) und 2) der vorigen Abhandlung sich aus der Mise, sowohl die einmalige als auch die jährliche Prämie ermitteln lässt, so ist hiedurch den Anforderungen insoferne Genüge geleistet, als dies für eine approximative Bestimmung dieser Werthe hinreicht.

Wo eine Feststellung derselben in präciserer Weise sich als nothwendig herausstellt, dürfte jedoch diese Methode kaum genügen und ist es in dieser Hinsicht erforderlich, auf dem Wege weiterer mathematischer Untersuchungen die näheren Grenzen der zu bestimmenden Werthe goniometrisch wahrzunehmen.

Zum Zwecke der Ermittlung genauerer Werthe werden wir daher in einer der nächsten Abhandlungen die betreffende Rectificationsformel zur Darstellung zu bringen suchen.

Die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden als Element einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und die hieraus entspringenden Conclusionen.

I.

Die bisherigen Untersuchungen dieser interessanten Frage haben dargethan, dass die Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten und diejenige der Lebenden, sobald beide mittelst einer gemeinsamen Abscisse mathematisch combinirt werden, eine Beziehung involviren, welche sich durch eine Function zwischen den Ordinaten derselben unter Intervention der gemeinsamen Abscisse, als vermittelnde Variable, äusserst. Wenn nun auch die analytische Beschaffenheit der hier in Betracht kommenden Linien in diesem Verhältnisse durch geschlossene mathematische Formen nicht direct zum Ausdrucke kommt, so bildet immerhin diese Relation einen sicheren Anhaltspunkt für die Beurtheilung des Wesens und der Eigenschaften der beiden zu einander in Beziehung stehenden Curven, und zwar in desto höherem Masse, als in der functionellen Eigenthümlichkeit dieses Verhältnisses ein pronocirtes Element einer Differentialgleichung zweiter Ordnung wahrgenommen werden muss.

Die allgemeine Beschaffenheit dieser Gleichungen bringt es nämlich mit sich, dass das Wesen zweier als Curvenpaar sich äussernder, einem Verhältnisse solcher Art unterworfener Curven in diesem Verhältnisse selbst sich birgt, da dieses nur gewissen, mit einem speciellen Charakter ausgestatteten Curven oder Curventheilen zu entsprechen vermag. Die Art der Beziehung der in Betracht kommenden Linien bedingt nämlich nicht nur eine Verwandtschaft derselben im Allgemeinen, sondern auch eine in bestimmter Weise wahrzunehmende Correlation im speciellen Sinne, durch welche das kennzeichnende Moment in mathematischer Beziehung zur Geltung gelangt.

Dieser Umstand ist nun für unsere Frage von besonderer Bedeutung, weil weder die Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten, noch diejenige der Lebenden sich in einer geschlossenen mathematischen Form präsentiren und demzufolge erst in dem bezüglichen Verhältnisse dieser Beiden eine geeignete Handhabe für die analytische Charakterisirung dieser Curven gegeben ist. Um jedoch in dieser Hinsicht zum Ziele zu gelangen, ist es nothwendig, auf die allgemeine Beschaffenheit der Differentialgleichungen zweiter Ordnung Rücksicht zu nehmen und die Eigenschaften derselben diesem speciellen Falle in angemessener Weise zu unterordnen.

Hinsichtlich dessen verweisen wir auf die bezüglichen Ausführungen, betreffend die allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung (Lief. IV, V, und VI. Anhang), in welchen das Wesen dieser Formen in erschöpfender Weise behandelt wird, sowie die beweiskräftige Darstellung jener Bedingungen erfolgt, unter welchen eine Beziehung in diesem Sinne besteht.

Im Absatz III dieser Abhandlung (Seite 22 und 23) wird der Nachweis geführt, dass diese beiden versicherungstechnisch so wichtigen Curven thatsächlich jener Beziehung zu einander entsprechen, welche für Differentialgleichungen zweiter Ordnung im Allgemeinen die Grundbedingung bildet. Diese Beziehung, welche sich in der Form

a) $$L_x = \frac{e^{-\int \frac{dx}{w_x}}}{w_x}$$

äussert, bildet nach Form 109) dieser Abhandlung dasjenige Element, welches das Vorhandensein einer diesen Differentialgleichungen eigenthümlichen Bedingung kennzeichnet. Von Wichtigkeit erscheint hiebei der Umstand, dass diese zwischen den Ordinaten L_x und w_x der beiden Curven unter Vermittlung der gemeinsamen Abscisse x bestehende Beziehung in der Function einer Reihe von Verhältnisszahlen basirt, welche in diesem Falle als Wahrscheinlichkeiten sich präsentiren. Es lässt sich also umgekehrt der Schluss ziehen, dass das Wesen dieses den Differentialgleichungen zweiter Ordnung eigenthümlichen Elementes im Allgemeinen einen gleichen oder ähnlichen Ursprung aufweisen dürfte, was auch vom rein mathematischen Gesichtspunkte nicht ohne Bedeutung ist.

Mit Rücksicht auf dieses Ergebniss lassen sich daher die Principien, welche die Differentialgleichungen zweiter Ordnung charakterisiren, auf diese Relation im speciellen Sinne anwenden und mag in nächstfolgenden Auseinandersetzungen die nähere Kennzeichnung dieser Sachlage zur Erörterung gelangen.

Im Absatze IV der genannten Abhandlung über die Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung finden wir die Gleichungen der in Beziehung zu einander stehenden Curven in diesem Verhältnisse durch

b) $$y'' = f(x) . y \qquad \text{und} \qquad \zeta'' = \beta . \xi$$

allgemein ausgedrückt, wobei zwischen β und $f(x)$ die Relation

$$\beta = \frac{2}{(x + 2C)^2} - f(x)$$

besteht. Nun lässt sich aber gemäss der Form 109) dieser Abhandlung

folgende Substitation vornehmen. Es ist nämlich in diesem Falle $y = -L_x$ und $\xi = -w_x$ und daher ergeben sich die Formen

c) $$\frac{L''_x}{L_x} = f(x) \quad \text{und} \quad \text{d)} \quad \frac{w''_x}{w_x} = -\frac{2}{x+2C} \quad f(x)$$

Ferner besteht bekanntlich zwischen L_x und w_x die Relation

$$\frac{L'_x}{L_x} = -\frac{w'_x}{w_x} - \frac{1}{w_x}$$

welche mit Rücksicht auf den Umstand, dass

$$\frac{L''_x}{L_x} = \left(\frac{L'_x}{L_x}\right)' + \left(\frac{L'_x}{L_x}\right)^2$$

die Darstellung von $f(x)$ durch eine Function von w_x ermöglicht. Durch entsprechende Substitution in die Form d) erhalten wir sodann den Ausdruck

e) $$w'^2_x + \frac{3}{2} w'_x + \frac{1}{2} = \left(\frac{w_x}{x+2C}\right)^2$$

so dass eine directe Beziehung zwischen w_x und x statttindet und demzufolge in dieser Form die Differential-Gleichung für eine der beiden hier in Beziehung zu einander stehenden Curven erblickt werden muss. Diese Form correspondirt mit derjenigen in 131) der genannten Abhandlung vollständig und bildet ebenso wie diese die Handhabe zur Ermittlung der algebraischen Gleichung dieser Curve.

Der Form e) gemäss ergibt sich nämlich der Ausdruck

f) $$w'_x = -\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{w_x}{x+2C}\right)^2}$$

und demgemäss erhalten wir die partiellen Integrale

g) $$\int \frac{dw_x}{\sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{w_x}{x+2C}\right)^2}} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{w_x}{x+2C}\right)^2}} = +x + C_1$$

Es ergibt sich somit nach vollzogener Integration die Gleichung jener Curve, welche die Beziehung zwischen dem Alter x und der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer w_x zum Ausdrucke bringt.

Dieses Integrale ist nämlich im Gegensatze zu den bisher auf vielerlei Art berechneten, thatsächlich in geschlossener Form integrabel, welche Eigenschaft demselben einen besonderen Vorzug verleiht, weil hier das erste Mal auf rein deductiven Wege für die Gleichung der Curve der ferneren Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten eine geschlossene algebraische Form resultirt. Die Wichtigkeit dieses Ergebnisses lässt sich erst ermessen, wenn man die Abhängigkeit des gesammten versicherungstechnischen Systemes in analytischer Beziehung von dieser Curve in Betracht zieht und

die Consequenzen, welche hieraus resultiren, erwägt. Wir behalten uns vor, in einer nächsten Abhandlung diese Integration durchzuführen.

Auf gleichem Wege und durch entsprechende Anwendung obigen Resultates gelangen wir in ähnlicher Weise zur Curve der Lebenden, welche die Beziehung zwischen dem Alter x und den Ledenden L_x ausdrückt.

In analoger Weise zu diesem Vorgange gestaltet sich auch die Ermittlung jener Curven, welche die Beziehung zwischen dem Alter x und den discontirten Zahlen der Lebenden einerseits und dem Alter x und der Mise einer lebenslänglichen Leibrente M_x darstellen.

Bekanntlich besteht nämlich zwischen den discontirten Zahlen der Lebenden und den Misen einer lebenslänglichen Leibrente ein ähnliches Verhältniss wie zwischen den Lebenden und der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer, welches gleichfalls durch Vermittlung der das Alter repräsentirenden Hilfsvariablen x zur Geltung gelangt. Die in dieser Beziehung geltende Form lautet bekanntlich

h) $$D_x = \frac{e^{-\int \frac{dx}{M_x}}}{M_x}$$

und besitzt mit derjenigen in Form a) eine gleiche Beschaffenheit, so dass hier nach obigen Ausführungen ein vollständig analoges Resultat in Bezug auf die Gleichungen dieser Curven sich ergibt; das heisst die hieraus resultirenden Curvengleichungen werden die gleiche Beschaffenheit wie die früheren besitzen. Der bestehende Unterschied im Verlaufe der beiden Curvenpaare äussert sich also einzig und allein in den Werthen, welche den bezüglichen Constanten zukommen.

Hinsichtlich des Verlaufes der bezüglichen Curvenpaare ist es von besonderer Bedeutung, dass jene die Beziehung derselben kennzeichnenden Formen a) und h) ihre Giltigkeit in continuo bedingen, also nicht nur zwischen bestimmten Curventheilen den Anforderungen Rechnung tragen. Der Beweis hiefür ist in der Abhandlung »Untersuchungen über das Wesen der Invalidität vom Standpunkte des Absterbegesetzes« II. erbracht, indem hier die Uebereinstimmung dieser Beziehung mit derjenigen, welche die normale Beschaffenheit der Differentialgleichungen zweiter Ordnung im unbeschränkten Sinne bedingt, dargethan erscheint. Es wird nämlich festgestellt, dass jene zwischen L_x und w_x unter Vermittlung der Hilfsvariablen x bestehende Beziehung allgemein den Anforderungen in dieser Hinsicht genügt, so zwar, dass eine functionelle Bedingung, durch welche das Vorhandensein des hier obwaltenden Corretationsprincipes irgendwie begrenzt oder unterbrochen werden könnte, nicht vorhanden ist. Dieser Umstand ist es nun auch, welcher das Ergebniss unserer Untersuchungen zu einem besonders werthvollen macht.

Ueber die Wahrscheinlichkeit des zu erreichenden Zeitpunktes der Conversionsreife einer öffentlichen Schuld.

I.

In den letzten Jahrzehnten haben sich die Darlehensbedingungen für öffentliche Schulden in besonderer Weise zu Gunsten des Contrahenten verschoben. An die Stelle der früheren Prämissen sind andere getreten, welche in ihrer Art eine entgegengesetzte Wirkung auf die Beschaffenheit des Darlehensgeschäftes ausübend, eine förmliche Verschiebung des Interessenverhältnisses zwischen Schuldner und Gläubiger hervorrufen mussten. Während noch vor wenigen Jahrzehnten die Nachfrage nach Capital eine grössere war, als dessen Angebot, wodurch die Bedingungen einer Darlehenscontrahirung erschwert wurden, ist heute dieses Verhältniss ein umgekehrtes. Die Prämissen, welche zur Zeit der Contrahirung verschiedener älterer Darlehen bestanden haben, sind völlig andere geworden, indem jene Bedingungen, welche früher einen höheren Zinsfuss mit Hinblick auf die in demselben enthalten Risikoprämie, als gerechtfertigt erscheinen liessen, aufgehoben wurden. Dieser Umstand ist nun geeignet beim Schuldner das Verlangen nach einer entsprechenden Herabsetzung des Darlehenszinsfusses zu wecken. Derselbe gelangt zu der Erkenntniss, dass er auf Grund seines besser gewordenen Credites respective infolge des grösseren Capitalanbotes sich billigeres Geld zu beschaffen vermag. Und so befinden wir uns heute in einer Aera der Conversionen, welche als eine natürliche Folge des continuirlich sich abwickelnden Processes der Abnahme des Capitalsertrages angesehen werden kann.

Dieser Process vollzieht sich in stetiger Weise, indem das Coursniveau, von welchem die Rentabilitätsbedingungen abhängen, dem Nominalwerthe zustrebt, respective denselben hinter sich zurücklässt. Dieses Stadium der Rentenbewerthung ist nun dasjenige der Conversionsreife, da in demselben das Kennzeichen einer zur Zeit das normale Mass überbietenden Rentabilität sich äussert.

Erfolgt nun die Conversion, so wird natürlicherweise hiebei auf das fernere Sinken des Zinsfusses Rücksicht genommen und der herabgesetzte nominelle Zinsfuss derart gewählt, dass ein weiteres Conversionsbedürfniss nicht allzubald wieder eintrete. Die Folge hievon ist, dass der Emissionscours der neu contrahirten Anleihe entsprechend unter dem Nominalwerthe angesetzt werden muss, um den momentanen Rentabilitätsbedingungen zu entsprechen. Wohl kann die Neuemission eines zu convertirenden Anlehens auch über Pari erfolgen, wenn es die Verhältnisse erheischen, doch wollen wir uns auf den gegebenen Fall beschränken, welcher als typisch für alle möglichen Formen der Conversion angesehen werden mag.

Bei fortgesetzt sinkendem Zinsfusse wird nun der Spielraum, welcher zwischen dem Emissionscourse und dem Nominalwerthe besteht, nach und

nach wieder verringert, bis der Paricours abermals erreicht ist und die Frage einer neuerlichen Conversion in den Vordergrund tritt.

Dieses Schwinden des Spielraumes zwischen dem Emissionscourse und dem Nominalwerthe erfordert jedoch je nach Massgabe der Verhältnisse einen mehr oder weniger langen Zeitraum, welcher eben für den Eintritt einer neuerlichen Conversionsreife des Anlehens von Wichtigkeit ist.

Es kann für den Capitalisten offenbar nicht gleichgiltig sein, ob dessen erworbene Rentenobligation eine mehr oder weniger grosse Chance besitzt, den Paricours zu erreichen, insbesondere, wenn der Courswerth noch einen ansehnlichen Abstand vom Paricourse aufweist. Es ist daher von besonderem Interesse, die Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen eine schrittweise Annäherung des Marktpreises einer Rentenobligation zum Paricourse sich vollzieht. Es liesse sich wohl einwenden, dass dieser Process in seinem Wesen nicht controlirbar sei, weil hier verschiedene Umstände einwirken können, welche jedes Calcul umstossen. Wird jedoch erwogen, dass die Beschaffenheit einer soliden Capitalsanlage in erster Linie vom Gesichtspunkte ihrer Securität zu beurtheilen ist und dieser angemessen der Marktpreis in seiner Bewegung beeinflusst wird, wenn auch dessen eigentliche Regulirung durch Angebot und Nachfrage erfolgt, so muss die Voraussetzung zulässig sein, dass wahrscheinlicherweise der bisherige Verlauf der Coursbewegung, im weiteren Sinne aufgefasst, in der Zunkunft sich ähnlich gestalten dürfte.

Man muss in dieser Beziehung natürlicherweise von ephemeren Fluctuation der Course ganz absehen und bloss den Verlauf innerhalb einer längeren Zeitdauer ins Auge fassen, um in das Wesen dieser Sache näher einzudringen.

Der Process, welcher sich bezüglich der Rentabilitätsbedingungen des Capitales auf dem Weltmarkte vollzieht, kann durch einen willkürlich gewählten Zeitpunkt einer Conversion nicht unterbrochen werden und übt seinen Einfluss auch weiterhin auf den Marktpreis aus, weil die Ursachen, welche denselben bewirken, fortbestehen und daher in ihrer Consequenz eine bestimmte Continuität voraussetzen lassen.

Wenn wir daher diesbezüglich von einer Wahrscheinlichkeit sprechen, so sind in derselben die mehr oder weniger grossen Chancen gekennzeichnet, welche für das Eintreffen dieser Voraussetzung günstig sind. Nehmen wir zum Beispiel an, es wäre aus einem Beutel, in welchem sich drei weisse und eine schwarze Kugel befinden, eine Kugel zu ziehen, so wird die Chance, dass eine weisse Kugel gezogen wird, dreimal so gross sein als diejenige für eine schwarze Kugel oder mit anderen Worten, die Wahrscheinlichkeit eine weisse Kugel zu ziehen ist $^3/_4$ und diejenige für eine schwarze Kugel nur $^1/_4$. Wenn Jemand eine Speculation unternimmt, so wird er gleichfalls die Chancen für das Gelingen derselben erwägen, wenn er dies auch nicht in einer so systematischen Weise thut, wie

die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie bedingt. Jede Speculation die auf einem Calcul beruht, wird daher eine Voraussetzung zur Grundlage haben, welche das Mass der Wahrscheinlichkeiten für und gegen das Gelingen derselben in sich fasst, also in dem *gegenseitigen Abwägen* der günstigen und ungünstigen Chancen besteht.

Wenn nun Jemand eine gleiche oder ähnliche Speculation bereits einige Male unternommen hat und dieselbe öfter gelungen als misslungen ist, so wird er offenbar der günstigen Chance ein grösseres Vertrauen entgegenbringen, als dies der Fall wäre, wenn er das erste Mal sich in eine solche Speculation einlassen würde, d. h. mit anderen Worten die Zuversicht wächst mit dem wiederholten Eintreffen der Voraussetzungen und zwar im Verhältnisse zum Nichteintreffen derselben.

Hieraus lässt sich nun die [illegible] ziehen, dass auch die Tendenz nach welcher sich der Marktpreis einer Rente [illegible] einer längeren Dauer [illegible] bietet und in dieser Beziehung [illegible] welches [illegible] basirt [illegible]

[illegible] Jahres [illegible] wenigen [illegible] im nächsten Jahre [illegible] einen [illegible] höheren [illegible] durch [illegible] daher [illegible] Periode [illegible] innerhalb [illegible] Marktpreis [illegible] rung [illegible] stän[illegible] processes [illegible]

[illegible] versch[illegible] folgende [illegible] q [illegible] reife [illegible]

[illegible]

Es [illegible] eines Jahres [illegible]

[illegible]

oder mit anderen Worten, es besteht die Wahrscheinlichkeit, dass die Conversionsreife während der Frist von $1 - w_1$ Jahren nicht erreicht wird.

In analoger Weise muss die Wahrscheinlichkeit für die Erlangung der Conversionsreife während zweier aufeinanderfolgender Jahre durch den Ausdruck
$$w_2 = \frac{q_1 - q_3}{q_1 - p} \text{ sowie durch } 1 - w_2 = \frac{q_3 - p}{q_1 - p} = \frac{u_3}{u_1}$$
die Wahrscheinlichkeit für den entgegengesetzten Fall zur Darstellung gelangen, so dass, falls m aufeinanderfolgende Jahre in Betracht gezogen werden, sich für die Wahrscheinlichkeit des Nichteintrittes der Conversionsreife überhaupt die Relation
$$w = m - w_1 - w_2 - w_3 \ldots\ldots - w_m = \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_1} + \frac{u_4}{u_1} + \ldots + \frac{u_m}{u_1}$$
ergibt. Bezeichnet man nun die Zeitdauer überhaupt mit dem Buchstaben t und lässt diesen Process in continuo sich vollziehen, so gelangt man zu der geschlossenen Form
$$u = \frac{e^{-\int \frac{dt}{w}}}{w}$$
in welcher die wahrscheinliche Dauer zur Darstellung gelangt, während welcher das Nichteintreten der Conversionsreife den gegebenen Verhältnissen gemäss zu gewärtigen sein dürfte; und zwar ist derjenige Zeitpunkt, bis zu welchem diese Wahrscheinlichkeit anhält, dadurch gekennzeichnet, dass in demselben $q_m = p$ beziehungsweise $u_m = 0$ wird, worin sich der Umstand einer Uebereinstimmung der effectiven mit der nominellen Verzinsung äussert, also die Conversionsreife einzutreten vermag.

Aus obiger Form ergibt sich nun durch Transformation nachfolgende Beziehung
$$w = \frac{C - \int u\,dt}{u}$$
aus welcher auf die Beschaffenheit der Wahrscheinlichkeitsbedingungen gefolgert werden kann. In dem Quotienten der Summe der gegebenen Verhältnisse zwischen den aufeinanderfolgenden Differenzen der effectiven und nominellen Verzinsung und dem anfänglich resultirenden diesbezüglichen Verhältnisse drückt sich die wahrscheinliche Dauer aus, während welcher der Eintritt der Conversionsreife eines Darlehens nicht stattfindet. Der Charakter der entsprechenden Wahrscheinlichkeitscurve ist daher im Allgemeinen ein bestimmter und besteht in deren asymptotischen Annäherung gegen eine bestimmte Gerade.

Diese Annäherung nimmt jedoch je nach Massgabe der gegebenen Umstände einen mehr weniger raschen Verlauf, so dass die Projection dieser Curve auf jene Gerade, als Zeitmass aufgefasst, die Periode darstellt, nach welcher wahrscheinlicherweise die Conversionsreife eintritt. Nachdem jedoch aus den anfänglichen Krümmungsverhältnissen dieser Curve auf deren weiteren Verlauf annähernd geschlossen werden kann, so wird hiedurch dem Principe unserer Rechnung genüge geleistet.

Die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden als Element einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und die hieraus entspringenden Conclusionen.

II.

Auf Grundlage der bisherigen Ergebnisse lässt sich nun für die Beziehung zwischen dem Alter x und der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer w_x eine geschlossene algebraische Gleichung ableiten, welche allen Anforderungen mathematischer Zuverlässigkeit entspricht. Es kann sich hier nur um die Art handeln, in welcher die Integration der ermittelten Relation

$$w'_x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{w_x}{x+2C}\right)^2}$$

zur Durchführung gebracht wird, da die Irrationalität derselben eine solche im directen Sinne nicht zulässt.

Wir werden daher versuchen, durch geeignete Substitution zum Ziele zu gelangen und setzen zu diesem Zwecke den Ausdruck

$$\frac{x+2C}{4\,w_x} = tg\,u$$

darnach ergibt sich aus obiger Gleichung der Ausdruck

$$w'_x + \frac{3}{4} = \pm \frac{1}{4\,Sin\,u} \qquad \text{respective} \qquad dw_x = \frac{\pm 1 - 3\,Sin\,u}{4\,Sin\,u}\,dx$$

Nun ist aber

$$dx = 4\left(w_x \frac{du}{cos^2\,u} + tg\,u\,dw_x\right)$$

somit erhalten wir

$$dw_x = w_x \frac{\pm 1 - 3\,Sin\,u}{Sin\,u\,.\,Cos^2\,u}\,du + \frac{\pm 1 - 3\,Sin\,u}{Cos\,u}\,dw_x$$

und daraus durch entsprechende Anordnung

$$\frac{dw_x}{w_x} = \frac{(\pm 1 - 3\,Sin\,u)\,du}{Sin\,u\,.\,Cos\,u\,[3\,Sin\,u + Cos\,u \mp 1]}$$

mithin also

$$\text{I.} \qquad w_x = C_1 \cdot \theta^{\int \frac{(1 - 3\, Sin\, u)\, du}{Sin\, u \,.\, Cos\, u\, [3\, Sin\, u + Cos\, u - 1]}}$$

$$\text{II.} \qquad w_x = C_1 \cdot \theta^{-\int \frac{(1 + 3\, Sin\, u)\, du}{Sin\, u \,.\, Cos\, u\, [3\, Sin\, u + Cos\, u + 1]}}$$

Die Integration dieser beiden Integrale lässt sich nun in folgender Weise durchführen:

Bezeichnen wir die betreffenden Integrale der Kürze halber mit J_I beziehungsweise mit J_{II}, so erhalten wir folgende Relationen:

$$J_I = \int \frac{(1 - 3\, Sin\, u - Cos\, u + Cos\, u)\, du}{Sin\, u \,.\, Cos\, u\, [3\, Sin\, u + Cos\, u - 1]} = -\, l\, tg\, u - \int \frac{du}{Sin\, u\, [1 - Cos\, u - 3\, Sin\, u]}$$

$$J_{II} = -\int \frac{(1 + 3\, Sin\, u + Cos\, u - Cos\, u)\, du}{Sin\, u \,.\, Cos\, u\, [3\, Sin\, u + Cos\, u + 1]} = -\, l\, tg\, u + \int \frac{du}{Sin\, u\, [1 + Cos\, u + 3\, Sin\, u]}$$

Substituiren wir nun hierin

$$tg\, \frac{1}{2} u = t\,, \quad \text{so folgt} \quad Sin\, u = \frac{2t}{1 + t^2}\,, \quad Cos\, u = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{und} \quad du = \frac{2\, dt}{1 + t^2}$$

und es ergibt sich somit

$$J_I = l\, (1 - t^2) - lt - \frac{1}{2} \int \frac{(1 + t^2)\, dt}{t^2 (t - 3)} = l\, \frac{1 - t^2}{(t - 3)^{\frac{5}{9}} \,.\, t^{\frac{17}{18}}} - \frac{1}{6t} + \text{Const.}$$

$$J_{II} = l\, (1 - t^2) - lt + \frac{1}{2} \int \frac{(1 + t^2)\, dt}{t\, (3t + 1)} = l\, \frac{1 - t^2}{(3t + 1)^{\frac{5}{9}} \,.\, t^{\frac{1}{2}}} + \frac{t}{6} + \text{Const.}$$

In Consequenz dessen ergeben sich für w_x die beiden Werthe

$$\text{k)} \quad \text{I.} \quad w_x = C_1 \frac{1 - t^2}{(t - 3)^{\frac{5}{9}} \,.\, t^{\frac{17}{18}}}\, \theta^{-\frac{1}{6t}} \quad \text{und II.} \quad w_x = C_1 \frac{1 - t^2}{(3t + 1)^{\frac{5}{9}} \,.\, t^{\frac{1}{2}}}\, \theta^{\frac{t}{6}}$$

wobei jene dem Intergrale entsprechende jeweilige Constante mit C_1 verschmilzt.

Nachdem nun hierin $t = tg\, \frac{1}{2}\, u$ ist und unserer ursprünglichen Voraussetzung gemäss $tg\, u = \frac{x + 2C}{4 w_x}$ angenommen wurde, so ergibt sich

l) $$tg\, u = \frac{x + 2C}{4\, w_x} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

und demzufolge

m) $$x + 2C = 8\, \frac{t}{1 - t^2}\, w_x$$

so dass sich für die Abscisse x dieser Curven die Relationen

n) I. $$x = 8C_1 \frac{t^{\frac{1}{18}}}{(t-3)^{\frac{5}{9}}} \cdot e^{-\frac{1}{6t}} - 2C$$ und II. $$x = 8\, C_1 \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(3t+1)^{\frac{5}{9}}}\, e^{\frac{t}{6}} - 2C$$

ergeben und es gelten demgemäss für die Beziehung zwischen dem Alter x und der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer w_x die durch die vermittelnde Variable t bestimmten Gleichungen I. und II.*)

Es handelt sich nun darum, die Constanten C und C_1 zu bestimmen, was durch geeignete Substitution der Ordinaten einiger gegebenen Punkte erreicht wird. Es werden demgemäss je nach Massgabe der in Betracht gezogenen Sterbetafel die Constanten eine entsprechende Aenderung erfahren. Das allgemeine Gesetz aber, nach welchem die Absterbeordnung erfolgt, ist durch die Function dieser Gleichungen zur Darstellung gebracht.

Im Wesen selbst bedeutet dieses Ergebniss einen auf analytischem Wege sich vollziehenden Ausgleichungsprocess der Sterblichkeitscurve, indem durch Substitution der thatsächlichen Sterbenswahrscheinlichkeiten und der entsprechenden Alter in diese Gleichung eine Reihe in ihren Werthen nur beiläufig miteinander übereinstimmender Constanten sich ergibt, worin die eigentliche Abweichung vom continuirlichen Verlauf des Absterbegesetzes sich äussert. Da jedoch die Ursache dieser Abweichung, vom mathematisch-statistischen Gesichtspunkte aufgefasst der Unzulänglichkeit des statistischen Materiales zugeschrieben werden muss, welche in der mathematischen Ausgleichung ihre Correctur findet, so erfolgt eine solche im vorliegenden Falle dadurch, dass für die sich jeweilig ergebende Reihe von nicht gänzlich in ihrem Werthe miteinander übereinstimmenden Constanten das entsprechende arithmetische Mittel ermittelt wird und dieses als eigent-

---

*) Im Falle $tg\, u = -\frac{x + 2C}{4\, w_x}$ vorausgesetzt wird, ergibt sich

I. $$\begin{cases} w_x = C_1 \dfrac{1 - t^2}{(3t-1)^{[illegible]} \cdot t^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{t}{6}} \\ x = -8C_1 \dfrac{t^{\frac{1}{2}}}{(3t-1)^{\frac{5}{[illegible]}}} \cdot e^{-\frac{t}{6}} - 2C \end{cases}$$ und II. $$\begin{cases} w_x = C_1 \dfrac{1 - t^2}{(t+3)^{[illegible]} \cdot t^{[illegible]}}\, e^{\frac{1}{[illegible]}} \\ x = -8C_1 \dfrac{t^{[illegible]}}{(t+3)^{[illegible]}}\, e^{\frac{1}{[illegible]}} - 2C \end{cases}$$

und dementsprechend eine dieser Bedingung angemessene Modification der diesbezüglichen Functionen. Inwieferne jedoch die eine oder die andere Vorraussetzung den praktischen Anforderungen Genüge zu leisten vermag, werden die weiteren Untersuchungen in dieser Beziehung ergeben.

liche Constante der ausgeglichenen Wahrscheinlichkeitscurve aufgefasst wird. Auf die Curve der Lebenden äussert sich der Einfluss dieses Processes thatsächlich derart, wie dies den wissenschaftlichen Anforderungen der Ausgleichsmethode entspricht, weil diejenige Function, welche die Continuität der Curve der Lebenswahrscheinlichkeiten bedingt, hier bloss im übertragenen Sinne zur Geltung gelangt, indem dieselbe durch die arithmetische Ausgleichung der Constante dieser Cuvre nur in facultativer Weise auf die Curven der Lebenden einwirkt, so dass hiedurch thatsächlich dem eigentlichen Wesen der mathematischen Ausgleichung Rechnung getragen wird.

Dies geht aus der Relation hervor, welche zwischen der Curve der Lebenswahrscheinlichkeiten und derjenigen der Lebenden besteht.

Die Form für die Curve der Lebenden ist:

$$L_x = \frac{e^{-\int \frac{dx}{w_x}}}{w_x}$$

worin

$$\frac{dx}{w_x} = 4 \frac{du}{\cos^2 u} + tg u \frac{dw_x}{w_x}$$

Drückt man nun rechterhand den Ausdruck mit Hilfe der gegebenen Relationen durch eine reine Function von t aus, so lässt sich das Integrale im Exponenten dieser Form lösen, so dass man nach weiterer Substitution von w_x durch die entsprechende Function von t auch für L_x eine algebraische Gleichung erhält.

Wohl gestaltet sich die Beziehung zwischen dem Alter x und den Lebenden L_x gleichfalls transcendent, weil t als Function zweier Variablen, nämlich von x und w_x hier als vermittelnde Variable fungirt, doch kann den Anforderungen immerhin vollends Genüge geleistet werden, weil auch die Abscisse x vollständig durch diese vermittelte Variable t ausgedrückt erscheint.

Der bekannte Umstand, dass x als gemeinsame Abscisse für die Curve der Lebenswahrscheinlichkeiten und die Curve der Lebenden fungirt, gestattet es, die willkürliche Constante C beiden Curven gleichwerthig anzupassen, so dass in den entsprechenden Ordinaten beider Curven zugleich eine Handhabe besteht, um Fehler in der Ausgleichung zu vermeiden.

Diese Ausführungen dürften hinreichen, um den Begriff des diesbezüglichen Ausgleichungsprocesses festzustellen und die Wirkung, welche die Constante auf die Function dieser Wahrscheinlichkeitscurven ausübt, zu kennzeichnen. Auf welche Weise dies praktisch zur Geltung gelangt, mag in der nächsten Abhandlung über dieses Thema zur Erörterung kommen.

Ueber die Wahrscheinlichkeit des zu erreichenden Zeitpunktes der Conversionsreife einer öffentlichen Schuld.

II.

Die Ausführungen in der vorigen Abhandlung haben in allgemeiner Form den Weg angedeutet, welcher bezüglich dieser Frage einzuschlagen ist, um annäherungsweise den Bedingungen derselben zu entsprechen. Im Wesen selbst können die Anforderungen, welche an das Resultat der Rechnung gestellt werden, bloss im Rahmen des hier zugrunde gelegten Principes sich bewegen und kann natürlicherweise, wie bei jedem Wahrscheinlichkeitscalcul, von einer Zuverlässigkeit keine Rede sein. Die Ergebnisse bilden bloss die Resultirende der vorhandenen Chancen für das Eintreten des in Betracht gezogenen Ereignisses. Dies zeigt auch der Process, welcher sich diesbezüglich in einem gegebenen speciellen Falle vollzieht.

Nehmen wir beispielsweise an, dass in jenem Zeitpunkte, in welchem die Beobachtung beginnt, ein bestimmtes Papier, welches mit einer $3^1/_2$percentigen nominellen Verzinsung und einem Nominalwerthe von 100 ausgestattet ist, mit dem Marktpreise von 82 zu haben wäre, so wird sich dessen effectiver Zinsfuss thatsächlich etwa auf 4·27 Percent stellen. Hat sich nun der Marktpreis in den einzelnen beobachteten Jahren durchschnittlich auf $83^1/_2$, 85, $85^1/_2$, 86, 88 und 90 gestellt, so war die effective Verzinsung folgende, und zwar im ersten Jahre 4·191 Percent, im zweiten 4·12 Percent, im dritten 4·1 Percent, im vierten 4·07 Percent, im fünften 3·977 Percent und im sechsten schliesslich 3·889 Percent.

Es ist somit die Wahrscheinlichkeit der zu erreichenden Conversionsreife im ersten Jahre

$$w_1 = \frac{q_1 - q_2}{q_1 - p} = \frac{4·27 - 4·191}{4·27 - 3·5} = 0·1026$$

und daher die Wahrscheinlichkeit, dass die Conversionsreife im ersten Jahre **nicht** erreicht wird

$$1 - w_1 = \frac{q_2 - p}{q_1 - p} = \frac{u_2}{u_1} = 0·8974.$$

Analog zu diesem ergeben sich dann die Werthe der Wahrscheinlichkeiten, dass die Conversionsreife in den nächsten Jahren nicht erreicht wird, und zwar ist

$$\frac{u_3}{u_1} = 0·8052\ ,\ \frac{u_4}{u_1} = 0·7792\ ,\ \frac{u_5}{u_1} = 0·7403\ ,\ \frac{u_6}{u_1} = 0·6195 \text{ und } \frac{u_7}{u_1} = 0·5052.$$

Hieraus ist zu entnehmen, dass mit dem steigenden Marktpreise die Wahrscheinlichkeit des Nichterreichens der Conversionsreife sich im Abnehmen befindet, so dass naturgemäss die Wahrscheinlichkeit des Erreichens der Conversionsreife sich steigert.

In Consequenz dessen wird, sobald sich der Marktpreis dem Nominalwerthe nähert, die Wahrscheinlichkeit des Nichterreichens der Conversions-

reife gegen Null verschwinden, d. h. die Wahrscheinlichkeitscurve wird der Berührung mit der Abscissenaxe immer näher kommen und somit die Wahrscheinlickkeit des Eintreffens der Conversionsreife ihrem Maximum 1 zustreben.

Diese Eventualität trifft in dem Momente ein, wo $q_m = p$ wird, d. h., wenn die effective Verzinsung der nominellen gleich wird, respective wenn der Marktpreis den Nominalwerth erreicht. Es wird also in diesem Falle $1 - w_m = \frac{u_m}{u_1} = 0$ werden, woraus hervorgeht, dass hier die zweite Grenze der durch die bezügliche Wahrscheinlichkeitscurve eingeschlossenen Fläche gegeben ist. Bezeichnen wir daher die Summe der unbekannten Wahrscheinlichkeiten der ferneren Jahre mit $(w)_x$, so ergeben sich folgende Resultate:

Die Ordinate der Wahrscheinlichkeitscurve	für die Abscisse $t = 1$ ist	$w = (w)_x + 4\cdot3468$
	» » » $t = 2$ »	$w = (w)_x + 3\cdot4494$
	» » » $t = 3$ »	$w = (w)_x + 2\cdot6442$
	» » » $t = 4$ »	$w = (w)_x + 1\cdot8650$
	» » » $t = 5$ »	$w = (w)_x + 1\cdot1247$
	» » » $t = 6$ »	$w = (w)_x + 0\cdot5052$

Es ist daher jenes Segment dieser Curve, dessen Basis mittelst einer durch den Punkt (t_6, w) zur Abscissenaxe parallel gehenden Geraden gekennzeichnet ist, gegeben und soll mit Hilfe desselben der fernere Verlauf der Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden.

In dem Umstande, dass die Gleichung der Curve dargestellt werden kann auf Grund jener das Wesen derselben bedingenden Relation, welche in der vorigen Abhandlung verzeichnet ist, mag diese Aufgabe ihre Lösung finden.

Aus jener Relation ergibt sich nämlich die interessante Eigenschaft dieser Curve, dass das Product des die Wahrscheinlichkeiten bedingenden Elementes u mit der Wahrscheinlichkeitssumme w die Fläche des unbekannten Curvenabschnittes repräsentirt, d. h.

$$u w = C - \int u dt.$$

Und zwar gilt dies für jeden beliebigen Punkt dieser Curve, so dass es möglich wird, bei einer willkürlichen Unterbrechung der Beobachtungen auf den ferneren Wahrscheinlichkeitsverlauf zu schliessen. Natürlich wird die Verlässlichkeit dieser Schlüsse von der Anzahl der Beobachtungen abhängen und demgemäss ein durch die Beobachtungen bestimmter grösserer Curventheil mehr Anhaltspunkte für den ferneren Verlauf der Wahrscheinlichkeiten bieten. Diese Thatsache äussert sich nun in dem Umstande, dass die Verbindungslinie der Curvenpunkte, welche der ersten und letzten Beobachtung entsprechen, in ihrem Schnitte mit der Abscissenaxe den wahrscheinlichen Berührungspunkt derselben mit der Curve kennzeichnet. Die Lage dieser Curvenpunkte wird von der Anzahl der Beobachtungen und deren Ergebniss beeinflusst und die Ordinaten derselben differiren um die

jeweilige Summe der beobachteten Wahrscheinlichkeiten, welche also auch die Lage des Berührungspunktes bedingen. Da nun mit diesem Punkte die Wahrscheinlichkeit der Conversionsreife in ihrem Maximum zusammenfällt, so ist damit ein wichtiger Anhaltspunkt für die Lösung unserer Aufgabe gegeben.

Es ist nämlich infolge dessen der jeweilige Winkel bestimmt, unter welchem diese Verbindungslinie zur Abscissenaxe geneigt ist, so dass sich deren Projection auf dieselbe bestimmen lässt, sobald der Abstand der Segmentbasis von der Abscissenaxe ermittelt werden kann.

Hier mag nun die Annahme, dass die Gesammtsumme der Wahrscheinlichkeiten sich zur Summe der beobachteten Wahrscheinlichkeiten verhält wie der Abstand des ursprünglichen Marktpreises vom Nominalwerthe zu demjenigen Curszuwachs, welcher sich während der Beobachtungsperiode ergeben hat, ein den Anforderungen annähernd entsprechendes Resultat bieten, da thatsächlich ein solches Verhältniss rechnungsmässig, wenn auch bloss in approximativem Sinne besteht. Auch kann der etwaige kleine Fehler, welcher durch diese Annahme entstehen könnte, umsoweniger von Bedeutung sein, als auch der viel complicirtere analytische Weg nicht zu ganz genauen Resultaten führen kann, weil in den gegebenen Beobachtungszahlen zu geringe Anhaltspunkte für eine ganz genaue Bestimmung der Constante C, d. i. die von der Curve eingeschlossene Gesammtfläche, vorhanden sind, so dass hier mit einer gewissen Schwankung in den Resultaten von vornherein gerechnet werden muss.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten des Nichterreichens der Conversionsreife innerhalb der Beobachtungsperiode von 6 Jahren ist

$$6 - w_1 - w_2 - w_3 - w_4 - w_5 - w_6 = 4{\cdot}3468$$

demnach, da die Differenz zwischen dem ursprünglichen Marktpreise 82 und dem Nominalwerthe 100 gleich 18 und der Curszuwachs während der Beobachtungsperiode gleich 8 ist, folgende Relation zur Geltung gelangt

$$\frac{(w)_x + 4{\cdot}3468}{4{\cdot}3468} = \frac{9}{4}$$

und somit ist $(w)_x = 5{\cdot}4335$.

Daher die Ordinaten für die Wahrscheinlichkeitscurve

für die Abscisse	$t = 1$	,	$w = 9{\cdot}7803$
» » »	$t = 2$	,	$w = 8{\cdot}8829$
» » »	$t = 3$	,	$w = 8{\cdot}0777$
» » »	$t = 4$	,	$w = 7{\cdot}2985$
» » »	$t = 5$	,	$w = 6{\cdot}5582$
» » »	$t = 6$	,	$w = 5{\cdot}9387$
	⋮		⋮
	$t = n$		$w = 0$

Um nun n, das ist den Zeitpunkt der Conversionsreife zu bestimmen, ist es nothwendig, den Neigungswinkel der Verbindungslinie zwischen den beiden Curvenpunkten der ersten und letzten Beobachtung festzustellen, da mittelst desselben auch der Schnittpunkt dieser Linie mit der Abscissenaxe, in welchem bekanntlich $w = 0$ wird, fixirt wird.

Es bildet nun das Verhältniss zwischen den Segmenthöhen im ersten und letzten Beobachtungsjahre und der Basis des Segmentes die Tangente jenes Winkels α, welchen diese Linie mit der Abscissenaxe einschliesst, d. h.

$$tg\ \alpha = \frac{4{\cdot}3468 - 0{\cdot}5052}{6} = 0{\cdot}64026\,.$$

Demzufolge ergibt sich die Projection dieser Linie auf die Abscissenaxe, indem man die Summe der Wahrscheinlichkeiten im ersten Jahre mit der Cotangente dieses Winkels multiplicirt, d. h.

$$n = 9{\cdot}7803\,.\,cotg\ \alpha = 15{\cdot}275,$$

daher ist die wahrscheinliche Dauer bis zur Erreichung der Conversionsreife vom Zeitpunkte der letzten Beobachtung 9·275 Jahre. Man gelangt also auf kurzem Wege zu der ziffermässigen Feststellung derjenigen Frist, welche bis zur Erreichung der Conversionsreife wahrscheinlicherweise ablaufen dürfte.

Neben dem allgemeinen Interesse, welches diese Frage für die finanzielle Speculation besitzt, besteht deren besonderer Zweck in der Feststellung jener Bedingungen, welche bei der gegenwärtig stetig abnehmenden Rentabilität des Capitals für eine rationelle Handhabung der versicherungstechnischen Grundlagen von Belang sind, um das Gleichgewicht zwischen der Leistung des Versicherten und der Gegenleistung des Versicherers während jener langen Dauer aufrechtzuerhalten, welche durch einen Lebensversicherungsvertrag bedingt ist.

Sobald nämlich annähernd jener Process gekennzeichnet zu werden vermag, welcher der Verringerung der Capitalsrentabilität zugrunde liegt, d. h. die Anhaltspunkte ermittelt werden können, welche die Bedingungen der wahrscheinlichen Gestaltung des Marktpreises für das dauernde Bezugsrecht einer bestimmten Rente charakterisiren, sind auch jene Grundlagen gegeben, auf welchen die Berechnung einer dauernd ausreichenden Lebensversicherungsprämie bewerkstelligt werden kann.

Das Wahrscheinlichkeitscalcul, mittelst dessen hier der fernere Verlauf der Rentabilitätsbedingungen mathematisch dargestellt wird, ist also geeignet, zu gleicher Zeit jene Verzinsungsgrundlage, auf welcher das versicherungstechnische Calcul sich vollzieht, entsprechend zu reguliren, so dass dieselbe während der ganzen Versicherungsperiode den Anforderungen Rechnung zu tragen vermag.

Naturgemäss kann jener versicherungstechnisch zugrunde gelegte Zinsfuss, welcher durch diesen Process regulirt wird, nur ein durchschnittlicher sein, und zwar erfolgt dessen Feststellung im Sinne einer rechnungsmässigen Ausgleichung des zumeist unregelmässigen Verlaufes der Rentabilitätsabnahme, indem der zur Zeit des Versicherungsabschlusses zulässige Zinsfuss auf seine zukünftige Gestaltung geprüft und dementsprechend auf das bezügliche Niveau eines dauernd zweckdienlichen Ausmasses gebracht wird.

Auf diese Weise wird es möglich, auf eine längere Dauer dem schädlichen Einflusse der Veränderlichkeit der Rentabilitätsbedingungen auf die Lebensversicherung entgegenzuwirken und den Folgen unvorhergesehener Wirkungen desselben rechtzeitig vorzubeugen.

Die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden als Element einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und die hieraus entspringenden Conclusionen.

III.

Bevor wir auf die praktische Anwendung jener Form, welche die Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer analytisch darstellt, übergehen, wird es mit Rücksicht auf die für die Bestimmung der Constanten belangreichen Bedingungen sich als zweckmässig erweisen, auch die Gleichung für die Curve der Lebenden in geschlossener Form vorerst zu ermitteln.

Auf diese Weise gelangen wir nämlich zu weiteren Anhaltspunkten für die richtige Beurtheilung des Verlaufes dieser beiden von einander abhängigen Linien und werden zugleich in die Lage gesetzt, die Genauigkeit und Verlässlichkeit unserer Resultate durch entsprechende Versuche gegenseitiger Uebereinstimmung derselben zu prüfen.

Insbesondere der Umstand der gemeinsamen Abscisse der beiden Curven bietet eine werthvolle Handhabe, um bezüglich der Feststellung der entsprechenden Constanten leichter zu einem Resultate zu gelangen, was umso willkommener ist, als die transcendente Beschaffenheit der gegebenen Formen sonst eine äusserst complicirte Ermittlung derselben voraussetzt. Auch muss es von Interesse sein, das Wesen der beiden, hier einem bestimmten Gesetze unterworfenen Wahrscheinlichkeiten in ihrem Zusammenhange einer wissenschaftlichen Beobachtung zu unterziehen, da vielleicht auf diesem Wege manche bloss empirisch wahrgenommene Erscheinung ihre wissenschaftliche Erklärung finden dürfte. Wir werden deshalb auf ähnlichem Wege wie bei der ersteren Curve mittelst Integration der entsprechenden Differentialfuntionen hier zum Ziele zu gelangen suchen.

Wie bekannt, gilt für die Beziehung der beiden Curven die Form

o) $$L_x \,.\, w_x = e^{-\int \frac{dx}{w_x}}$$

worin den festgestellten Resultaten gemäss

$$\frac{dx}{w_x} = 4\left(\frac{du}{Cos^2 u} + tg\, u\, \frac{dw_x}{w_x}\right)$$

bedeutet.*) Hieraus ergibt sich nun durch entsprechende Substitution die Form

p) $$\frac{dx}{w_x} = \frac{4\, du}{Cos\, u\, (3\, Sin\, u + Cos\, u \mp 1)}$$

*) In der vorigen Abhandlung fehlen infolge eines Druckfehlers in der bezüglichen Relation die beiden Klammern.

welche mit Rücksicht auf die bekannte Modification, nach welcher $tg\, \frac{1}{2}\, u = t$ gesetzt wurde, in die beiden Gleichungen

$$\text{q)} \quad \frac{dx}{w_x} = \frac{4(1+t^2)\,dt}{(t^2-1)(t-3)\,t} \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{w_x} = -\frac{4(1+t^2)\,dt}{(t^2-1)(3t+1)}$$

übergeht und demzufolge zu den beiden Resultaten

$$\text{r)} \quad e^{-\int \frac{dx}{w_x}} = C_2 \cdot \frac{(t-1)(t^2-1)}{t^{\frac{4}{3}}(t-3)^{\frac{5}{3}}} \quad \text{respective} \quad e^{-\int \frac{dx}{w_x}} = C_2\, \frac{(t+1)(t^2-1)}{(3t+1)^{\frac{5}{3}}}$$

führt. Der Form o) gemäss gelangen wir schliesslich unter Hinzuziehung der beiden Ausdrücke k) zu den Gleichungen für L_x

$$\text{s)} \quad \text{I.} \quad L_x = C_3 \cdot \frac{(t-1)\, e^{\frac{1}{6t}}}{t^{\frac{7}{18}} \cdot (t-3)^{\frac{10}{9}}} \quad \text{und II.} \quad L_x = C_3\, \frac{(t+1)\, t^{\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{t}{6}}}{(3t+1)^{\frac{10}{9}}}$$

worin der Werth von $-\frac{C_2}{C_1} = C_3$ bedeutet. Mit diesen correspondiren so dann die Abscissenwerthe der vorigen Curven

$$\text{v)} \quad \text{I.} \quad x = 8\,C_1\, \frac{t^{\frac{1}{18}}}{(t-3)^{\frac{5}{9}}} \cdot e^{-\frac{1}{6t}} - 2C \quad \text{und II.} \quad x = 8\,C_1\, \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(3t+1)^{\frac{5}{9}}} \cdot e^{\frac{t}{6}} - 2C$$

so dass hiedurch die Curve der Lebenden in der gleichen vollkommen bestimmten Weise dargestellt erscheint, wie in der vorigen Abhandlung diejenige der Lebenswahrscheinlichkeiten.

Die Form o) liefert nun auch die entsprechende Handhabe zur Flächenberechnung der Curve der Lebenden. Aus dieser Form

$$L_x = \frac{e^{-\int \frac{dx}{w_x}}}{w_x} \quad \text{ergibt sich nämlich} \quad \int L_x\, dx = F - e^{-\int \frac{dx}{w_x}} = F - L_x \cdot w_x$$

worin F die constante Gesammtfläche, welche von der Curve und den beiden Ordinatenaxen eingeschlossen ist, bezeichnet, während $L_x \cdot w_x$ denjenigen variablen Flächentheil der Curve repräsentirt, welche von einem gegebenen Punkte der Curve an bis zur natürlichen Grenze derselben sich ergibt.

Dieser letzteren Gleichung gemäss müssen daher, wenn der mathemaischen Verlässlichkeit unserer Rechnung Genüge geleistet sein soll, die Relationen

$$\int L_x\, dx = 4\,C_2 \int \frac{(t^2+1)(t-1)}{t^{\frac{7}{3}}(t-3)^{\frac{8}{3}}}\, dt = F - C_2\, \frac{(t^2-1)(t-1)}{t^{\frac{4}{3}}(t-3)^{\frac{5}{3}}}$$

respective

$$\int L_x\, dx = -4\,C_2 \int \frac{(t^2+1)(t+1)}{(3t+1)^{\frac{8}{3}}}\, dt = F - C_2\, \frac{(t^2-1)(t+1)}{(3t+1)^{\frac{5}{3}}}$$

Geltung besitzen, was auch thatsächlich der Fall ist, so dass hiedurch der rechnungsmässige Nachweis für die Richtigkeit und Genauigkeit unserer

wissenschaftlichen Ableitung geboten wird. Auch jene aus den bezüglichen Formen sich ergebende Corelation zwischen den einzelnen in Rechnung kommenden Factoren lässt in dieser Hinsicht interessante Schlüsse zu. So ergeben sich durch entsprechende Anordnung die Relationen

y) $$\frac{dl\,L_x}{dl\,(x+2\,C)} = \frac{t+1}{t-1} \quad \text{oder} \quad \frac{dl\,L_x}{dl\,(x+2\,C)} = \frac{t-1}{t+1}$$

sowie die für das algebraische Verhältniss zwischen L_x und w_x interessanten Formen

z) $$L_x = w_x^2 \cdot \frac{k \,.\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2\,t}} \,.\, t^{\frac{3}{2}}}{(t-1)\,(t+1)^2} \quad \text{beziehungsweise} \quad L_x = w_x^2 \cdot \frac{k \,.\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \,.\, t^{\frac{3}{2}}}{(t-1)^2\,(t+1)}$$

in denen k als Constante fungirt. Es handelt sich nun darum, die Anhaltspunkte für die Feststellung der Beschaffenheit der einzelnen Resultate zu ermitteln. Zu diesem Behufe ist es nothwendig, über die Lage dieser Curven sich näheren Aufschluss zu verschaffen und eine entsprechende Untersuchung der markanten Punkte derselben vorzunehmen.

In dieser Beziehung springt in erster Linie die Frage der Wendepunkte ins Auge und ist es daher geboten, den Werth des zweiten Differentialquotienten dieser Curven einer näheren Beurtheilung zu unterwerfen.

Der zweite Differentialquotient für die Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer ist durch den Ausdruck

α) $$\frac{d^2 w_x}{dx^2} = \frac{1}{32\,.\,C_1} \cdot \frac{(t^2-1)\,(t-3)^{\frac{14}{9}}}{(t^2+1)\,t^{\frac{1}{18}}} \,.\, \mathrm{e}^{\frac{1}{6\,t}}$$

beziehungsweise

β) $$\frac{d^2 w_x}{dx^2} = \frac{1}{32\,.\,C_1} \cdot \frac{(t^2-1)\,(3\,t+1)^{\frac{14}{9}}}{(t^2+1)\,t^{\frac{3}{2}}} \,.\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{6}}$$

gegeben, so dass für den Fall, in welchem der Werth $\frac{d^2 w_x}{dx^2} = 0$ supponirt wird, sich diejenigen Werthe von t ergeben, welche Wendepunkten entsprechen, und zwar werden für die Form α) die Werthe $t = \pm 1$ oder $t = 3$, für die Form β) hingegen $t = \pm 1$ oder $t = -\frac{1}{3}$ diesbezüglich Geltung besitzen.

Ferner ist der zweite Differentialquotient für die Curve der Lebenden durch die respectiven Ausdrücke

γ) $$\frac{d^2 L_x}{dx^2} = \frac{k}{32} \cdot \frac{(t-1)\,(t-3)\,t^{\frac{1}{2}} \,.\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2\,t}}}{1+t^2} \quad \text{und} \quad$$ δ) $$\frac{d^2 L_x}{dx^2} = \frac{k}{32} \cdot \frac{(t+1)\,(3\,t+1) \,.\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{(1+t^2)\,t^{\frac{1}{2}}}$$

gegeben, infolge dessen also analog für den Fall $\frac{d^2 L_x}{dx^2} = 0$ die den bezüglichen Wendepunkten entsprechenden Werthe von t resultiren, und zwar erhalten wir für die Form γ) die Werthe $t = 1$ und $t = 3$; hingegen für für die Form δ) die Werthe $t = -1 \quad t = -\frac{1}{3}$.

Daraus geht hervor, dass die Wendepunkte beider Curven gleichen Werthen von t entsprechen. Es ist nun die weitere Frage, welchen Neigungswinkel die Curven in ihren beiden Wendepunkten besitzen.

Diesbezüglich bedarf es für die Curve der Lebenden der Ermittlung der entsprechenden Differentialquotienten. Dieselben gelangen nun in

$$\frac{d L_x}{dx} = -\frac{C_3}{8 C_1} \cdot \frac{(t+1) \Theta^{\frac{1}{3t}}}{t^{\frac{4}{9}} (t-3)^{\frac{5}{9}}} \text{ respective } \frac{d L_x}{dx} = \frac{C_3}{8 C_1} \cdot \frac{(t-1) \Theta^{-\frac{t}{3}}}{(3t+1)^{\frac{5}{9}}}$$

zur Darstellung, wobei in die erstere Form die Werthe $t = 1$ beziehungsweise $t = 3$, in die zweite, die Werthe $t = -1$ oder $t = -\frac{1}{3}$ zu substituiren sind. Für die positive beziehungsweise negative Einheit ergeben nun diese Differentialquotienten endliche Werthe, während die beiden letzteren Zahlen unendliche Werthe liefern. Daraus geht hervor, dass in dem einen Wendepunkte die Tangente unter dem Winkel von 90° die Curve der Lebenden berühren wird, und zwar im Unendlichen, da in diesem Falle sowohl die Ordinate L_x, als auch die Abscisse x unendlich wird. Substituiren wir die Werthe $t = 1$ beziehungsweise $t = -1$ in die correspondirenden Gleichungen für L_x, so ergibt sich ferner, dass in diesem Falle $L_x = 0$ wird, was die Bedeutung hat, dass diese Curve in ihrem zweiten Wendepunkte in der Abscissenaxe liegt und zu derselben unter jenem Winkel, dessen Tangente durch den endlichen Werth des Differentialquotienten zur Darstellung gelangt, geneigt ist.

In der gleichen Weise lässt sich die Lage der Curve der Lebenswahrscheinlickkeiten bestimmen. Gemäss den Relationen f), welche gleichfalls mit einer willkürlichen Constante h ausgestattet werden müssen und daher lauten

$$\frac{dw_x}{dx} = h\left(\frac{(1+t)^2}{8t} - 1\right) \quad \text{respective} \quad \frac{dw_x}{dx} = h\left(-\frac{(1-t)^2}{8t} - 1\right)$$

ist für die Werthe $t = +1$ beziehungsweise $t = -1$ der Neigungswinkel der Tangente in dem betreffenden Wendepunkte $arc\, tg\, (-\frac{1}{2})\, h$, und zwar wird die Curve in diesem Wendepunkte ebenfalls von der Abscissenaxe geschnitten, da die Ordinate w_x für diese Werthe gleich 0 wird. Jener den Werthen $t = 3$ beziehungsweise $t = -\frac{1}{3}$ entsprechende Wendepunkt dieser Curve liegt ebenfalls im Unendlichen und ist die demselben entsprechende Tangente durch den Winkel $arc\, tg\, (-\frac{1}{3})\, h$ gekennzeichnet.

Die hier in Betracht kommende willkürliche Constante h ist also von vornherein in der Relation f) vermöge deren Allgemeinheit zu berücksichtigen, so dass diese eigentlich lauten muss

$$w'_x = h\left[-\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{w_x}{x+2C}\right)^2}\,\right]$$

Wir gelangen daher zu folgender Conclusion. Da die Abscisse beiden Curven gemeinschaftlich ist und die in der Abscissenaxe liegenden Wendepunkte derselben gleichen Werthen von t entsprechen, so ist auch der Schnittpunkt beider Curven mit der Abscissenaxe ein gemeinsamer.

Die Coursreserve als Präventivmittel gegen die Schwankungen der Capitalsrentabilität infolge sinkenden Zinsfusses.

I.

Der jeweilige Marktpreis eines Anlagepapieres hängt einerseits von dessen Securität, andererseits von dem Stande und der zur Zeit vorhandenen durchschnittlichen Beschaffenheit der Capitalsrentabilität ab. Der effective Zinsfuss desselben erfährt durch die Veränderung dieses Preises die relative Anpassung an den Massstab der jeweiligen Verzinsungsbedingungen.

Diese Veränderlichkeit der Capitalsrentabilität übt ihre Wirkung nach verschiedenen Richtungen hin aus. Solange der nominelle Zinsfuss eines Anlagepapieres aufrecht bleibt, wird dessen stetiger, zu einem bestimmten Marktpreise erworbener Besitz von dieser Veränderlichkeit unberührt bleiben, weil der sinkende Zinsfuss einen Courszuwachs des effectiven Anlagecapitals verursacht, welcher in seinem ziffermässigen Umfange den Rentabilitätsunterschied escomptirt und auf diese Weise die Capitalsnutzung auf dem gleichen Niveau erhält. Erst bei temporärer Neuerwerbung von Anlagepapieren zu verschiedenen Marktpreisen gelangt die Veränderlichkeit der Capitalsnutzung zur Geltung, weil hier der gleiche nominelle Zinsertrag ungleich bewerthet erscheint und speciell bei sinkender Tendenz der Rentabilität einen stets wachsenden Capitalsaufwand erfordert. Im Wesen selbst bedeutet dies nichts Anderes, als dass bei temporärer Erwerbung der unterdessen jeweilig eingetretene Rentabilitätsentgang auf Kosten des letzten Erstehers des Anlagepapieres sich vollzieht.

Daraus geht hervor, dass, insolange der nominelle Zinsfuss aufrecht bleibt, alle Besitzer des Anlagepapieres stets diejenige Rente desselben geniessen, welche sie durch dessen Kaufpreis erstanden haben, d. h. die im Kaufpreise selbst ausgedrückte Rentabilität des Anlagecapitals bleibt bei gleichem nominellen Zinsfusse unverändert. Hingegen wird bei temporärer Erwerbung der Anlage der zur Zeit unterschiedliche Kaufpreis der Papiere eine ungleiche Rentabilität der verschiedenen Posten bedingen und daher bei steigendem Kaufpreise eine abnehmende Verzinsung involviren. Je mehr sich daher der Kaufpreis dem Nominalwerthe des Anlagepapieres nähert, desto geringer wird die Differenz zwischen nomineller und effectiver Verzinsung, bis schliesslich die Rentabilität der blossen nominellen Verzinsung entspricht. Dies ist nun jenes Stadium, in welches die Conversionsreife eines Papieres eintritt, und von da ab wird die Wirkung, welche die sinkende Tendenz des Zinsfusses auf die Rentabilität des Capitals ausübt, eine ganz andere. Durch die Ueberschreitung des Nominalwerthes, respective jenes Courses, welcher die Schuldverpflichtung des Darlehenscontrahenten ausdrückt, gibt das Capital kund, dass die nominelle Verzinsung mit Rücksicht auf die bestehenden Rentabilitätsbedingungen eine zu günstige ist und daher auch ein geringeres Ausmass derselben befriedigen würde.

Dies reicht jedoch noch nicht hin, um dem Schuldner die Garantie für das Gelingen einer durchzuführenden Conversion zu bieten, weil es durchaus nicht genügen kann, wenn der allgemein übliche Zinsfuss den nominellen des betreffenden Papieres einfach unterbietet, sondern es muss der Abstand zwischen beiden sich stabil erhalten und derart zum Ausdrucke kommen, dass mit einem möglichst geringen Risico einer solchen Transaction auch ein ausgiebiges Zinsenersparniss erzielt werden kann.

Es bedarf daher einer längeren Frist, bis infolge der fortschreitenden Aenderung der Zinsfussverhältnisse die Unterbietung des nominellen Zinsfusses des betreffenden Anlagepapieres jene Dimensionen annimmt, dass mit einiger Sicherheit das Gelingen einer mit ausgiebiger Zinsfussherabsetzung verbundenen Conversion vorauszusetzen ist, denn die Kosten und das Risico einer solchen sind zu grosse, als dass der Schuldner eines geringeren Zinsenersparnisses wegen eine derartige Transaction wagen sollte.

Unterdessen klebt aber förmlich der Cours an dem Nominalwerthe, weil eine dem gesunkenen Zinsfusse entsprechende Coursentwicklung über den Nominalwerth viel schwerer sich vollzieht, als eine solche bis zur Parität. Es ist dies nur natürlich, weil im Falle der Conversion die eventuelle Rückzahlung des Capitals im Nominalwerthe des Papieres erfolgt und daher der über pari sich vollziehende Courszuwachs den letzten Besitzer belastet, hiedurch gewissermassen eine Escomptirung der mit der Conversion verbundenen Zinsenkürzung bedingend.

Es pflegt infolge dessen der über pari sich vollziehende Courszuwachs in den seltensten Fällen den wirklichen Stand der Zinsfussverhältnisse auszudrücken, weil das Capital stets das Bestreben hat, sich seinen Entschluss für die Einwilligung zu einer Zinsenkürzung bis zum letzten Momente offen zu halten und erst dem fait accompli gegenüber unterordnet es sich den gegebenen neuen Verhältnissen.

Auf diese Weise besteht zur Zeit der Conversionsreife stets ein gewisser Abstand zwischen dem Marktpreise und dem Werthe, welchen das Papier gemäss der vorgeschrittenen Zinsfussdepression besitzen müsste, wenn nicht die Erschütterung der alten Position des Gläubigers einen Kampf um dieselbe zwischen diesem und seinem Schuldner hervorbringen würde.

Dieser Abstand, welcher innerhalb der zwischen dem Eintritte der Conversionsreife und dem Conversionszeitpunkte ablaufenden Periode sich bei zunehmend sinkendem Marktzinsfusse stets vergrössert, schwindet nun plötzlich im Momente der vollzogenen Conversion, und verursacht auf diese Weise eine Werthveränderung des Papieres auf Kosten des letzten Besitzers desselben. Die in diesem Abstande ausgedrückte Spannung zwischen den Interessen des Gläubigers einerseits und jenen des Schuldners andererseits wird durch die Conversion plötzlich aufgehoben, indem eine Entscheidung zu Gunsten des letzteren erfolgt.

Die sonst mit dem Kaufpreise des Anlagepapieres erworbene stetige Rentabilität desselben wird infolge dessen mit der erfolgten Conversion

spontan zu Ungunsten des Besitzers verschoben, indem derselbe einen Coursentgang erleidet, in welchem sich der capitalisirte Werth derjenigen Zinsendifferenz ausdrückt, welche zwischen der Rentabilität des Papieres vor der Conversion und nach derselben besteht.

Innerhalb jener vom Eintritte der Conversionsreife bis zur Conversion ablaufenden Periode, wird, abgesehen von diesem mit der Conversion verbundenen Coursentgang, eine Schmälerung der ursprünglichen nominellen Rentabilität bloss dann stattfinden, wenn die Erwerbung des Anlagepapieres während dieser Periode sich ergeben hat.

Vom Zeitpunkte der Erreichung der Parität eines Anlagepapieres ist daher die Neuerwerbung desselben bereits mit einer Schmälerung der nominellen Rentabilität in einem mehr oder weniger hohen Masse verbunden; oder mit anderen Worten, der Aufwand zur Erreichung der Rentabilität, welche dem nominellen Zinsfusse entspricht, überschreitet den nominellen Werth des Papieres.

Liegt es daher im Interesse des Capitalisten, eine dauernd fixe Rentabilität einer bereits bestehenden Anlage zu bewirken, so muss derselbe dafür sorgen, dass für diesen Mehraufwand im Zeitpunkte der Conversion eine Reserve vorhanden sei, welche jenen hiedurch hervorgerufenen Coursentgang zu ersetzen geeignet ist. Diese Reserve wird jedoch für den Fall, als die Anlage jährlich immer wieder eine Vergrösserung erfährt, noch die weitere Aufgabe erfüllen müssen, den facultativen Mehraufwand für die Neuerwerbung der Anlagepapiere, deren Kaufpreis sich über Pari stellt, zu decken.

Nun frägt es sich aber, welche Höhe muss eine solche zu schaffende Reserve im Verhältnisse zum Anlagecapitale erreichen, um den an sie gestellten Anforderungen Genüge zu leisten. Die Antwort hierauf ist insoferne eine naheliegende, als der Zeitpunkt der Conversion und die Bemessung des Zinsfusses der neuen Schuld bestimmend wirken auf das in dieser Beziehung sich ergebende Erforderniss zur Aufrechterhaltung der nominellen Rentabilität der bisherigen Anlage. Hinsichtlich der nach erfolgter Conversion erworbenen neuen Anlage kann jedoch nur wieder der Zinsfuss der neuen Schuld massgebend sein.

Im Allgemeinen hängt der Zeitpunkt der Conversion sowie die Bemessung des Zinsfusses der neuen Schuld von der nach erfolgter Conversionsreife sich vollziehenden weiteren Entwicklung der Zinsfussverhältnisse ab. Das Sinken des Zinsfusses der Anlagepapiere ist nicht die Ursache, sondern die Wirkung des sinkenden Marktzinsfusses im weiteren Sinne. In Consequenz dessen kann eine willkürlich durchgeführte Conversion von Staatsrenten nie die Wirkung einer Herabsetzung des laufenden Zinsfusses am Geldmarkte haben.

Der Zinsfuss der Staatsrente ist wohl ein Index für den Stand des Zinsfusses am Geldmarkte, aber eben nicht mehr als ein Index; der laufende Marktzinsfuss wird durch gewaltsame Operationen nicht beirrt, denen der Zinsfuss der Staatsrente unterworfen worden ist.

Grimaldi bemerkt in seinem Werke »Osservazioni sulla conversione delle rendite pubbliche« hinsichtlich der Opportunität der Conversion richtig, dass der Staat keine Macht habe, auf die Herbeiführung des günstigen Zeitpunktes bestimmend einzuwirken: »si sostiene da alcuni che abbassandosi l'interesse delle pubbliche rendite viene proporzionalmente ridotto l'interesse del danaro nelle transazioni private; noi dubitiamo grandemente di questo mirabile potere; noi crediamo, che la riduzione dell' interesse .... deve essere l'espressione di fatti conosciuti, incontestati e non dipendere da una operazione artifiziale, per quanto ingegnosa essa sia. Deve in una parola prima annunziarsi nelle convenzioni private. Ora l'unica cosa ad esaminarsi è questa, quale è la ragione dell' interesse tra noi nelle transazioni private?« Wir haben die Stelle wegen ihrer prägnanten Ausdrucksweise im Originale angeführt. Sie enthält die treffliche und bündige Bestätigung obiger Ansicht.

Eine Ausnahme in dieser Beziehung findet nur in der Weise statt, dass durch die Conversion namentlich jener Schulden, welche im Inlande placirt sind, ein vorübergehender Einfluss auf den Capitalszinsfuss am Geldmarkte nach der Richtung hin ausgeübt wird, dass eine Depression dieses letzteren Zinsfusses eintritt. Aber diese Erscheinung kann nur eine ephemere sein und der Wiedereintritt normaler Verhältnisse am Geldmarkte wird etwaige derartige Bemühungen eines Staates nur zu bald ad absurdum führen.

Der Staat kann also nicht den laufenden Zinsfuss des Marktes nach seinem Rentenzinsfusse und durch denselben regeln, sondern muss umgekehrt bei Bestimmung seines Rentenzinsfusses, daher auch bei Vornahme der Conversion sich nach dem laufenden Capitalmiethpreise richten.

Der Zeitpunkt, in welchem der Staat an die Vornahme einer Conversion in dem gewöhnlichen Begriffe dieses Wortes: »Aufhebung der alten, zu minder günstigen Bedingungen eingegangenen und Contrahirung der neuen Schuld zu vortheilhafteren Bedingungen« denken kann, ist dann als eingetreten zu erachten, wenn die Course der Rente das Pari überschritten haben und sich dauernd über pari erhalten. Dies ist das nächstliegende und untrüglichste Kennzeichen. Die Bemessung des richtigen Zeitpunktes bedarf entsprechender Rücksichtnahme auf die Verhältnisse des Geldmarktes im In- und Auslande, und es wird Sache der Praktiker, der Finanzmänner sein, die Constellation am in- und ausländischen Capitalsmarkte der richtigen Würdigung und Beurtheilung zu unterziehen. Einen Anhaltspunkt hiebei von nicht zu unterschätzendem Werthe bietet der Vorschlag eines deutschen finanzwissenschaftlichen Schriftstellers, »als Massstab für die Bemessung des staatlichen Rentenzinsfusses jenen Zinsfuss anzunehmen, welcher bei soliden Anlagen auf Privatcredit gegen hypothekarische Sicherheit in der Metropole und in den capitalreichen Städten des Landes der gewöhnliche ist, weil nur diese Capitalsanlage bei Aufkündigung öffentlicher Schuldcapitalien für die grosse Mehrheit der Staatsgläubiger in Frage und Wahl kommen kann« — vorausgesetzt, dass der Staatscredit fest gegründet ist.

Die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden als Element einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und die hieraus entspringenden Conclusionen.

IV.

Den bisherigen Ausführungen gemäss, drängt sich die Wahrnehmung auf, dass die Grösse t für die Formen I positiven, dagegen für die Formen II negativen Werthen entspricht. Mit Rücksicht auf das Wesen der Function der Formen II ergibt sich aus diesem Umstande offenbar eine imaginäre (laterale) Beschaffenheit derselben, während die Formen I reelle Werthe darstellen.

Wir werden daher in unseren ferneren Ausführungen bloss die Formen I und die mit denselben correspondirenden Relationen berücksichtigen.

Nachdem wir dies vorausgeschickt, übergehen wir zur weiteren Untersuchung des Wesens dieser Curven, vorerst auf die Zergliederung jener Formen, welche die Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer betreffen, uns beschränkend.

Aus dem in der vorigen Abhandlung ermittelten Werthe für die Tangente dieser Curve

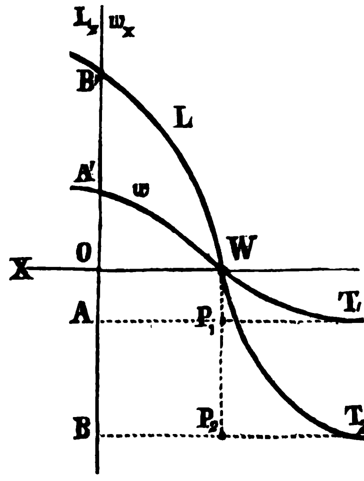
1) $$\frac{dw_x}{dx} = h\left(\frac{(1+t)^2}{8t} - 1\right)$$

ergibt sich, dass die für $t = 1$ dem Wendepunkte entsprechende Tangente $\frac{dw_x}{dx} = -\frac{h}{2}$ zwischen $\frac{dw_x}{dx} = 0$ und $\frac{dw_x}{dx} = -\frac{h}{3}$ der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer Genüge leistet und hier ein negatives Maximum bildet, so dass die Tangente der Curve vorerst von $-\frac{h}{3}$ auf $-\frac{h}{2}$ aufsteigt, um sodann bis auf Null herabzusinken. Der Winkel, welchem die Tangente der Curve entspricht, ist daher dort negativ am grössten, wo die Curve mit der Abscissenaxe zum Schnitte kommt und zugleich ihren Wendepunkt besitzt.

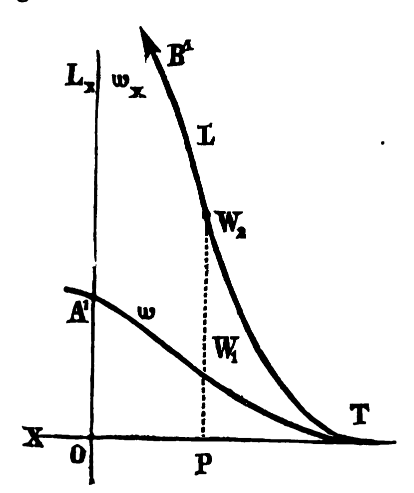
Die Constatirung dieses Umstandes ist für unsere Untersuchung von grosser Bedeutung, da nicht nur die Werthbestimmung der Constante h, sondern auch die Feststellung des sonstigen Curvenverlaufes innerhalb der bezeichneten Grenzen hievon abhängt. Ausserhalb dieser Grenzen ist der Verlauf der Curve für unsere Rechnung irrelevant.

Mit Rücksicht auf die genannten Resultate unserer Untersuchung wird also der Verlauf der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer sich derart gestalten, dass dieselbe, mit ihrem Wendepunkte in der Abscissenaxe liegend, von der positiven Sphäre in die negative übergeht. In Consequenz dessen wird aber auch die Curve der Lebenden einen ähnlichen Verlauf nehmen

müssen, da dieselbe mit der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer den Wendepunkt gemeinschaftlich hat. Diesbezüglich mag nachfolgende Figur den Verlauf der beiden Curven bildlich darstellen.



Hier repräsentirt nun die Linie $A'\ W\ T_1$ die Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und $B'\ W\ T_2$ die Curve der Lebenden, wie selbe nach den ermittelten Gleichungen bei gemeinsamer Abscisse sich gestalten, wobei W den gemeinsamen Wendepunkt, T_1 respective T_2 diejenigen Punkte bezeichnen, in welchen die beiden Curven ihren correspondirenden Tiefpunkt, respective ihr Minimum erreichen. Um daher beide Curven in die positive Sphäre zu bringen, ist es nothwendig, dieselben um jenen senkrechten Abstand, welcher zwischen der Abscissenaxe und dem beziehungsweisen Punkte T_1 und T_2 besteht, nach oben zu verschieben, so dass bei der Ordinate w_x, respective L_x dieser Abstand mit in Rechnung kommt Die beiden Curven werden sodann in ihrer Lage jene Aenderung erfahren, welche in folgender Figur zum Ausdrucke kommt.



Es wird hier also eine Verschiebung der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer um den Abstand PW_1 und der Curve der Lebenden um PW_2 sich vollziehen, das ist um die beziehungsweisen neuen Ordinaten der Wendepunkte dieser beiden Curven. Die bezüglichen Gleichungen für die Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer werden demgemäss folgende Form annehmen:

2) $$x + 2C = 8\,C_1\,\frac{t^{\frac{1}{18}}.\,e^{-\frac{1}{6t}}}{(t-3)^{\frac{5}{9}}}$$ 3) $$w_x - a = b\,.\,C_1\,\frac{(1-t^2).\,e^{-\frac{1}{6t}}}{(t-3)^{\frac{5}{9}}\,.\,t^{\frac{17}{18}}}$$

wobei die im Differentialquotienten von w_x in Rechnung gelangte Constante h mit dem hier durch die vollzogene Substitution sich ergebenden Werthe b correspondirend erscheint, während a den Abstand bezeichnet, um welchen die Verschiebung der Curve erfolgte. Darnach gestalten sich die weiteren Relationen folgendermassen, und zwar der Form l) gemäss

4) $$\frac{4\,(w_x - a)}{x + 2C} = b\,.\,\frac{1-t^2}{2t} \quad \text{und}$$

5) $$t = -\frac{1}{b}\cdot\frac{4\,(w_x - a)}{x + 2C} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{b}\cdot\frac{4\,(w_x - a)}{x + 2C}\right)^2 + 1}$$

Mit diesen Formen correspondirt im analogen Sinne auch die Relation

6) $$\frac{dw_x}{dx} = h\left[-\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{1}{b}\cdot\frac{w_x - a}{x + 2C}\right)^2}\,\right] = h\left(\pm\frac{(1 \pm t)^2}{8t} - 1\right)$$

wobei in 5) und 6) für reelle Werthe bloss das positive Zeichen in Betracht kommt, während das negative den imaginären Formen II Rechnung trägt.

Im Ganzen treten also in der Gleichung der Curve fünf Constanten auf, und zwar h, a, C, b und C_1, wobei die Constante b correspondirend mit h erscheint. Es müssen daher mindestens fünf Bedingungen erfüllt werden, wenn die mathematische Construction der Curve möglich sein soll.

Mittelst gegebener fünf Bedingungen ist es möglich, denjenigen Punkt zu bestimmen, dessen Tangente als negatives Maximum erscheint. Dieser Punkt entspricht nun dem Wendepunkte der zu construirenden Curve und die Tangente desselben gibt die Handhabe zur Bestimmung der Constante h. Nachdem nämlich die Tangente im Wendepunkte $-\frac{h}{2}$ ist, so muss der zweifache negative Werth dieser Maximaltangente dem Werthe von h entsprechen.

Der Umstand ferner, dass auch die Tangenten der anderen Punkte auf gleiche Weise ermittelt werden können, führt zu dem Resultate, dass mittelst der Form

7) $$t = 3 + \frac{4}{h}\cdot\frac{dw_x}{dx} \pm \sqrt{\left(3 + \frac{4}{h}\cdot\frac{dw_x}{dx}\right)^2 - 1}$$

die den einzelnen Punkten entsprechenden Werthe von t festgestellt werden.

In dieser Form gilt das positive Zeichen für alle Werthe von t, welche grösser als 1 sind, das negative für alle Werthe von t, die kleiner als 1

sind; das heisst, allen dem Wendepunkte vorangehenden Punkten entspricht das positive, allen nachfolgenden das negative Zeichen.

Der Process der Ermittlung der Maximaltangente gestaltet sich um so einfacher, je mehr Punkte der Curve gegeben sind, wobei auch die Genauigkeit des Resultates gewinnt.

Zur Feststellung der Werthe der übrigen Constanten dient folgender Vorgang: Setzen wir der Kürze halber den Ausdrnck

8) $$\frac{t^{\frac{1}{18}} . e^{-\frac{1}{6t}}}{(t-3)^{\frac{5}{9}}} = \tau$$

so lautet die Form 2) einfach

9) $$x + 2C = 8C_1 . \tau$$

worin der Werth von τ für jeden einzelnen Punkt festgestellt werden kann, nachdem die Form 7) den jeweiligen Werth von t liefert. Durch Combination je zweier Punkte ergibt sich daher

10) $$\begin{matrix} x_p + 2C = 8C_1 . \tau_p \\ x_q + 2C = 8C_1 . \tau_q \end{matrix} \quad \text{somit} \quad C_1 = \frac{1}{8} \frac{x_p - x_q}{\tau_p - \tau_q}$$

so dass sich für je zwei Punkte stets ein Werth für C_1 ergibt. Zieht man nun aus allen diesen Werthen das arithmetische Mittel, so erhält man den gesuchten Werth der Constante C_1 für die ausgeglichene Curve. Dieses Ergebniss hat dann auch die Bestimmung des Werthes von $2C$ zur Folge, so dass nur noch die Ermittlung des Werthes der Constante b erübrigt, nachdem die Constante a als Ordinate des Wendepunktes, welcher mit seiner Maximaltangente gekennzeichnet erscheint, bereits bekannt ist. Diesbezüglich wird die Anwendung der Form 4) zum Resultate führen und ist daher den Anforderungen vollständig Genüge geleistet.

Was schliesslich die Feststellung der Abscisse des Tiefpunktes betrifft, welchen wir des Umstandes wegen, dass in demselben $w_x = 0$ wird und die Curve in demselben ihr Minimum erreicht, so bezeichnen, so geschieht dieselbe in folgender Weise:

Zu constatiren ist, dass der Werth von t in diesem Punkte ein fixer ist, weil die demselben entsprechende Tangente bekanntlich Null wird und die Constante h infolge dessen ausser Rechnung kommt. Hier ist nämlich $t_0 = 3 - 2\sqrt{2}$ also $\tau_0 = 0{\cdot}19263511$, welche Werthe daher allgemeine Giltigkeit besitzen, so dass aus der Form 9) direct die jeweilige Abscisse für den Tiefpunkt resultirt.

Infolge dieses Umstandes besteht gemäss der Form 4) zwischen den Constanten a, b und C_1 eine fixe und allgemein giltige Beziehung, und zwar

11) $$a = - b . C_1 . 1{\cdot}089709$$

Aehnlich wird die Ordinate im Anfangspunkte, in welchem $x = 0$ ist, bestimmt, nachdem aus der Form 9) die Relation $2C : 8C_1 = \tau$ resultirt, aus welcher mit Hilfe der Gleichung 8) der Werth t ermittelt und in die Form 4) substituirt wird.

Die Coursreserve als Präventivmittel gegen die Schwankungen der Capitalsrentabilität infolge sinkenden Zinsfusses.

II.

Aus den bisherigen Auseinandersetzungen geht hervor, dass die Fluctuationen, denen die Course der Anlagewerthe ausgesetzt sind, nicht immer den wahren Stand der Zinsfussversältnisse erkennen lassen, da dieselben oft durch directe oder indirecte Beeinflussung hervorgebracht, wohl mit dem momentanen Bankzinsfusse zusammenhängen können, jedoch den allgemeinen Miethpreis des Capitals nicht immer zum Ausdrucke bringen.

Die Beschaffenheit der jeweiligen Capitalsrentabilität hängt vielmehr mit den Zinsfussverhältnissen beim Privatcredit mit hypothekarischer Sicherheit zusammen, und dieser bildet gewissermassen den Massstab für die Beurtheilung des landläufigen Capitalsmiethpreises.

Es wird also bei gleichzeitiger längerer Beobachtung dieser Umstände mit der Coursentwicklung der relativ sichersten Anlagewerthe mancher werthvolle Anhaltspunkt für die Beurtheiluug der Zinsfussverhältnisse im Allgemeinen sich ergeben.

Die auf diese Weise wahrgenommene Entwicklung der Zinsfussverhältnisse wäre nun wohl geeignet, annähernd verlässliche Schlüsse für das Eintreffen jener Bedingungen, welche den wahrscheinlichen Zeitpunkt einer etwa durchzuführenden Conversion in nahe Aussicht stellen, zuzulassen.

Solchermassen wäre daher auch die Möglichkeit geboten, unter gewissen Umständen durch Combination des wahrscheinlichen Zeitpunktes der eintretenden Conversionsreife mit demjenigen einer zweckmässig durchzuführenden Conversion jene Anhaltspunkte zu schaffen, welche für die Limitirung der zur Aufrechterhaltung der Rentabilität einer bestehenden Anlage erforderlichen Coursreserve sich als nothwendig erweisen.

Theoretisch lässt sich gegen diese Methode also nichts einwenden, ob aber praktisch eine derartige complicirte Ermittlung dieser Anhaltspunkte zweckmässig erscheint, dürfte um so zweifelhafter sein, als hiedurch bei Weitem nicht jene Verlässlichkeit der Resultate erzielt werden kann, um den Arbeitsaufwand für derartige, sich periodisch wiederholende Untersuchungen zu rechtfertigen. Wir werden deshalb einen anderen, einfacheren Weg einschlagen, um diesbezüglich zum Ziele zu gelangen, und glauben mit Rücksicht auf die in Betracht kommenden Vorraussetzungen den gegebenen Anforderungen Genüge zu leisten, wenn wir die erforderliche Coursreserve ihrem Zwecke nach in zwei verschiedene Partien zerlegen.

Die erste Partie der Coursreserve ist nämlich diejenige, welche dazu dient, den alten Anlagestock innerhalb einer längeren Frist auf einer bestimmten Rentabilitätshöhe zu erhalten, und zwar auch dann, wenn die neuen Verzinsungsbedingungen durch Conversion der Anlagewerthe den ursprünglichen nominellen Zinsfuss unterbieten.

Die zweite Partie derselben hingegen hat den Zweck, für die etwa neu geschaffene, später erworbene Anlage, welche der Rentabilität der bereits convertirten Anlagewerthe entspricht, schon früher vorzusorgen, dass im Falle der neuerlich eintretenden Conversionsreife derselben deren Rentabilität nicht plötzlich unter den nominellen Zinsfuss sinke. Wir haben hier insbesondere die Garantiemittel einer Lebensversicherungs-Gesellschaft speciell im Auge, weil diese auf eine längere Reihe von Jahren Verträge eingeht, welche einer bestimmten, unveränderlichen Zinsfussgrundlage entsprechen, so dass während der Dauer des Bestandes dieser Verträge jene denselben dienenden Fonds in ihrer Rentabilität dem zugrundegelegten rechnungsmässigen Zinsfusse Genüge leisten müssen, wenn die Gesellschaft in der Lage sein soll, ihre Leistungen aus diesen Fonds zu bestreiten.

Diesem Umstande muss aber auch dann Rechnung getragen werden, wenn mit Rücksicht auf die veränderten Zinsfussverhältnisse die rechnungsmässige Verzinsungsgrundlage eine Reduction erfährt, weil diese bloss für die neu abzuschliessenden Verträge gilt, während die alten Verträge die ursprüngliche Verzinsungsgrundlage beibehalten.

Ebenso wie nun für die alten Verträge die Heranziehung der ersten Partie der Coursreserve in dem Momente erfolgt, wo die Rentabilität der Fonds dem rechnungsmässig zugrundegelegten Zinsfusse nicht mehr entspricht, so muss durch die zweite Partie der Coursreserve vorgesorgt werden, dass bei fortschreitender Veränderung der Zinsfussverhältnisse die Rentabilität jener Fonds, welche den neu abgeschlossenen und mit bereits reducirtem rechnungsmässigen Zinsfusse eingegangenen Verträgen dienen, nicht nothleidend werde.

Zumeist entspricht nun bekanntlich die jeweilige rechnungsmässige Verzinsungsgrundlage der Lebensversicherung dem nominellen Zinsfusse der sichersten Anlagewerthe des Landes, in welchem die Gesellschaft ihren Sitz hat. Solange daher die Rentabilität der Anlage das Niveau der nominellen Verzinsung überbietet, wird aus der Differenz zwischen der rechnungsmässigen Verzinsungsgrundlage und der thatsächlichen Rentabilität sich ein Zinsengewinn für die Gesellschaft ergeben, während im umgekehrten Falle ein Zinsenverlust für dieselbe resultirt. Würde daher der Zinsengewinn welcher aus den Prämienreservefonds erwächst, stets als Coursreserve hinterlegt werden, so müsste derselbe sammt Zinsen hinreichen, um den etwaigen späteren Zinsenverlust zu decken. Die Richtigkeit dieser Ansicht findet ihre Bestätigung schon durch den Umstand, dass die Abnahme der Rentabilität, je weiter sie fortschreitet, desto langsamer sich vollzieht, indem dieselbe nicht auf einer absoluten, sondern bloss auf einer relativen Beeinflussung des Zinsfussniveaus beruht.

Auf dieser Basis lässt sich daher das nöthige Ausmass der erforderlichen Coursreserve für beide Partien derselben feststellen.

Die erste Partie der Coursreserve, welche für die Aufrechterhaltung der Rentabilität jener Prämienreserve dient, welche dem alten, auf der

ursprünglichen Verzinsungsgrundlage beruhenden Versicherungsstocke entspricht, wird also in folgender Weise aufgebracht:

Nehmen wir beispielsweise die rechnungsmässige Zinsfussgrundlage der bisherigen Versicherungen mit 4 Percent an, indem wir ferner voraussetzen, dass die Anlagewerthe eine durchschnittliche nominelle Verzinsung von gleichfalls 4 Percent aufweisen, deren Marktpreis (Erstehungscours) sich jedoch nur nach und nach auf Pari erhöhte, so gelangen wir zu folgendem Schema:

Zeitpunkt der Erstehung	Jährlicher Prämienreserve-Zuwachs	Durchschn. Erstehungs-Cours in Percenten	Durchschnittliche Rentabilität	Rentabilitäts-Ueberschuss od. Ausfall bei einer Zinsfussgrundlage von 4%	Jährlich wiederkehrender Zinsengewinn	Jährlich wiederkehrender Zinsenverlust	Jährlicher Beitrag zur Coursreserve
1885	1,080 000	87	4·600%	0·600%	6480	—	6480
1886	1.200 000	90	4·444%	0·444%	5333	—	11813
1887	1,350 000	92	4·346%	0·346%	4071	—	15884
1888	1,400 000	94	4·255%	0·255%	3060	—	18944
1889	1,500.000	96	4·167%	0·167%	2500	—	21444
1890	1,600.000	98	4·082%	0·082%	1310	—	22754
1891	1,800 000	99	4·004%	0·004%	720	—	23474
1892	1,900.000	100	4·000%	—	—	—	23474
1893	2,000.000	101	3·960%	— 0·040%	—	800	22674
1894	2 200.000	102	3·922%	— 0·078%	—	2110	20564*)
	15,980.000						

Dieses Schema wird jedoch den Anforderungen nur bis zu jenem Zeitpunkte Rechnung tragen, bis zu welchem der nominelle Zinsfuss aufrecht bleibt. Im Momente der vollzogenen Conversion jedoch gestaltet sich der Vorgang in folgender Weise.

Nehmen wir z. B. an, dass eine Conversion des nominellen Anlagezinsfusses im Jahre 1895 von 4 auf $3^1/_2$ Percent sich vollzogen und der Umtausch der alten Titres gegen die neuen derart stattgefunden hätte, dass gegen Uebernahme der 4percentigen Werthe mit dem Course von 100 Percent, die neuen $3^1/_2$percentigen mit einem Course von 90 Percent geliefert worden wären, so würde dies für die bisherige Anlage einen weiteren bleibenden Zinsenverlust von 0·1111 Percent ausmachen, und zwar entspricht

eine 4percentige Anlage zum Course von 100 Percent der Rentabilität von	4.000 Percent
eine $3^1/_2$ percentige Anlage zum Course von 90 Percent der Rentabilität von	3·8889 „
daher bleibender Rentabilitätsverlust	0·1111 Percent

Das ist beim gesammten Prämienreservezuwachs von 15,980.000 ein weiterer jährlicher Zinsenverlust von 17.755·6.

Summirt man daher die jährlichen Beiträge zur Coursreserve und berücksichtigt hiebei die auflaufenden Zinsen und Zinseszinsen sowie die weiter fortlaufenden Beiträge, so gewinnt man ein Bild jener bei der

*) Jährlich fortlaufender Beitrag zur Coursreserve.

Fundirung der Coursreserve des alten Versicherungsstockes in Betracht kommenden Umstände.

Es ergibt sich nämlich aus den gemachten Wahrnehmungen der Schluss, dass die in den einzelnen Jahren erzielten Zinsengewinne aus den Prämienreservefonds hinreichen dürften, um die später bis zur vollständigen Abwicklung des alten Versicherungsstockes aus der Rentabilitätsabnahme sich ergebenden Zinsenverluste zu decken; und zwar glauben wir annehmen zu können, dass ein diesbezügliches Zurückgreifen auf die verflossene zehnjährige Periode den Anforderungen umsomehr Genüge zu leisten vermag, als die aus dem jährlichen Zinsengewinne aufgelaufenen Zinsen mit dazu beitragen dürften, um die zur Deckung der Zinsenverluste nach und nach heranzuziehenden Quoten für eine doppelt so lange Frist zu liefern.

Für diese Ansicht spricht schon der Umstand, dass die Abwicklung eines Versicherungsstockes längstens im Mittel 20 Jahre in Anspruch nehmen dürfte, da mit Rücksicht auf den Storno und die vorzeitigen Fälligkeiten successive auch der Prämienreservefonds vom Zinsenverluste theilweise entlastet wird.

Was nun die zweite Partie der Coursreserve betrifft, so wird an die Schaffung einer solchen in dem Momente geschritten werden müssen, wo in die Versicherung jene aus der Conversion resultirende neue Zinsfussgrundlage zur Einführung gelangt. Die nunmehr bloss mit $3^1/_2$ Percent zu verzinsenden Prämienreservefonds werden insolange einen Zinsengewinn liefern, als die mit 90 emittirten $3^1/_2$percentigen Titres nicht den Paristand erreichen. Es werden daher bis zu diesem Zeitpunkte alle unter Pari erworbenen Anlagen durch ihre den rechnungsmässigen Zinsfuss übersteigende Rentabilität zur Bildung dieser Coursreserve beitragen.

Das bezügliche Schema wird sich dann folgendermassen gestalten:

Zeitpunkt der Erstehung	Jährlicher Prämienreserve-Zuwachs	Durchschn. Erstehungs-Cours in Percenten	Durchschnittliche Rentabilität	Rentabilitäts-Ueberschuss bei einer Zinsfussgrundlage von $3^1/_2$%	Jährlich wiederkehrender Zinsengewinn	Jährlich wiederkehrender Zinsenverlust	Jährlicher Beitrag zur Coursreserve
1895	2,300 000	90	3 8889	0 3889	8 945	—	8945
1896	2,500.000	91	3 8461	0·3461	8 652	—	17597
1897	2,700 000	90	3 8889	0 3889	10 500	—	28097
1898	2,400 000	89	3 9326	0·4326	10.382	—	38479
1899	2,600 000	91	3·8461	0·3461	8 998	—	47477
1900	2,800.000	93	3 7634	0·2634	7 375	—	54852
1901	3,000.000	94	3·7234	0·2234	6.702	—	61554
1902	3,100.000	95	3 6842	0·1842	5.710	—	67264

u. s. f., bis wieder der Paristand und mit diesem der Zeitpunkt der Conversionsreife eintritt.

Wir gelangen daher zu der Conclusion, dass die erforderliche Coursreserve aus jenem Zinsengewinne anzusammeln ist, welcher sich jeweilig aus der die rechnungsmässige Zinsfussgrundlage überschreitenden Rentabilität der Prämienreservefonds ergibt.

Die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden als Element einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und die hieraus entspringenden Conclusionen.

V.

In dem vorigen Theile dieser Abhandlung haben wir darauf hingewiesen, dass die im Differentialquotienten von w_x in Rechnung kommende Constante h mit der in der Form 3) auftretenden Constante b als correspondirend anzusehen ist. Der Quotient der differentirten Formen 2) und 3) liefert nun in der sich auf diese Art ergebenden Relation

12) $$\frac{dw_x}{dx} = b\left(\frac{(1+t)^2}{8\,t} - 1\right)$$

hiefür den Beweis, indem sich bei Vergleichung mit der Form 1) herausstellt dass thatsächlich die beiden Constanten h und b identisch sind, so zwar, dass b den rectificirten (ausgeglichenen) Werth von h bildet.

Mit Rücksicht auf diesen Umstand und auf jene in der Form 11) ausgedrückte, allgemein giltige Beziehung zwischen den Constanten a, b und C_1, in welcher der unveränderliche Werth

13) $$\frac{1-t_0^2}{t_0}\,.\,\tau_0 = 1{\cdot}089709$$

als Coëfficient fungirt, reduciren sich die zur mathematischen Construction der Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten erforderlichen Bedingungen auf drei, indem von den vier in Betracht kommenden Constanten a, C, C_1 und b die letztere aus der Form 11) mittelst der Werthe von a und C_1 bestimmt wird.

Für die Ausgleichung einer statistisch gegebenen Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten werden daher bloss die Constanten a, C und C_1 massgebend sein, und zwar sind deren Werthe für jeden einzelnen statistisch gegebenen Punkt dieser Curve zu ermitteln und aus diesen Resultaten die entsprechenden arithmetischen Mittel zu ziehen. Diesbezüglich wird also folgender Vorgang eingehalten werden müssen:

Laut Form 10) werden je zwei aufeinanderfolgende statistisch gegebene Punkte je einen Werth für die Constante C_1 liefern. Zu diesem Zwecke ist es jedoch nöthig, die denselben entsprechenden Werthe von τ zu bestimmen, welche der Form 8) gemäss sich aus den beziehungsweisen Werthen von t ergeben.

Zur Bestimmung der Werthe von t in den einzelnen Punkten werden nun die jeweiligen Tangenten derselben herangezogen werden müssen, welche

sich aus der Differenz der statistisch gegebenen Werthe der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten in je zwei aufeinanderfolgenden Jahren ergeben, und zwar ist

14) $$\frac{\Delta w_x}{\Delta x} = w_{x+1} - w_x \qquad \text{nachdem } \Delta x = 1$$

Dividirt man füglich diesen Werth durch h, also durch den negativen zweifachen Werth der dem Wendepunkte entsprechenden Maximaltangente, so erhält man den Werth

15) $$\frac{1}{h} \frac{\Delta w_x}{\Delta x}$$

aus welchem sich auf Grundlage der Form 7) der jeweilige Werth von t bestimmen lässt.

Ist die Unregelmässigkeit des statistisch gegebenen Sterblichkeitsverlaufes eine derartige, dass die aus demselben entspringende Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten eine directe Bestimmung desjenigen Punktes, dem die Maximaltangente entspricht, nicht zulässt, so wird es angezeigt sein, vorerst der Continuität eines regelmässigen Verlaufes Rechnung zu tragen, indem eine aproximative Ausgleichung der Krümmung jener den Sterblichkeitsverlauf darstellenden Curve veranlasst wird.

Sind z. B. n auf statistischem Wege ermittelte Punkte durch ihre Coordinaten gegeben, so ist die Methode, welche hier zur Bestimmung der Maximaltangente führt, folgende:

Unter der Voraussetzung, dass diese Punkte ihrer Lage entsprechend combinirt werden, lassen sich mit Hilfe deren Coordinaten

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ (w_x)_1 & (w_x)_2 & (w_x)_3 & (w_x)_4 \end{matrix} \quad \text{etc.}$$

neue $n-m$ Punkte nebst ihren Tangenten näherungsweise ermitteln, und zwar ist, wenn beispielsweise mit dem Abstand von je vier Punkten alternirt wird,

$$\frac{(w_x)_4 - (w_x)_1}{x_4 - x_1} = \left(\frac{\Delta w_x}{\Delta x}\right)_{1,4} \quad \text{für den Punkt} \left\{ \begin{aligned} x_{1,4} &= \frac{x_4 + x_1}{2} \\ (w_x)_{1,4} &= \frac{(w_x)_4 + (w_x)_1}{2} \end{aligned} \right.$$

und analog hiezu erfolgt auch die Feststellung der anderen Punkte

$$\begin{matrix} x_{2,5} & x_{3,6} & x_{4,7} & x_{5,8} & x_{6,9} \\ (w_x)_{2,5} & (w_x)_{3,6} & (w_x)_{4,7} & (w_x)_{5,8} & (w_x)_{6,9} \end{matrix} \quad \text{etc.}$$

Dieser Process wird stets auf der Basis der neu ermittelten Punkte solange wiederholt, bis die entsprechende Continuität eines regelmässigen Verlaufes hergestellt ist, so dass sich die gesuchte Maximaltangente von selbst ergibt.

Auf diese Weise erhält man sodann die Werthe von t für die einzelnen Punkte und demzufolge die denselben jeweilig entsprechenden Werthe der Constante C_1, deren arithmetisches Mittel den rectificirten (ausgeglichenen) Werth liefert.

Mit Hilfe der Form 9) ergeben sich weiter die den einzelnen Punkten entsprechenden Werthe von $2\,C$ aus der Relation

16) $$2\,C = 8\,C_1\,\tau - x$$

in welche bereits der rectificirte Werth von C_1 zu substituiren ist. Der rectificirte Werth von $2C$ folgt sodann gleichfalls aus dem arithmetischen Mittel aller dieser Werthe.

Was endlich die Constante a betrifft, so wird für deren Rectification die aus der Form 3) entspringende, allgemein giltige Relation

17) $$a = \frac{w_x}{1 - 0{\cdot}917676\,.\,\frac{1-t^2}{t}\cdot\tau}\,,\quad \text{worin}\ \frac{t_0}{1-t_0^2}\cdot\frac{1}{\tau_0} = 0{\cdot}917676$$

ist, die geeignete Handhabe bieten, indem für jede einer Altersclasse entsprechende Lebensdauerwahrscheinlichkeit je ein Werth für a sich ergibt. Das arithmetische Mittel aller dieser Werthe bildet sodann in analoger Weise den rectificirten Werth von a. Durch Substitution der rectificirten Werthe von a und C_1 in die Form 11) gelangt man schliesslich auch zur Feststellung der Constante b, als dem rectificirten Werthe von h.

Auf Grundlage der solcherart ermittelten Werthe der Constanten vollzieht sich sodann der umgekehrte Process der Rectification aller Werthe der variablen Grössen t, τ und w_x für die den einzelnen Altersclassen entsprechenden Punkte der Curve.

Lässt man x die aufeinanderfolgenden Alter durchlaufen, so wird die entsprechend transformirte Relation 9)

$$\tau = \frac{x + 2\,C}{8\,C_1}$$

für verschiedene Werthe von x entsprechend rectificirte Werthe für τ liefern, mit deren Hilfe sodann aus der Relation 8) die rectificirten Werthe von t festgestellt werden können. Da nun diese Relation eine transcendente ist so gelangt man hier unter Anwendung einer entsprechenden Ersatzgleichung zum Resultate.

Eine solche mit der erforderlichen Convergenz ihrer Function ausgestattete Ersatzgleichung ist

18) $$t = \mathop{\mathbf{E}}_{\mathfrak{t} \doteq t}\left[\frac{1}{\frac{1}{3}\,l\,\mathfrak{t} - \frac{10}{3}\,l\,(\mathfrak{t}-3) - 6\,l\,\tau}\right] = \mathop{\mathbf{E}}_{\mathfrak{t} \doteq t}\left[\frac{0{\cdot}4342945}{\frac{1}{3}\,lg\,\mathfrak{t} - \frac{10}{3}\,lg\,(\mathfrak{t}-3) - 6\,lg\,\tau}\right]$$

worin l den natürlichen, lg den Briggischen Logarithmus und $\mathfrak{t}$ den Nährungswerth von t bezeichnet.*) Unter Berücksichtigung dieses Resultates, liefert schliesslich die Form 4) die rectificirten Werthe der Ordinaten w_x dieser Curve.

Was die wichtigsten drei Punkte der Curve betrifft, d. i. der Anfangspunkt, Wendepunkt und Tiefpunkt, so werden dieselben in folgender einfacher Weise zum Ausdrucke gelangen.

*) Als Nährungswerth $\mathfrak{t}$ lässt sich hier der ursprüngliche nicht rectificirte Werth von t in praktischer Weise verwenden.

Für den Anfangspunkt in welchem die Abscisse x dem Werthe 0 entspricht, ergibt sich laut Form 9)

19) $\tau_\chi = \frac{2\,C}{8\,C_1}$ daher laut Form 4) $(w_x)_\chi = 2\,C.b.\frac{1-t^2}{8\,t_\chi} + a$ und $x_\chi = 0$

Für den Wendepunkt besitzt τ einen fixen Werth, nachden hier stets $t = 1$ ist. Es ist nämlich

20) $$\tau_a = 0{\cdot}575941$$

demnach ergeben sich für die Coordinaten die Werthe

21) $$x_a = 8\,C_1 . 0{\cdot}575941 - 2\,C \quad \text{und} \quad (w_x)_a = a$$

Für den Tiefpunkt schliesslich, für welchem die Ordinate 0 ist und $\tau_0 = 0{\cdot}19263511$ als fixer Werth gilt, erhalten wir die Werthe

$$x_0 = 8\,C_1 . 0{\cdot}19263511 - 2\,C \quad \text{und} \quad (w_x)_0 = 0.$$

* * *

Ist die Ausgleichung der Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten nach der hier dargestellten Methode vollzogen, so lassen sich die entsprechenden Punkte der Curve der Lebenden, insoferne bloss die Abstände von je einem Jahre in Betracht kommen, also von der Continuität abgesehen wird, in folgender einfacher Weise direct ermitteln:

In der in diesem Werke Lief. IV enthaltenen Abhandlung »Untersuchungen über das Wesen der Invalidität vom Standpunkte des Absterbegesetzes« I. gelangt in der Form 4) die Relation

$$w_x = \frac{L_{x+1}}{L_x}(1 + w_{x+1})$$

zur Darstellung. Die durch dieselbe ausgedrückte Näherung wird jedoch in präciserer Art durch die Relation

$$L_x . w_x = L_{x+1} . w_{x+1} + \frac{L_x + L_{x+1}}{2}$$

gekennzeichnet, weshalb die Anwendung derselben vorzuziehen ist. Es ergibt sich demnach

$$L_{x+1} = L_x . \frac{w_x - \frac{1}{2}}{w_{x+1} + \frac{1}{2}}, \quad L_{x+2} = L_{x+1} . \frac{w_{x+1} - \frac{1}{2}}{w_{x+2} + \frac{1}{2}}, \quad L_{x+3} = L_{x+2} . \frac{w_{x+2} - \frac{1}{2}}{w_{x+3} + \frac{1}{2}}$$

u. s. w., woraus durch entsprechende Substitution die Gleichungen

$$L_{x+2} = L_x . \frac{(w_x - \frac{1}{2})\,(w_{x+1} - \frac{1}{2})}{(w_{x+1} + \frac{1}{2})(w_{x+2} + \frac{1}{2})}, \quad L_{x+3} = L_x . \frac{(w_x - \frac{1}{2})\,(w_{x+1} - \frac{1}{2})\,(w_{x+2} - \frac{1}{2})}{(w_{x+1} + \frac{1}{2})\,(w_{x+2} + \frac{1}{2})(w_{x+3} + \frac{1}{2})}, \text{etc.}$$

$$L_{x+n} = L_x . \frac{(w_x - \frac{1}{2})\,(w_{x+1} - \frac{1}{2}) \ldots\ldots (w_{x+n-1} - \frac{1}{2})}{(w_{x+1} + \frac{1}{2})\,(w_{x+2} + \frac{1}{2}) \ldots\ldots (w_{x+n} + \frac{1}{2})}$$

entspringen. Wir gelangen daher zu der allgemeinen Form

$$L_{x+n} = L_x . \frac{(w_{x+n-1} - \frac{1}{2})!}{(w_{x+n} + \frac{1}{2})!}$$

in welcher also n die Werthe von $1, 2, 3, \ldots\ldots n$ durchläuft. Auf diese Weise ist man in der Lage, aus der gegebenen Anzahl der Lebenden eines einzelnen Alters und mit Hilfe der entsprechenden ausgeglichenen Lebenswahrscheinlichkeiten die Anzahl der Lebenden für alle Altersclassen zu bestimmen. Für den continuirlichen Verlauf der Curve der Lebenden kann natürlich diese Methode keine Anwendung finden.

Die Coursreserve als Präventivmittel gegen die Schwankungen der Capitalsrentabilität infolge sinkenden Zinsfusses.

III.

In der vorigen Abhandlung über dieses Thema haben wir dargethan, dass die Aufrechterhaltung der Capitalsrentabilität durch die successive Ansammlung der Zinsengewinne zu bewirken ist. Dies kann sich natürlich bloss auf die in Anlagewerthen investirten Capitalien beziehen, indem diejenigen, welche in Hypotheken angelegt sind, von dem Einflusse des sinkenden Zinsfusses gewöhnlich erst dann in Mitleidenschaft gezogen werden, wenn die ungünstige Rentabilität öffentlicher Werthe ein grösseres Zuströmen des Capitales auf dieses Gebiet der Anlage hervorruft und die Reduction des Zinsfusses auf ein bestimmtes Niveau sich bereits allgemein geltend macht.

Bei Lebensversicherungs-Gesellschaften, welche den grössten Theil ihrer Capitalien in Hypotheken angelegt haben, wird daher der Einfluss der Rentabilitätsschwankungen sich bloss in dem Masse fühlbar machen, als der Privatcredit gegen hypothekarische Sicherheit sich verbilligt, denn nur derjenige Theil der Anlage, welcher in öffentlichen Werthen fundirt erscheint, bedarf einer entsprechenden Reserve zum Zwecke der Aufrechterhaltung der Rentabilität.

Der Umstand nämlich, dass die Hypothekaranlage die Investition des Capitales zu einem bestimmten Zinsfusse auf eine lange Dauer involvirt bewirkt eine gewisse Stetigkeit der Rentabilität in dieser Hinsicht, so dass auf diese Weise von vornherein dafür gesorgt ist, dass jene der diesbezüglichen Zinsfussgrundlage entsprechende Rentabilität der Prämienreserve fonds nicht nothleidend werde. Sobald aber die sinkende Tendenz des Anlagezinsfusses bereits auf den Privatcredit gegen hypothekarische Sicherheit überzugreifen beginnt, dürften die allgemeinen Rentabilitätsverhältnisse bereits die nöthige Regulirung der Zinsfussgrundlage der Lebensversicherung bewirkt haben.

Die hypothekarische Anlage besitzt daher für die Lebensversicherung in zweifacher Beziehung einen unanfechtbaren Vorzug, indem sie einerseits was ihre Securität anbelangt, jeder anderen Capitalsinvestition vorzuziehen ist, andererseits aber hinsichtlich der Rentabilität des Capitals eine Stetigkeit sichert, welche durch keine andere Anlage erzielt werden kann. Aber auch vom finanzwirthschaftlichen Gesichtspunkte ist dieselbe für die Lebens versicherung mehr gerechtfertigt als jede andere, da sie einen langen Credit im specifischen Sinne des Wortes bildet. Indem nämlich die Verbindlichkeiten, welche durch die Lebensversicherung eingegangen werden, sich gleichfalls auf lange Fristen erstrecken, wird auf diese Weise auch den finanztechnischen Anforderungen, welche die Combination langfristiger Ver-

bindlichkeiten mit langen Crediten als Fundament einer geregelten Finanzgebahrung bedingen, thunlichst Genüge geleistet.

Aus diesem Grunde ist in der Lebensversicherung die Investition der Capitalien durch Hypothekenanlage besonders empfehlenswerth und wäre es zu wünschen, wenn diese Anlageform hier in ausgedehnterem Masse zum Durchbruche gelangen würde. Diese Erkenntniss macht sich auch in der deutschen Lebensversicherung in hohem Masse geltend, indem hier bei der Wahl der Capitalsanlage diese Politik einer gesunden Vermögensverwaltung beobachtet wird, welche im Interesse der Versicherten das Wesen der Securität obenan stellt.

Die deutschen Lebensversicherungs-Gesellschaften, welche nahezu dreiviertel Theile ihrer Fonds in Hypotheken angelegt haben, unterscheiden sich damit vortheilhaft von solchen, die zur Erzielung möglichst hoher Zinsen zu oft nicht ganz sicheren, den empfindlichsten Werthschwankungen ausgesetzten Anlage- und Speculationspapieren greifen. An diese Gesellschaften tritt die Nothwendigkeit der Coursreservebildung um so dringender heran, je weniger sie es verstanden haben, die Zinsengewinne der früheren Jahre zur Kräftigung ihrer Sicherheitsfonds zu verwenden. Die Anlage der Fonds in Hypotheken allein macht die Sicherung der Capitalsrentabilität mittelst Schaffung einer Coursreserve entbehrlich und beschränkt sich eine solche daher bloss auf diejenigen Capitalien, welche in öffentlichen, Coursschwankungen ausgesetzten Anlagewerthen hinterlegt sind. Hier macht sich nun die Anforderung geltend, jenen Zinsfuss aufrechtzuerhalten, welcher dem alten Versicherungsstocke zugrunde gelegt ist. Da nun im gegenwärtigen Zeitpunkte das Niveau der Rentabilität diesem Zinsfusse in vieler Beziehung nur knapp entspricht, insbesondere wenn der aus der regelmässigen Stundung der Prämien sich ergebende Ausfall an Intercalarzinsen mit in Betracht kommt, so tritt an die Lebensversicherungs-Gesellschaften die Nothwendigkeit heran, die Herabsetzung des rechnungsmässigen Zinsfusses schon jetzt ins Auge zu fassen, um in die Lage zu kommen, aus der Differenz zwischen diesem und der derzeitigen Rentabilität die entsprechende Coursreserve anzusammeln. Es wäre verfehlt, diesbezüglich jenen Zeitpunkt abwarten zu wollen, bis das gesunkene Niveau der Capitalsrentabilität diese Massregel durch empfindliche Zinsenverluste aufdrängt, da in diesem Falle wohl den neuen Versicherungen durch Herabsetzung des rechnungsmässigen Zinsfusses Genüge geleistet werden könnte, doch hinsichtlich Aufrechterhaltung der erforderlichen Rentabilität jener Fonds, welche zur Deckung der aus dem alten Versicherungsstocke übernommenen Verpflichtungen dienen, in keiner Weise vorgesorgt wäre.

So lange die Abwicklung des alten Stockes nicht als vollzogen erschiene, müsste dann die Gesellschaft aus eigenen Fonds jenen Zinsenabgang decken, welcher aus der Rentabilitätsabnahme der Fonds erwachsen würde.

Aber nicht nur die bestehenden Prämienreservefonds erfordern eine Reserve zur Aufrechterhaltung der Rentabilität, sondern auch die aus dem

alten Versicherungsstocke sich ergebenden ferneren Prämienreserven, insoferne auch mit dem Abschlusse desselben ein auf diese Weise erzeugtes weiteres Wachsthum dieser Fonds, wenigstens in der nächsten Zeitperiode nicht ausgeschlossen ist und der Zinsenausfall sich daher nicht nur in relativem sondern auch in absolutem Sinne vergrössern kann. Je nach der Stabilität der Versicherungen und dem Altersverhältniss der Versicherten des alten Stockes werden sich während dessen Abwicklung die demselben entsprechenden Prämienreservefonds in ihrem jeweiligen Stande verhalten, und auf diese Art ein mehr oder weniger intensives Anwachsen der Zinsenausfälle involviren.

Erst in einem späteren Stadium der Abwicklung dieses für sich abgeschlossenen Versicherungsstockes wird eine Entlastung der Reservefonds, respective jener zur Aufrecherthaltung dessen angemessener Rentabilität dienenden Coursreserve sich vollziehen, und zwar wird dies der Fall sein, sobald die zu Fälligkeiten heranzuziehenden Prämienreserven, den Prämienreservenzuwachs der übrigen Versicherungen zu übersteigen beginnen. Dieser Zeitpunkt hängt jedoch, wie bereits bemerkt, von dem Altersverhältniss und der Selection der Versicherten sowie von der Stabilität der Versicherungen ab, so dass das erforderliche Ausmass der Coursreserve um so grösser sein muss, je günstiger sich die Qualität des betreffenden Versicherungsstockes gestaltet. Je rascher also durch Storno und Fälligkeiten sich bei einer Gesellschaft der Versicherungsbestand auflöst, um durch Neuproduction sich wieder zu ergänzen, desto kürzere Frist wird die Abwicklung eines solchermassen abgeschlossenen Stockes in Anspruch nehmen. Die Folge hievon ist, dass in diesem Falle eine raschere Verwendung der bezüglichen Reservefonds und somit auch eine Abkürzung der mit Rentabilitätseinbussen verbundenen Periode erfolgt, also eine entsprechend geringere Coursreserve erforderlich erscheint.

Eine Lebensversicherungs-Gesellschaft, welche einen angemessen stabilen Versicherungsstock von günstiger Selection besitzt, soll daher insbesondere darauf sehen, ihre Fonds dem Privatcredit gegen hypothekarische Sicherheit zuzuwenden, nachdem sie hiedurch auf natürlichem Wege zu einer möglicht stabilen Rentabilität derselben auf eine lange Dauer von Jahren gelangt.

Dagegen werden Gesellschaften, deren Fonds in öffentlichen Werthpapieren angelegt sind, infolge der günstigen Beschaffenheit ihres Versicherungsstockes relativ am meisten die Consequenzen des sinkenden Zinsfusses zu tragen haben, da die Abwicklung ihres alten Versicherungsstockes desto längere Zeit in Anspruch nehmen wird, je besser die Beschaffenheit desselben ist. Sie werden daher an die Reduction des rechnungsmässigen Zinsfusses bereits in einem Zeitpunkte schreiten müssen, wo die Rentabilität des Capitales der alten rechnungsmässigen Zinsfussgrundlage noch leidlich die Waage hält, denn sie müssen zur Zeit dafür sorgen, zwischen der Rentabilität und dem rechnungsmässigen Zinsfusse einen entsprechenden Abstand zu schaffen, um die aus demselben entspringenden, successive aber

versiegenden Zinsfussüberschüsse zur Ansammlung einer hinreichenden Coursreserve zu verwenden.

Die Gesellschaften kommen auf diese Weise in die Lage, aus der Differenz zwischen der derzeitigen Rentabilität und der ermässigten neuen Zinsfussgrundlage einen Zinsengewinn zu erzielen, mittelst dessen der später zu gewärtigende Zinsenverlust des alten Stockes seine Deckung finden kann. Je später an die Reduction des rechnungsmässigen Zinsfusses geschritten wird, desto geringer wird die Chance, der erforderlichen Coursreserveansammlung Rechnung tragen zu können, abgesehen davon, dass die Aufrechthaltung der alten Zinsfussgrundlage allein schon bei knapp bemessener Rentabilität die Möglichkeit von unvermittelt eintretenden Zinsenverlusten bedingt. Diese Massregel ist daher bereits zu einer Zeit geboten, bevor das Niveau der alten Zinsfussgrundlage durch die Rentabilität unterboten wird.

Einen möglichst zuverlässigen Anhaltspunkt für die aproximative Schätzung der mittleren Abwicklungsdauer eines Versicherrngsstockes liefert folgender Vorgang: Wird der jeweilige Capitalsbestand an Versicherungen durch deren Abgang in einem Jahre abzüglich der Storni der einjährigen Versicherungen dividirt, so ergibt sich die jeweilige mittlere Abwicklungsdauer des betreffenden Bestandes. Berechnet man nun diese Zahlen beispielsweise für die einzelnen Jahre des verstrichenen Decenniums, und zieht aus denselben das arithmetische Mittel, so erhält man die mittlere Abwicklungsdauer des Versicherungsstockes.

Die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden als Element einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und die hieraus entspringenden Conclusionen.

VI.

Nachdem wir die geometrisch analytische Beschaffenheit der Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten hinreichend gekennzeichnet haben, übergehen wir nun zur Untersuchung der Curve der Lebenden.

Bezeichnen wir den Abstand, um welchen die Curve der Lebenden laut Fig. 2 in die positive Sphäre des Achsensystems verschoben wurde mit A, so übergeht die in Form s) dargestellte Gleichung I (die Gleichung II ist, wie bereits bemerkt worden, mit Rücksicht auf ihre functionelle Beschaffenheit imaginär) in folgende:

18)
$$L_x - A = C_3 \frac{(t-1) \cdot e^{\frac{1}{6t}}}{t^{\frac{7}{18}}(t-3)^{\frac{10}{9}}}$$

während
$$x + 2C = 8C_1 \frac{t^{\frac{1}{18}} \cdot e^{-\frac{1}{6t}}}{(t-3)^{\frac{5}{9}}}$$

als gemeinsame Abscisse beider Curven unverändert bleibt. Durch Multiplication dieser beiden Gleichungen erhalten wir nun

19)
$$(L_x - A)(x + 2C) = 8C_1 \cdot C_3 \frac{t-1}{t^{\frac{1}{3}} \cdot (t-3)^{\frac{5}{3}}}$$

und falls wir hierin der Kürze halber

20)
$$\frac{t-1}{t^{\frac{1}{3}}(t-3)^{\frac{5}{3}}} = \sigma$$

setzen, und die Gleichung durch die Form 9), d. i. $x + 2C = 8C_1 \cdot \tau$ dividiren, ergibt sich

21)
$$L_x - A = C_3 \cdot \frac{\sigma}{\tau}$$

als Resultat. Hieraus lässt sich nun auch der Werth von A feststellen. Da nämlich im Tiefpunkte $L_x = 0$ ist und in demselben sowohl τ als auch σ fixe Werthe besitzen, so gelangen wir zu folgender Relation

22) $A = -C_3 \frac{\sigma_0}{\tau_0}$ und mit Rücksicht auf die Werthe $\tau_0 = 0{\cdot}192635$, $\sigma_0 = -0{\cdot}263550$

$$A = C_3 \cdot 1{\cdot}3681306$$

welcher Werth zugleich als derjenige der Ordinate im Wendepunkte fungirt.

Bezeichnen wir weiter die Zahl jener der Beobachtung unterworfenen Lebenden zur Zeit ihrer Geburt mit L_α, so lässt sich auf Grundlage derselben die Constante C_3 bestimmen.

Im Anfangspunkte, d. i. $x = 0$ ist bekanntlich $\tau_\alpha = \frac{2C}{8C_1}$, daher der Werth von t_α bekannt, so dass auch σ_α ermittelt werden kann.

Die Gleichung 21) wird nun in diesem Punkte die Form

$$L_\alpha = C_3 \frac{\sigma_\alpha}{\tau_\alpha} + A = C_3 \left(\frac{\sigma_\alpha}{\tau_\alpha} - \frac{\sigma_0}{\tau_0}\right)$$

annehmen, aus welcher sich die Relation

23) $$C_3 = \frac{L_\alpha}{\frac{\sigma_\alpha}{\tau_\alpha} - \frac{\sigma_0}{\tau_0}}$$

ergibt.

Der Werth C_3 wird jedoch auch für jedes andere Alter mittelst einer analogen Form sich ermitteln lassen, da die allgemeine Relation

24) $$L_x = C_3 \left(\frac{\sigma}{\tau} - \frac{\sigma_0}{\tau_0}\right)$$

besteht, welche für alle Alter gleiche Werthe von C_3 bedingt. Sind daher die Coordinaten eines beliebigen Punktes gegeben, so erhält man mittelst der Form

$$\tau = \frac{x + 2C}{8C_1}$$

die Werthe von t und σ und mithin auch den Werth von C_3.

Solchermassen ist nun auch die Handhabe für die mathematische Construction der Curve der Lebenden gegeben, u. zw. auf Grundlage jener der Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten entsprechenden Constanten, so dass die zur Bestimmung derselben erforderlichen Bedingungen zugleich der Curve der Lebenden, welche für sich bloss eine Bedingung mehr in Anspruch nimmt, Genüge leisten.

Der Umstand, dass die Form

25) $$C_3 = \frac{L_x}{\frac{\sigma}{\tau} - \frac{\sigma_0}{\tau_0}}$$

für jedes beliebige Alter den gleichen Werth für C_3 liefern muss, bildet die Grundlage für die mathematische Ausgleichung der Mortalitätscurve, indem für alle statistisch gegebenen Punkte die Werthe von C_3 berechnet und aus denselben das arithmetische Mittel bestimmt wird.

Der auf diese Weise ausgeglichene Werth von C_3 übt dann umgekehrt wieder seinen Einfluss auf den Verlauf der Curve aus, indem er die Rectification der den einzelnen Punkten entsprechenden, von einander abhängigen Grössen bewirkt.

Von Interesse ist hier auch der Werth der Tangente für die Curve der Lebenden. Um diesen Werth zu bestimmen, greifen wir auf die bekannte Relation a) zurück, welche mit Rücksicht auf die in Rechnung gelangte Constante h, respective deren rectificirten Werth b der Form

26) $$\frac{L'_x}{L_x} = -\frac{w'_x}{w_x} - \frac{b}{w_x}$$

entspricht. Aus dieser ergibt sich nun durch Substitution der bekannten Werthe von w'_x und w_x die Relation

27) $$L'_x = \frac{L_x}{x + 2\,C} \cdot \frac{t+1}{t-1}$$

und unter Bezugnahme auf die Formen 9) und 24) das Resultat

28) $$\frac{d\,L_x}{dx} = \frac{C_3}{8\,C_1}\,\frac{\left(\frac{\sigma}{\tau} - \frac{\sigma_0}{\tau_0}\right)\frac{t+1}{t-1}}{\tau}$$

welches sich in analoger Weise auch durch Anwendung der Form y) darstellen lässt. Darnach ist also im Tiefpunkte die Tangente ebenso wie bei der Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten gleich Null, während dieselbe hier für den Wendepunkt unendlich wird; d. h. die Tangente der Curve der Lebenden schliesst im Wendepunkte mit der Abscissenachse den Winkel von 90 Graden ein.

Was nun schliesslich die Fläche dieser Curve betrifft, so äussert sich in der Form a) diejenige Beziehung, welche diesbezüglich von besonderem Interesse ist. Diese Form bringt nämlich zum Ausdrucke, dass die von der Curve der Lebenden eingeschlossene, von einer beliebig gegebenen Ordinate derselben bis zum Tiefpunkte reichende Fläche, durch das Product dieser Ordinate und der einer gleichen Abscisse entsprechenden Ordinate der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer ausgedrückt erscheint. Der betreffenden Form gemäss ergibt sich nämlich, wenn die in Rechnung gebrachte Constante h bezw. b mitberücksichtigt wird, aus

29) $L_x \,.\, w_x = e^{-b\int\frac{dx}{w_x}}$ durch Integration $b\int L_x\,dx = -\,e^{-b\int\frac{dx}{w_x}} + Const.$

daher, da *Const.* die constante Gesammtfläche zwischen dem Anfangspunkte und dem Tiefpunkte bedeutet, welche wir mit F bezeichnen wollen, die Relation

30) $$L_x \,.\, w_x = F - b\int L_x\,dx$$

gilt, worin also obige Behauptung ihre Bestätiguug findet. Berücksichtigt man nun hier die Verschiebung und benützt zur Substitution die vereinfachten Formen für die Ordinaten der beiden Curven

31) $L_x = C_3\left(\frac{\sigma}{\tau} - \frac{\sigma_0}{\tau_0}\right)$, 32) $w_x = a\left(1 - \frac{1-t^2}{1-t_0^2}\cdot\frac{\tau\,.\,t_0}{\tau_0\,.\,t}\right)$

so ergibt sich für die jeweilige Fläche, welche von der Ordinate eines beliebigen Punktes der Curve der Lebenden und deren Tiefpunkte begrenzt ist die Form

33) $$L_x \,.\, w_x = a \,.\, C_3 \left[\frac{\sigma}{\tau} - \frac{\sigma_0}{\tau_0}\right]\left(1 - \frac{1 - t^2}{1 - t_0^2} \cdot \frac{\tau \,.\, t_0}{\tau_0 \,.\, t}\right)$$

durch welche die jeweilige Summe der Lebenden zum Ausdrucke gelangt.

Für den Wendepunkt liefert diese Form den Werth

34) $$L_x\, w_x = -C_3 \,.\, a \,.\, \frac{\sigma_0}{\tau_0} = A \,.\, a \quad , \quad \text{daher 35)} \quad b\int L_x\, dx = F - A \,.\, a$$

die vom Anfangspunkte bis zum Wendepunkte der Curve der Lebenden reichende Fläche.

Zieht man die Beschaffenheit der Gleichungen 4) und 19) in Betracht, so findet man, dass die Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten durch die Gleichung einer Geraden mit variablen Constanten, die Curve der Lebenden durch die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel mit variabler Achse am einfachsten dargestellt erscheint.

Dieser Umstand ist von hervorragendem Interesse, nicht nur mit Rücksicht auf die Beurtheilung des Wesens dieser beiden Curven, sondern auch auf unsere bekannte geometrische Definition der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren wissenschaftliche Begründung hier zum erstenmale durch ein praktisches Beispiel erhärtet wird.

Aus unseren Untersuchungen geht überhaupt hervor, dass alle bisher angewendeten Näherungsmethoden bezüglich der Ausgleichung der Mortalitätscurven, bloss eine Regelung hinsichtlich der Continuität des Verlaufes derselben zu bewirken vermögen, indem sie sich ausschliesslich auf die Krümmungsverhältnisse dieser Curven beschränken, hingegen auf das Wesen der mathematischen Gesetzmässigkeit der Absterbeordnung keinen Einfluss zu nehmen geeignet sind. Erst durch die Darstellung des betreffenden mathematischen Gesetzes auf analytisch-deductivem Wege ist es möglich geworden, jene Anhaltspunkte festzustellen, welche die Wahrscheinlichkeit des Mortalitätsverlaufes bedingen. Indem wir von dem Begriffe der Lebenswahrscheinlichkeiten ausgingen, ist es uns gelungen, deren Summen durch eine geschlossene mathematische Form allgemein zum Ausdrucke zu bringen und auf diese Weise die Beziehung zwischen der Curve der Lebenden und der Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten durch eine bestimmte mathematische Form zu kennzeichnen, welche in ihrem Wesen ein generelles Element der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bildend, es mit Rücksicht auf unsere seit Jahrzenten betriebene wissenschaftliche Erforschung der allgemeinen Integration dieser Formen ermöglichte, diesbezüglich zu einem in jeder Hinsicht befriedigenden Resultate zu gelangen. Hiedurch wird die wissenschaftliche Aufrollung des ganzen versicherungstechnischen Systemes bewirkt, so dass die von uns angestrebte mathematisch-analytische Ausgestaltung desselben die Handhabe zu bieten geeignet ist, um sämmtliche die Lebens- und Rentenversicherung betreffenden mathematischen Formen in ihrer gegenseitigen Beziehung analytisch abzuleiten und zu begründen.

Die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden als Element einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und die hieraus entspringenden Conclusionen.

VII.

Aber auch die weitere Beschaffenheit sowohl der Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten als auch der Curve der Lebenden ausserhalb der in unserer bisherigen Rechnung in Betracht gezogenen Grenzen ist für die versicherungstechnische Wissenschaft von Wichtigkeit.

Während die Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten in der positiven Sphäre von ihrem Tiefpunkte angefangen wieder aufsteigt um in dem Punkte $x + 2C = 0$ zu einer auf der Abscissenachse senkrecht stehenden Geraden asymptotisch zu verlaufen, nähert sie sich in der negativen Sphäre ebenfalls asymptotisch einer unter dem Winkel arctg $\left(-\frac{h}{3}\right)$ zur Abscissenachse geneigten Geraden und kehrt, sich im Unendlichen wendend, asymptotisch zur Kehrseite dieser Geraden wieder in die positive Sphäre zurück, hier die Curve der Sterbenswahrscheinlichkeiten bildend.

Aehnlich ist der Verlauf der Curve der Lebenden, nur bildet dieselbe aus dem Unendlichen zurückkehrend, in analoger Weise die Curve der Verstorbenen.

Bemerkenswerth ist in dieser Beziehung der Umstand, dass die vermittelnde Variable t in ihren correspondirenden reciproken Werthen diesem ausserhalb der gegebenen Grenzen sich äussernden Curvengebilde Rechnung trägt.

Ueber die sonstige Bedeutung des Verlaufes dieser beiden Curven gedenken wir späterhin weitere Untersuchungen anzustellen und begnügen uns vorläufig mit der Feststellung der Thatsache, dass wir es in diesem Falle mit einer allgemeinen Form der Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu thun baben, welche unter den möglichsten functionellen Bedingungen der Hilfsvariablen t das ganze System der Wahrscheinlichkeitscurven umfasst

Die ursprünglichen der Rechnung zugrunde gelegten Differentialgleichungen c) und d)

$$\frac{L''_x}{L_x} = f(x) \qquad \text{und} \qquad \frac{w''_x}{w_x} = \frac{2}{(x+2C)^2} - f(x) = \beta$$

liefern diesbezüglich die Handhabe für eine entsprechende Beweisführung.

Sehen wir der Einfachheit halber von der Verschiebung des Achsensystems ab, so haben wir die bekannten Formen

$$L_x = C_3 \frac{(t-1)\,\Theta^{\frac{1}{6t}}}{t^{\frac{7}{18}}.(t-3)^{\frac{10}{9}}} \qquad \frac{dL_x}{dx} = \frac{C_3}{8C_1}\,\frac{(t+1)\,\Theta^{\frac{1}{3t}}}{t^{\frac{4}{9}}\,(t-3)^{\frac{5}{9}}}$$

demnach erhalten wir mit Rücksicht auf den Werth von $x+2C$ durch Division die Form

$$\frac{L'_x}{L_x} = \frac{t+1}{t-1}\cdot\frac{1}{x+2C}\text{, welche mit Hilfe von } \frac{L''_x}{L_x} = \left(\frac{L'_x}{L_x}\right)' + \left(\frac{L'_x}{L_x}\right)^2$$

d. i. der bekannten identischen Gleichung und unter Berücksichtigung der aus der Form q) entspringenden Relation

$$36)\qquad \frac{dt}{dx} = -\frac{t^2(t-3)}{t^2+1}\cdot\frac{2}{x+2C}$$

zu der Gleichung

$$37)\qquad \frac{L''_x}{L_x} = \frac{2}{(x+2C)^2}\left(1-\frac{(t-3)\,t}{t^2+1}\right) = f(x)$$

führt, so dass der Werth von $f(x)$ dargestellt erscheint. In der gleichen Weise gelangt man zum Werthe von β, wenn man die Gleichungen für w_x und w'_x in Betracht zieht.

Es ist nämlich

$$w_x = b\cdot\frac{1-t^2}{8t}(x+2C) \qquad \text{und} \qquad \frac{dw_x}{dx} = b\left(\frac{(1+t)^2}{8t}-1\right)$$

demzufolge ergibt sich für den zweiten Differentialquotienten von w_x

$$\frac{d^2w_x}{dx^2} = \frac{b}{8}\,\frac{t^2-1}{t^2}\,\frac{dt}{dx} \quad \text{daher} \quad \frac{d^2w_x}{dx^2} = -\frac{b}{4}\,\frac{(t^2-1)(t-3)}{t^2+1}\cdot\frac{1}{x+2C}$$

mit Rücksicht auf die Form 36), woraus sich endlich die Gleichung

$$38)\qquad \frac{w''_x}{w_x} = \frac{2}{(x+2C)^2}\cdot\frac{(t-3)\,t}{t^2+1} = \beta \quad \text{und daher} \quad f(x)+\beta = \frac{2}{(x+2C)^2}$$

unter Bezugnahme auf die Form 37) ergibt. Die beiden Formen 37) und 38) lassen sich nun derart modificiren, dass die Variable x vollständig ausser Rechnung gelangt, und zwar ergibt sich aus

$$\frac{d^2L_x}{dx^2} = L_x\cdot\frac{3t+1}{t^2+1}\cdot\frac{2}{(x+2C)^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2w_x}{dx^2} = w_x\cdot\frac{(t-3)\,t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{(x+2C)^2}$$

durch Division mit der zum Quadrat erhobenen Form 36)

$$\frac{dt^2}{dx^2} = \frac{t^4.(t-3)^2}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{4}{(x+2C)^2}$$

das Resultat

$$39)\qquad \frac{d^2L_x}{dt^2} = L_x\cdot\frac{(3t+1)(t^2+1)}{2t^4.(t-3)^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2w_x}{dt^2} = w_x\cdot\frac{t^2+1}{2t^3(t-3)}$$

In diesen Formen ist nun x als gemeinsame Abscisse der beiden Curven aus der Rechnung eliminirt, indem sowohl L_x als auch w_x durch eine Function von t allein ausgedrückt erscheint Da nun aber t eine von dem Verhältnisse zwischen w_x und x abhängige Function bedeutet, so geht daraus

hervor, dass bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung allgemein jene Variable, nach welcher die Derivation vollzogen ist, auch als Function zweier von einander abhängigen Variablen gedacht werden kann.

Aus den Formen 39) beziehungsweise durch Combination der Formen 36) und 38) ergeben sich nun weiter die interessanten Relationen

40) $$\frac{d^2 L_x}{L_x} = \frac{d^2 w_x}{w_x} \cdot \frac{\frac{1}{t}+3}{t-3} \quad \text{und} \quad t = k \,.\, \Theta^{-\int \beta (x+2C)\, dx}$$

welche das Wesen dieser Formen in möglichst einfacher Weise zu kennzeichnen geeignet sind, in ihrer mathematischen Beschaffenheit unsere zuvor ausgesprochene Ansicht über die Bedeutung dieser Differentialgleichungen zweiter Ordnung bestätigend.

Es ergibt sich nämlich aus der Gleichung 40) unter Anwendung der bekannten Form

41) $$\frac{\frac{dL_x}{dx}}{b+\frac{dw_x}{dx}} = -\frac{L_x}{w_x} \quad \text{die Relation} \quad \frac{dl\,\frac{dL_x}{dx}}{dl\left(b+\frac{dw_x}{dx}\right)} = -\frac{\frac{1}{t}+3}{t-3}$$

welche mit der bekannten Relation y)

$$\frac{dl\, L_x}{dl(x+2C)} = \frac{t+1}{t-1} \quad \text{mit Rücksicht auf} \quad \frac{L''_x}{L_x} = \frac{dl\, L'_x}{dx} \cdot \frac{dl\, L_x}{dx}$$

als identische Form, die den Variablen L_x und w_x entsprechenden Functionen von einander scheidet.

Wir gelangen auf diese Weise zu folgenden allgemein giltigen Relationen.

42) $$t \cdot \frac{L''_x}{L_x} - \frac{1}{t} \cdot \frac{w''_x}{w_x} = -\frac{6}{(x+2C)^2} \quad , \quad \frac{L''_x}{L_x} + \frac{w''_x}{w_x} = \frac{2}{(x+2C)^2}$$

worin t eine bestimmte Function der allgemeinen Form $(x+2C)^2 f(x)$ bedeutet, so dass die Beziehung zwischen der Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten und der Curve der Lebenden zugleich eine allgemeine Form der Differentialgleichungen zweiter Ordnung repräsentirt, welche unter Supposition verschiedener functioneller Bedingungen für die vermittelnde Variable t, allen Anforderungen entspricht. Der einzige Unterschied derselben von der in unserer allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen höherer Ordnung aufgestellten Grundform besteht in dem Umstande, dass hier $y = -L_x$ und $\xi = -w_x$ gesetzt wurde, daher für diese beiden Variablen hier negative Werthe in Betracht kommen.

Die beiden Grundformen

$$L_x \,.\, w_x = \Theta^{-\int \frac{dx}{w_x}} \quad \text{und} \quad y \,.\, \xi = -\Theta^{\int \frac{dx}{\xi}}$$

sind daher gleichen Ursprunges und besitzen beide eine allgemeine Bedeutung hinsichtlich der Beschaffenheit der Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Der Unterschied besteht nur darin, dass die Differentialquotienten von y und ξ überall positiv sind, wo die Differentialquotienten von L_x und w_x sich negativ gestalten und umgekehrt, dort wo y und ξ negative Differentialquotienten aufweisen, für L_x und w_x dieselben positiv erscheinen. Daraus geht hervor, dass bloss die Lage der bezüglichen Curvenpaare mit Bezug auf das Achsensystem eine entgegengesetzte ist.

Es ist nämlich im Gegensatze zum Wesen jener die Beziehung zwischen der Curve der Lebenden und der Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten betreffenden Grundform*) der Ursprung der zweiten, sich auf y und ξ beziehenden, in der Reihe

$$\xi = \Delta x \cdot \left(\frac{y-\Delta y}{y} + \frac{y-2\Delta y}{y} + \frac{y-3\Delta y}{y} \ldots\ldots\right)$$

resp.

$$\xi - \Delta\xi = \Delta x \cdot \left(\frac{y-2\Delta y}{y-\Delta y} + \frac{y-3\Delta y}{y-\Delta y} + \frac{y-4\Delta y}{y-\Delta y} \ldots\ldots\right)$$

zu suchen, somit ergibt sich

$$\xi = \Delta x \cdot \frac{y-\Delta y}{y}\left(1 + \frac{y-2\Delta y}{y-\Delta y} + \frac{y-3\Delta y}{y-\Delta y} \ldots\ldots\right) = \frac{y-\Delta y}{y}\left(\Delta x + \xi - \Delta\xi\right)$$

und für unendlich kleine Intervalle

$$\xi = \frac{y-dy}{y}\left(dx + \xi - d\xi\right) \text{ woraus schliesslich } y\,.\,\xi = e^{\int\frac{dx}{\xi}}$$

hervorgeht. Mit dieser Relation correspondiren nun bekanntlich die beiden Differentialgleichungen

$$y'' = y\,.f(x) \qquad \text{und} \qquad \xi'' = \xi\,.\,\beta$$

wobei zwischen $f(x)$ und β in analogem Sinne die bekannte Beziehung

$$\beta + f(x) = \frac{2}{(x+2C)^2}$$

besteht, unbeschadet welcher β oder $f(x)$ beliebige Functionen von x darstellen können.

Was die mathematische Construction dieser Curven betrifft, unterliegt dieselbe den gleichen Bedingungen, wie jene der Mortalitätscurven. Die Constanten sind auch hier, falls eine grössere Anzahl von statistisch gegebenen Punkten als Basis für die Construction dient, einer Ausgleichung unterworfen, welche bei gleichen Abscissen-Intervallen in der Feststellung des arithmetischen Mittels der von einander etwa abweichenden Constantenwerthe der einzelnen Punkte besteht. Nur dann, wenn die Abscissen-Intervalle der gegebenen Punkte einander nicht proportional sind, ist die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate hier erforderlich.

*) Vergleiche „Allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung" III. (Anhang zu Lieferung V. dieses Werkes) Seite 22 und 23.

Die allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und deren Bedeutung für die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie.

I.

In unserer das Wesen des mathematischen Absterbegesetzes betreffenden Abhandlung unter dem Titel »Die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden als Element einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und die hieraus entspringenden Conclusionen« haben wir dargethan, dass jene diesbezüglich geltende Grundform nicht allein das Absterbegesetz zu kennzeichnen vermag, sondern auch in ihrer functionellen Beschaffenheit eine allgemeine Bedeutung hinsichtlich der Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung besitzt. Dieselbe theilt nämlich mit jener die allgemeine Integration dieser Formen betreffenden Grundform*) den gleichen Ursprung, so dass alle das allgemeine Absterbegesetz betreffenden Resultate ebenso im allgemeinen Sinne Anwendung finden können, sobald die Bedindungen hiefür der Rechnung zu Grunde gelegt werden. Folgende Untersuchungen mögen hiefür den Beweis liefern.

In unserer Theorie über die allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung wird die Darstellung der entsprechenden Resultate in erschöpfender Weise durchgeführt, jedoch für jede der beiden in Beziehung zueinander stehenden Curven

$$1) \qquad y'' = y \,.\, f(x) \qquad \text{und} \qquad \xi'' = \xi \,.\, \beta$$

eine andere vermittelnde Variable in Anwendung gebracht. Auf diese Weise ergeben sich Relationen, welche für die erstere Curve durch Function von ω, für die letztere Curve durch Functionen von Φ, ihre Darstellung finden, obzwar ω und Φ Abhängige von einer dritten Variablen sind, welche ebenso wie bei jener das Absterbegesetz betreffenden Grundform auch hier als gemeinsame vermittelnde Variable beider Curven zu fungiren die Aufgabe hat. Zur Begründung dessen wollen wir die entsprechenden Relationen ableiten. Bekanntlich lautet die bezügliche allgemeine Grundform

$$2) \qquad y \,.\, \xi = e^{\int \frac{dx}{\xi}} \quad \text{respective} \quad \frac{y'}{y} = -\frac{\xi'}{\xi} + \frac{1}{\xi}$$

welche in Verbindung mit obigen Gleichungen zu der Relation

$$3) \qquad \xi' = +\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{\xi}{x+2C}\right)^2}$$

*) Siehe „Allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung", Seite 23. (Anhang zur Lieferung IV, V und VI.)

führt. Substituirt man nun hierin analog zu der dem Absterbegesetze entsprechenden Form f) den Werth

$$\frac{x+2C}{4\xi}=tg\ u$$

so ergibt sich als Werth für den Differentialquotienten von ξ

$$\frac{d\xi}{dx}=\frac{\pm 1+3\ Sin\ u}{4\ Sin\ u} \quad \text{wobei} \quad dx=4\left(\frac{du}{Cos^2\ u}\cdot\xi+tg\ u\,.\,d\xi\right)$$

Aus diesen beiden Relationen ergibt sich sodann

$$\frac{d\xi}{\xi}=\frac{(3\ Sin\ u\pm 1)\ du}{Sin\ u\,.\,Cos\ u\,(Cos\ u-3\ Sin\ u\mp 1)}$$

als integrable Form der Variablen ξ. Substituirt man nun hierin $tg\ \frac{1}{2}u=t$, so resultiren hieraus die Ausdrücke

$$4)\ \text{I.}\ \frac{d\xi}{\xi}=-\frac{(6t+t^2+1)(1+t^2)\,dt}{2t^2(1-t^2)(t+3)} \quad \text{und II.} \quad \frac{d\xi}{\xi}=-\frac{(6t-t^2-1)(1+t^2)\,dt}{2t(1-t^2)(3t-1)}$$

welche nach durchgeführter Integration die Formen

$$5)\quad \text{I.}\quad \xi=C_1\frac{(1-t^2)\,\theta^{\frac{1}{6t}}}{(t+3)^{\frac{5}{9}}\,.\,t^{\frac{17}{18}}}\ . \qquad \text{II.}\quad \xi=C_1\frac{(1-t^2)\,\theta^{-\frac{t}{6}}}{(3t-1)^{\frac{5}{9}}\,t^{\frac{1}{2}}}$$

liefern.*) Als weiteres Ergebniss gelten die Relationen

$$6)\quad \text{I.}\quad \frac{dx}{\xi}=-\frac{4(1+t^2)\,dt}{(1-t^2)(t+3)\,t} \qquad \text{II.}\quad \frac{dx}{\xi}=-\frac{4(1+t^2)\,dt}{(1-t^2)(3t-1)}$$

aus welchen durch Integration weiter folgt

$$7)\quad \text{I.}\quad \theta^{\int\frac{dx}{\xi}}=C_2\,.\,\frac{(t+1)(t^2-1)}{t^{\frac{4}{3}}\,.\,(t+3)^{\frac{5}{3}}} \qquad \text{II.}\quad \theta^{\int\frac{dx}{\xi}}=C_2\,.\,\frac{(t-1)(t^2-1)}{(3t-1)^{\frac{5}{3}}}$$

und daher mit Rücksicht auf die Grundform 2) die Relationen

$$8)\quad \text{I.}\ y=\theta^{-\int\frac{(t^2+1)(t-1)\,dt}{(t+1)(t+3)\,.\,2t^2}} \qquad \text{II.}\quad y=\theta^{+\int\frac{(t^2+1)(t+1)\,dt}{(t-1)(3t-1)\,2t}}$$

und nach vollzogener Integration

$$9)\quad \text{I.}\quad y=C_3\frac{(t+1)\,\theta^{-\frac{1}{6t}}}{t^{\frac{7}{18}}(t+3)^{\frac{10}{9}}} \qquad \text{II.}\quad y=C_3\,\frac{(t-1)\,.\,t^{\frac{1}{2}}\,.\,\theta^{\frac{t}{6}}}{(3t-1)^{\frac{10}{9}}}$$

Den Ordinaten 5) und 8) entsprechen sodann die beziehungsweisen gemeinsamen Abscissenwerthe

$$10)\quad \text{I.}\quad \frac{dx}{x+2C}=-\frac{(1+t^2)\,dt}{2t^2(t+3)} \qquad \text{II.}\quad \frac{dx}{x+2C}=-\frac{(1+t^2)\,dt}{2t(3t-1)}$$

respective

$$11)\quad \text{I.}\quad x+2C=8C_1\frac{t^{\frac{1}{18}}\,.\,\theta^{\frac{1}{6t}}}{(t+3)^{\frac{5}{9}}} \qquad \text{II.}\quad x+2C=8C_1\,\frac{t^{\frac{1}{2}}\,.\,\theta^{-\frac{t}{6}}}{(3t-1)^{\frac{5}{9}}}$$

*) Weiteren Anforderungen der Allgemeinheit wird analog der ersteren Grundform dadurch Rechnung getragen, dass überall anstatt ξ der Werth $\frac{\xi}{b}$ gesetzt wird, wobei bekanntlich b die hier in Betracht kommende willkürliche Constante bedeutet.

so dass die beiden in Beziehung zu einander stehenden, durch die Gleichungen 1) ausgedrückten Curven analytisch dargestellt erscheinen*)

Zur besseren Beurtheilung dieser Formen mögen auch die Relationen

12) I. $\frac{d\xi}{dx} = -b\left(\frac{(1+t)^2}{8\,t} - 1\right)$ II. $\frac{d\xi}{dx} = b\left(\frac{(1-t)^2}{8\,t} + 1\right)$

sowie

13) I. $\frac{dt}{dx} = -\frac{(t+3)\,t^2}{t^2+1}\cdot\frac{2}{x+2\,C}$ II. $\frac{dt}{dx} = -\frac{(3\,t-1)\,t}{t^2+1}\cdot\frac{2}{x+2\,C}$

dienen. Substituirt man nun in die Formen 8) für t die beziehungsweisen zu einander in reciprokem Verhältnisse stehenden Werthe

14) I. $t = \frac{\omega-2}{\omega}$ und II. $t = \frac{\omega}{2-\omega}$

so ergibt sich für beide Relationen der gleiche Ausdruck

15) $y = e^{\int \frac{(\omega-1)^2+1}{2\,(\omega-1)^3 - 3\,(\omega-1)^2+1}\cdot\frac{d\omega}{\omega\,(\omega-1)}}$

welcher mit jenem in 124**) unserer allgemeinen Theorie vollständig übereinstimmt. Durch Substitution derselben beziehungsweisen Werthe für t in die Formen 10) ergibt sich für beide gleichfalls der gemeinsame Ausdruck

16) $\frac{dx}{x+2\,C} = -\frac{(\omega-1)^2+1}{2\,(\omega-1)^3 - 3\,(\omega-1)^2+1}\cdot\frac{d\omega}{\omega}$

welcher wieder mit jenen in 122**) und 126**) unserer allgemeinen Theorie dargestellten Formen identisch ist.

Zum gleichen Resultate gelangt man, wenn in die Formen 10) für t die beziehungsweisen Werthe

17) I. $t = +\sqrt{\frac{\Phi-1}{\Phi+1}}$ und II. $t = -\sqrt{\frac{\Phi+1}{\Phi-1}}$

substituirt werden. In diesem Falle ergibt sich nämlich für beide Formen der gleiche Ausdruck

18) $\frac{dx}{x+2\,C} = -\frac{\Phi\,d\,\Phi}{(\Phi^2-1)\left[\Phi - 1 + 3\sqrt{\Phi^2-1}\right]}$

welcher demjenigen in 138**) unserer allgemeinen Theorie vollständig entspricht.

---

*) Wird $tg\,u = -\frac{x+2\,C}{4\,\xi}$ vorausgesetzt, so ergeben sich die Formen

I. $\begin{cases} \xi = C_1 \frac{(1-t^2)\,e^{\frac{t}{6}}}{t^{\frac{1}{2}}\,(3\,t+1)^{\frac{5}{9}}} \\ x+2\,C = -8\,C_1 \frac{t^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{t}{6}}}{(3\,t+1)^{\frac{5}{9}}} \end{cases}$ und II. $\begin{cases} \xi = C_1 \frac{(1-t^2)\,e^{-\frac{1}{6\,t}}}{(t-3)^{\frac{5}{9}}\,t^{\frac{17}{18}}} \\ x+2\,C = -8\,C_1 \frac{t^{\frac{1}{18}}\cdot e^{-\frac{1}{6\,t}}}{(t-3)^{\frac{5}{9}}} \end{cases}$

und dementsprechend auch die correspondirenden Werthe für y. (Vergleiche jene die Mortalitätscurven betreffende Fussnote auf Seite 31.)

**) Vergleiche „Allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung". Seite 26—28.

In der gleichen Weise lassen sich die Resultate I und II der anderen Grundform, welche die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden ausdrückt, durch gemeinsame Formen darstellen, und zwar sind in diesem Falle für t die Werthe

19) I. $t = -\sqrt{\frac{\Phi - 1}{\Phi + 1}}$ und II. $t = +\sqrt{\frac{\Phi + 1}{\Phi - 1}}$

zu substituiren, so dass laut Form 17) zwischen den beiden Grundformen diesbezüglich eine Wechselbeziehung besteht. Diese Wechselbeziehung erstreckt sich jedoch nicht bloss auf diesen Umstand, dieselbe hat vielmehr eine tiefere Bedeutung, indem sie das ganze System dieser Curven kennzeichnet. Wir haben es hier nämlich bloss mit zweien homogenen Curvenpaaren zu thun, welche mit Rücksicht auf das Achsensystem eine entgegengesetzte Lage aufweisen. Im Uebrigen bildet bloss die vermittelnde Variable t in ihrer Werthbeschaffenheit den Gegenstand der Formveränderung. Dieselbe tritt nämlich in vier verschiedenen Formen als gleichartige Function auf, und zwar als

20) $$\mathbf{F}(t)\ ,\ \mathbf{F}\left(-\frac{1}{t}\right)\ ,\ \mathbf{F}(-t)\ ,\ \mathbf{F}\left(\frac{1}{t}\right)$$

auf diese Weise stets vier verschiedene Modificationen der Beziehung dieser Curvenpaare zulassend.

Daraus geht hervor, dass die beiden Grundformen vereint allen Anforderungen der allgemeinen Integration der Differentialgleichungen zweiter Ordnung Genüge leisten und lässt sich daher das ganze System in folgende Formen zusammenfassen. Den beiden in Beziehung zueinander stehenden Curven, welche durch die Formen 1) zur Darstelluug gelangen, entspricht die Grundform

21) $$y \cdot \xi = b\,e^{\pm b \int \frac{dx}{\xi}} \quad \text{worin} \quad \xi' = b\left(\pm\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{\xi}{b(x+2C)}\right)^2}\right)$$

die intergrable Form für den Werth der Variablen ξ darstellt.

Die beiden Doppelzeichen derselben, von denen das erstere mit jenem in der Grundform correspondirt, entsprechen vier verschiedenen Combinationen, auf diese Weise den in Form 20) gekennzeichneten vier functionellen Beschaffenheiten Genüge leistend. Was die beiden symmetrischen Lagen dieser Curven in Bezug auf das Achsensystem betrifft, so trägt denselben das Doppelzeichen in dem Substitutionswerthe

22) $$\frac{4\xi}{b(x+2C)} = \pm\frac{1-t^2}{2t} = \pm\, cotg\ u$$

Rechnung, indem das Curvenminimum dem Zeichen entsprechend in die positive oder negative Richtung der Abscissenachse fällt. Es ergeben sich daher mit Rücksicht auf ξ acht Curvengleichungen, von denen je zwei miteinander symmetrisch und je zwei miteinander correspondirend sind und aus welchen ebenso viel Curvengleichungen mit Rücksicht auf y entspringen.

Die allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und deren Bedeutung für die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie.

II.

In den bisherigen Auseinandersetzungen wurde nebst der Wechselbeziehung sämmtlicher, sich aus der allgemeinen Grundform ergebender Curvengebilde auch dargethan, dass die in unserer allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen dargestellten Relationen das ganze Curvensystem umfassen, indem sie die bekannten vier Formen der t-Function vereinigen.

Den Substitutionswerthen 17) und 19) gemäss, ergibt sich nämlich der einheitliche Werth

23) $$t^{\pm 1} = \pm\sqrt{\frac{\Phi - 1}{\Phi + 1}} = \pm\frac{\omega - 2}{\omega} \quad \text{respective} \quad \Phi = \frac{(\omega - 1)^2 + 1}{2(\omega - 2)}$$

sowie auch

24) $$\omega = \frac{2\sqrt{\Phi + 1}}{\sqrt{\Phi + 1} - \sqrt{\Phi - 1}} \quad \text{und schliesslich auch} \quad \beta(x + 2C)^2 = \frac{2\omega - 1}{\Phi}$$

hieraus entspringen sodann die beiden Werthe

25) $$\text{I.} \quad \Phi = +\frac{1 + t^2}{1 - t^2} \qquad \text{II.} \quad \Phi = -\frac{1 + t^2}{1 - t^2}$$

welche für unsere Rechnung von besonderer Bedeutung sind. Jene in unserer allgemeinen Theorie dargestellte Form 132)

$$\int\frac{d\xi'}{\sqrt{(\xi' - 1)(\xi' - \frac{1}{2})}} = -\int\beta(x + 2C)\,dx$$

liefert nämlich, falls wir den bekannten, durch eine reine Function von t dargestellten Differentialquotienten ξ' hierin substituiren (siehe die Formen 12)*) den Werth

26) $$t = e^{-\int(\beta x + 2C)\,dx}$$

welcher auch durch Combination der Formen 36) und 38) unserer vorigen Abhandlung*) resultirt. Mit Rücksicht auf unsere Form 22) ergibt sich daher

27) $$\xi = \pm\frac{b}{8}(x + 2C)\left[e^{+\int\beta(x + 2C)\,dx} - e^{-\int\beta(x + 2C)\,dx}\right]$$

d. i. die Ordinate ausgedrückt durch eine reine Function der Abscisse, wenn β als beliebige Function von x vorausgesetzt wird.

*) Siehe „Die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden als Element einer Differentialgleichung zweiter Ordnung" VII.

Ermitteln wir nun den zweiten Differentialquotienten von ξ und führen die Substitution in der Gleichung

$$\xi'' = \xi \cdot \beta$$

durch, so erhalten wir die Relation

$$28)\qquad \frac{\beta - \beta^2 (x+2C)^2}{\beta'(x+2C) + 3\beta} = \pm \frac{e^{+\int \beta (x+2C)\,dx} + e^{-\int \beta (x+2C)\,dx}}{e^{+\int \beta (x+2C)\,dx} - e^{-\int \beta (x+2C)\,dx}}$$

deren Anforderungen mit Rücksicht auf die Formen 25) und 26) vollständig entsprochen wird*), sobald nachstehenden beiden Bedingungen B_1) und B_2) zugleich Genüge geleistet zu werden vermag.

29) B_1) Für die Formen I.**) $\beta_I = \pm \frac{2}{(x+2C)^2} \cdot \frac{(t \pm 3)t}{t^2+1}$ und B_2)

Für die Formen II. $\beta_{II} = \pm \frac{2}{(x+2C)^2} \cdot \frac{3t \mp 1}{t^2+1}$ $\Big|$ $t = e^{-\int \beta (x+2C)\,dx}$

wobei die Relation $\beta_I + \beta_{II} = \frac{2}{(x+2C)^2}$ die miteinander correspondirenden Curven kennzeichnet. Verbindet man diese Bedingungen und eliminirt hieraus den Werth $\beta(x+2C)$, so gelangt man zu den bekannten, durch eine reine Function von t ausgedrückten, alternativ geltenden Werthen der Abscisse x

$$30)\ \text{I. } x + 2C = \pm 8C_1 \left(\frac{t^{\frac{1}{18}}}{(t \pm 3)^{\frac{5}{9}}} \cdot e^{\pm \frac{1}{6t}} \right) \text{ und II. } x + 2C = \pm 8C_1 \left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{(3t \mp 1)^{\frac{5}{9}}} \cdot e^{\mp \frac{t}{6}} \right)$$

wobei die Doppelzeichen innerhalb der Klammern miteinander correspondiren.

Die Identität der gleichgestellten Ausdrücke in Form 28) unter obigen Bedingungen lässt sich übrigens auch auf kurzem Wege nachweisen, indem man den links stehenden Ausdruck einer entsprechenden Modification unterzieht. Dividirt man nämlich denselben im Zähler und Nenner durch β und substituirt hierin die identische Form

$\frac{dl\,\beta(x+2C)^2}{dl\,(x+2C)} - 2 = \frac{\beta'}{\beta}(x+2C)$ dieselbe mit $\beta(x+2C)^2 = -\frac{dl\,t}{dl\,(x+2C)}$

als einer aus der Bedingung B_2) entspringenden Relation verbindend, so ergibt sich

$$31)\qquad \frac{1 - \beta(x+2C)^2}{-\frac{d\left[\beta(x+C)^2\right]}{dl\,t} + 1} = \frac{dl\,t}{dl\left[1 - \beta(x+C)^2\right] + \frac{dl\,t}{1 - \beta(x+2C)^2}} = \pm \frac{1+t^2}{1-t^2} = \Phi$$

und zwar, wenn wir einer der Alternativbedingungen B_1) gemäss, den jeweiligen Werth $1 - \beta(x+2C)^2$ hierin einsetzen. So erhalten wir beispielsweise für die Bedingung B_1) I. für positives β

*) Vergleiche den in Form 139) „Allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung" dargestellten Werth von Φ. (Anhang zu Lieferung VI.)

**) Für die Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer vergleiche Form 37) und 38) der vorigen Abhandlung, denen zufolge β_{II} mit $f(x)$ übereinstimmt.

$$1-\beta(x+2C)^2=-\frac{t^2+6t-1}{1+t^2}$$

durch Substitution in die Form 31) als Resultat das positive Φ, wie überhaupt für die Formen I. positive, für die Formen II. hingegen negative Werthe für Φ sich ergeben.

Der linker Hand stehende Ausdruck in Form 28) führt zu dem gleichen Resultate, wenn die aus der Bedingung B_1) entspringenden Werthe von β direct in denselben eingesetzt werden und der dem jeweiligen Alternativwerthe entsprechende Differentialquotient $\frac{dt}{dx}$ Anwendung findet, nur gestaltet sich die Rechnung complicirter. Die Formen 136) und 137) unserer allgemeinen Abhandlung im Anhange dieses Werkes liefern ebenfalls dementsprechende Resultate, indem wir aus denselben die beziehungsweisen Relationen

32) $$\Phi=\pm\sqrt{\left(\frac{x+2C}{4\xi}\right)^2+1}=\pm\frac{1+t^2}{1-t^2}$$

für die respective Grundform erhalten. Die Identität der Form 28) ist daher unzweifelhaft, und es erübrigt nur noch den diesbezüglichen Bedingungen B_1) und B_2) gleichzeitig Genüge zu leisten. Unter Rücksichtnahme auf den Umstand, dass bei diesen Curven allgemein für die jeweiligen Wendepunkte und den Tiefpunkt fixe Werthe für t bestehen, und zwar alternativ

$$t=\pm 1 \quad , \quad t^{\pm 1}=\pm 3 \text{ und } t^{\pm 1}=3\pm 2\sqrt{2}$$

wobei der erste den Wendepunkt im Endlichen, der zweite den Wendepunkt im Unendlichen und der dritte den Tiefpunkt kennzeichnet, ist die Handhabe hiefür geboten. Ueberdies bezeichnet noch der Werth $t^{\pm 1}=\pm 0$ die jeweilige natürliche Grenze der Curven für $x+2C=0$, da dieselben hier asymtotisch zu einer auf die Abscissenachse senkrecht stehenden Geraden verlaufen. Mit Hilfe der beiden Bedingungen B_1) und B_2) lassen sich daher nicht nur die Abscissenwerthe der betreffenden Punkte, sondern auch die in Betracht kommenden Constanten der Curven bestimmen, da jedem Punkte ein und derselbe Werth von t für beide Bedingungen Genüge leisten muss.

Für die Lösung zwischen bestimmten Grenzen liefert die Form 140) unserer allgemeinen Theorie die nöthige Handhabe.

Die Bedingungen B_1) und B_2) bezeichnen daher jene näheren Umstände, unter welchen die Lösung einer beliebigen Differentialgleichung zweiter Ordnung sich vollzieht. Die Grösse β als beliebige Function von x wird nämlich für jeden speciellen Fall andere Voraussetzungen in Betreff des Curvenverlaufes bedingen, so dass sich nicht nur die Werthe der in Betracht kommenden Constanten, sondern auch die Prämissen ändern, unter welchen die Lösung möglich wird.

Die Function von x, welcher β entspricht, hat daher für die Lösung dieselbe Bedeutung wie eine Reihe gegebener Punkte einer Wahrscheinlich-

keitscurve, demgemäss diese Function den Verlauf der Curve näher kennzeichnet. Die allgemeine Form dieser Gleichungen entspricht wie ersichtlich, einer unendlichen Anzahl Curven von gemeinsamen Eigenschaften, deren Wesen sie als Wahrscheinlichkeitscurven erkennen lässt. Die für β gewählte Function von x hat also die Aufgabe, aus der unendlichen Anzahl möglicher Wahrscheinlichkeitscurven, die jener Function entsprechende, specielle Curve festzustellen. Unsere diesbezügliche Behauptung, dass die Differentialgleichungen zweiter Ordnung das gesammte System der Wahrscheinlichkeitscurven umfassen, findet auf diese Weise ihre Bestätigung und da die Function von x, welcher β entspricht, eine ganz beliebige sein kann, so ist auch die Frage der allgemeinen Integration linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung hiedurch thatsächlich gelöst. Es braucht wohl nicht nochmals hervorgehoben zu werden, dass sich alle möglichen Formen dieser Gleichungen auf die einfache Form

$$\xi'' = \xi . \beta$$

zurückführen lassen, da wir diesen Umstand in der allgemein aufgestellten Theorie zur Grundlage unserer diesbezüglichen Untersuchungen gemacht haben. Erwähnung verdient jedoch die Eigenschaft der allgemeinen Integrationsformen, derzufolge dieselben für jede beliebige Form dieser Gleichungen auch auf directem Wege sich darstellen lassen.*) Das Gleiche gilt von den correspondirenden Curven $y'' = y . f(x)$, mit welchen diese bekanntermassen eigene Curvenpaare bilden, durch deren Vermittlung die Lösung zwischen Grenzen erfolgt.

Von besonderer Bedeutung ist das Wesen der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die allgemeine Curventheorie. Es lässt sich nämlich mit Hilfe der Integrationsformen dieser Gleichungen jede beliebige Curve, sobald für dieselbe variable Constanten supponirt werden, construiren und analytisch darstellen. Auch für zwei verschiedene beliebige Curven, deren variable Constanten zu einander in einer bestimmten Beziehung stehen, oder deren Beziehung gegebenen Voraussetzungen entsprechen soll, lässt die Beschaffenheit der Integrationsformen eine zweckmässige Lösung zu sowie überhaupt alle Fragen, welche die Beziehung zwischen verschiedenen Curven und Curvensytemen betreffen, mittelst derselben gelöst werden können.**) Die Eigenschaft dieser durchgreifenden Verwendbarkeit verdanken diese Formen einer in denselben enthaltenen merkwürdigen mathematischen Function, auf deren Beschaffenheit wir später zurückkommen werden.

*) Siehe „Allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung" (Anhang Lieferung V., Seite 18, Form 108) und 109). Hier sei auch erwähnt, dass die daselbst in Rechnung gelangenden Grössen t und t_1 welche als Functionen des Coëfficienten α gelten, mit unserer vermittelnden Variablen t nicht verwechselt werden dürfen.

**) Vergleiche Lagrange, dessen Lehre von der Variation der Constanten auf die hohe Bedeutung dieses Problemes hinweist.

Die allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und deren Bedeutung für die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie.

III.

Die bisherigen Ergebnisse unserer Untersuchungen liefern die Handhabe zur allgemeinen Lösung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in geschlossener Form.

Den Bedingungen B_1 und B_2 wird bekanntlich durch eine der alternativ geltenden Formen 30) gleichzeitig entsprochen, so dass wir durch deren Substitution in die beiden Bedingungen einen einheitlichen Werth derselben erhalten, und zwar ergeben sich für die Wurzeln I und II die Formen

33) $\beta_{I} = \pm \frac{(t+3)\,t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{32 . C_1^2 . \tau^2}\,, \quad \beta_{II} = \pm \frac{3\,t+1}{t^2+1} \cdot \frac{1}{32 . C_1^2 . \tau^2}$ wobei $\beta_{I} + \beta_{II} = \frac{1}{32\, C_1^2 . \tau^2}$

welche der vollständigen Lösung der Differentialgleichung $\xi'' = \xi . \beta$ Genüge leisten, wenn τ jene innerhalb der Klammern der Formen 30) enthaltenen transcendenten Functionen von t darstellt. Nun geht aber aus der bekannten Relation

34) $$\beta + f(x) = \frac{2}{(x+2C)^2} = \frac{1}{32 . C_1^2 . \tau^2}$$

hervor, dass diese Formen auch der correspondirenden Differentialgleichung $y'' = y . f(x)$, welche mit der ersteren einem Curvenpaare entspricht, gleichzeitig Genüge leisten, da laut dieser Relation die Wurzeln der beiden Differentialgleichungen sich wechselseitig identisch erweisen, indem

35) $$f(x)_{I} = \beta_{II} \quad \text{und} \quad f(x)_{II} = \beta_{I}$$

ist. Darnach bilden die beiden Differentialgleichungen $\xi'' = \xi . \beta$ und $y'' = y . f(x)$ die Wurzeln einer sogenannten reducirten Differentialgleichung zweiter Ordnung von der in Form 50) unserer allgemeinen Theorie dargestellten Art

$$z'' - \frac{2}{x+2C} \cdot z' + \beta z = 0$$

für welche laut den Grundformen 21) und 22) die allgemeinen Bedingungen*)

36) $$y . \left(\frac{d\xi}{dx} + b\right) + \xi . \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dy^2}{dx^2}\left(\frac{d\xi}{dx} + b\right) + \frac{f(x)}{\beta} . \frac{d^2\xi}{dx^2} . \frac{dy}{dx} = 0$$

gelten, worin b eine willkürliche Constante darstellt.

---

*) Siehe die Formen 40) und 41) der diesbezüglichen Abhandlung über Mortalitatscurven, Seite 67. — Diese beiden allgemeinen Bedingungen übergehen sobald $\beta = f(x)$ supponirt wird, für den in der Abscissenachse liegenden, beiden Wurzelcurven gemeinsam entsprechenden Wendepunkt, dem der fixe Werth $2\,\xi' = \mp b$ Genüge leistet, in die bekannten Relationen 55) unserer allgemeinen Theorie, deren specielle Bedeutung hiedurch gekennzeichnet ist, indem die Giltigkeit derselben bloss für den Fall gleicher Wurzeln besteht. (Unsere gegentheilige für die Rechnung sonst irrelevante, frühere Annahme hinsichtlich der Bedeutung der Relationen 55) wird also hiedurch gegenstandslos.)

Die Lage dieses Curvenpaares ist eine derartige, dass beiden Curven ein in der Abscissenachse liegender gemeinsamer Wendepunkt entspricht, in welchem $2\xi' = \mp b$ und $y' = \pm \infty$ ist. Beide Curven zerfallen in zwei convergirende Flügel, welche auf der einen Seite asymptotisch zu einer Geraden von allgemein gekennzeichneter Richtung verlaufen, im Unendlichen (Unbestimmten) in einem Punkte zusammenlaufend, auf der anderen Seite hingegen zu einer gemeinsamen auf der Abscissenachse senkrecht stehenden Geraden ebenfalls asymptotisch verlaufen, sich im Unendlichen berührend. Die Tiefpunkte (Minima) dieser beiden homogen verlaufenden Curven befinden sich bei gemeinsamer Abscisse in ungleich grossen Abständen von der Abscissenachse, wobei zu bemerken ist, dass jedem Curvenflügel ein besonderes Minimum entspricht, welches bloss mit demjenigen des correspondirenden Flügels der anderen Curve die Abscisse gemeinsam hat. Hervorzuheben ist auch der Umstand, dass diesem Curvenpaar symmetrisch ein zweites zur anderen Seite der Ordinatenachse sich anschliesst, so dass alle Punkte desselben in Bezug auf die Abscissenaxe sowohl positiv als auch negativ sich präsentiren.

Ausserdem entspricht der reducirten Differentialgleichung noch eine zweite mit der ersten correspondirende Lösung von analoger Beschaffenheit, welche nach Form 35) aus der zweiten Combination der wechselseitig identischen Wurzelwerthe von β und $f(x)$ entspringt.

Für die allgemeine Lösung dieser reducirten Differentialgleichung zweiter Ordnung gelten nun die Wurzel-Gleichungen der Ordinaten

$$37)\qquad \xi = b\,C_1\,\frac{1-t^2}{t}\cdot\tau \quad , \quad y = c\cdot\frac{\sigma}{\tau} \quad , \text{ denen } x + 2\,C = \pm\,8\,C_1\cdot\tau$$

als gemeinsame Abscisse entspricht. In diesen allgemein giltigen Gleichungen sind der Kürze halber die entsprechenden t-Functionen durch σ und τ ausgedrückt. Es bedeutet nämlich

$$38)\qquad \sigma = \begin{cases} \text{I.} & \dfrac{t \pm 1}{t^{\frac{1}{3}}(t \pm 3)^{\frac{5}{3}}} \\[2ex] \text{II.} & \dfrac{t \mp 1}{(3t \mp 1)^{\frac{5}{3}}} \end{cases} \qquad \tau = \begin{cases} \text{I.} & \dfrac{t^{\frac{1}{18}}}{(t \pm 3)^{\frac{5}{6}}}\cdot e^{\pm\frac{1}{6t}} \\[2ex] \text{II.} & \dfrac{t^{\frac{1}{2}}}{(3t \mp 1)^{\frac{5}{9}}}\cdot e^{\mp\frac{t}{6}} \end{cases}$$

eine besondere Art von Functionen, welche für die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung allgemeine Bedeutung besitzen.*) Mit Rücksicht auf dieselben ergeben sich aus den Gleichungen 37) die interessanten Relationen

$$39)\ \text{I.}\quad \frac{y'}{y} = -\frac{\xi' \pm b}{\xi} = \frac{t \mp 1}{t \pm 1}\cdot\frac{1}{8\,C_1\cdot\tau} \quad \text{und II.}\quad \frac{y'}{y} = -\frac{\xi' \pm b}{\xi} = -\frac{t \pm 1}{t \mp 1}\cdot\frac{1}{8\,C_1\cdot\tau}$$

in welchen der Ausdruck der Variablen t im Zähler und Nenner stets entgegengesetzte Zeichen aufweist. Diese überzeugen in einfachster Weise von der Richtigkeit und Allgemeinheit unserer Lösung, sobald man dieselben mit den zu lösenden correspondirenden Differentialgleichungen

*) Wir wollen dieselben gelegentlich zur Vereinfachung der Rechnung in kleinen Werthintervallen tabellarisch zusammenstellen.

$$\frac{y''}{y} = \frac{y''}{y'} \cdot \frac{y'}{y} = \left(\frac{y'}{y}\right)' + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = f(x) \quad \text{und} \quad \frac{\xi''}{\xi} = \frac{\xi''}{\xi' \pm b} \cdot \frac{\xi' \pm b}{\xi} = \left(\frac{\xi'}{\xi}\right)' + \left(\frac{\xi'}{\xi}\right)^2 = \beta$$

combinirt. Ist nun $f(x)$ gegeben, so erhalten wir für die beiden Wurzeln der reducirten Differentialgleichung:

40) $f(x)_I = \beta_{II}$ respective $x = \varphi_I(\beta_{II})$ und $f(x)_{II} = \beta_I$ respective $x = \varphi_{II}(\beta_I)$

wenn φ als reciproke Function von f betrachtet wird. Hieraus ergeben sich sodann durch Verbindung mit der Gleichung $x + 2C = 8C_1 . \tau$ die Relationen für die beiden Lösungen

41) $2C = \pm 8C_1 \tau - \varphi_I\left(\pm \frac{3t \mp 1}{t^2+1} \cdot \frac{1}{32 . C_1^2 . \tau^2}\right)$ und $2C = \pm 8C_1 \tau - \varphi_{II}\left(\pm \frac{(t \pm 3)t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{32 . C_1^2 . \tau^2}\right)$

welche die jeweilige Beziehung zwischen den Constanten C und C_1 unter Vermittlung der Hilfsvariablen t darstellen. Nun sind aber bekanntlich vier Punkte einer jeden Curve bekannt, welche fixe Werthe für t besitzen. Von diesen vier Werthen liefern jedoch nur zwei derselben bestimmte Werthe für β. Da nun diese Gleichungen bloss zwischen zwei Unbekannten bestehen, so werden zwei bestimmte Werthe von t hinreichen, um sowohl C als auch C_1 zu bestimmen.

Diese Werthe für t ergeben sich aus der generellen Tangentengleichung der Curve $\xi'' = \xi . \beta$, und zwar gelten allgemein:

42) I. $\xi' = \pm b\left(\frac{(1+t)^2}{8t} - 1\right)$ II. $\xi' = \pm b\left(\frac{(1-t)^2}{8t} + 1\right)$

als alternative Formen. Den beiden äussersten Grenzpunkten der Curven entsprechen nun bekanntlich die Tangenten

43) $\xi' = \mp \frac{b}{3}$ woraus $t^{\pm 1} = \pm 3$ und $\xi' = \pm \infty$, woraus $t^{\pm 1} = \pm 0$

entspringt. Den beiden anderen Punkten, d. i. dem Wendepunkte und dem zweifachen Tiefpunkte hingegen entsprechen

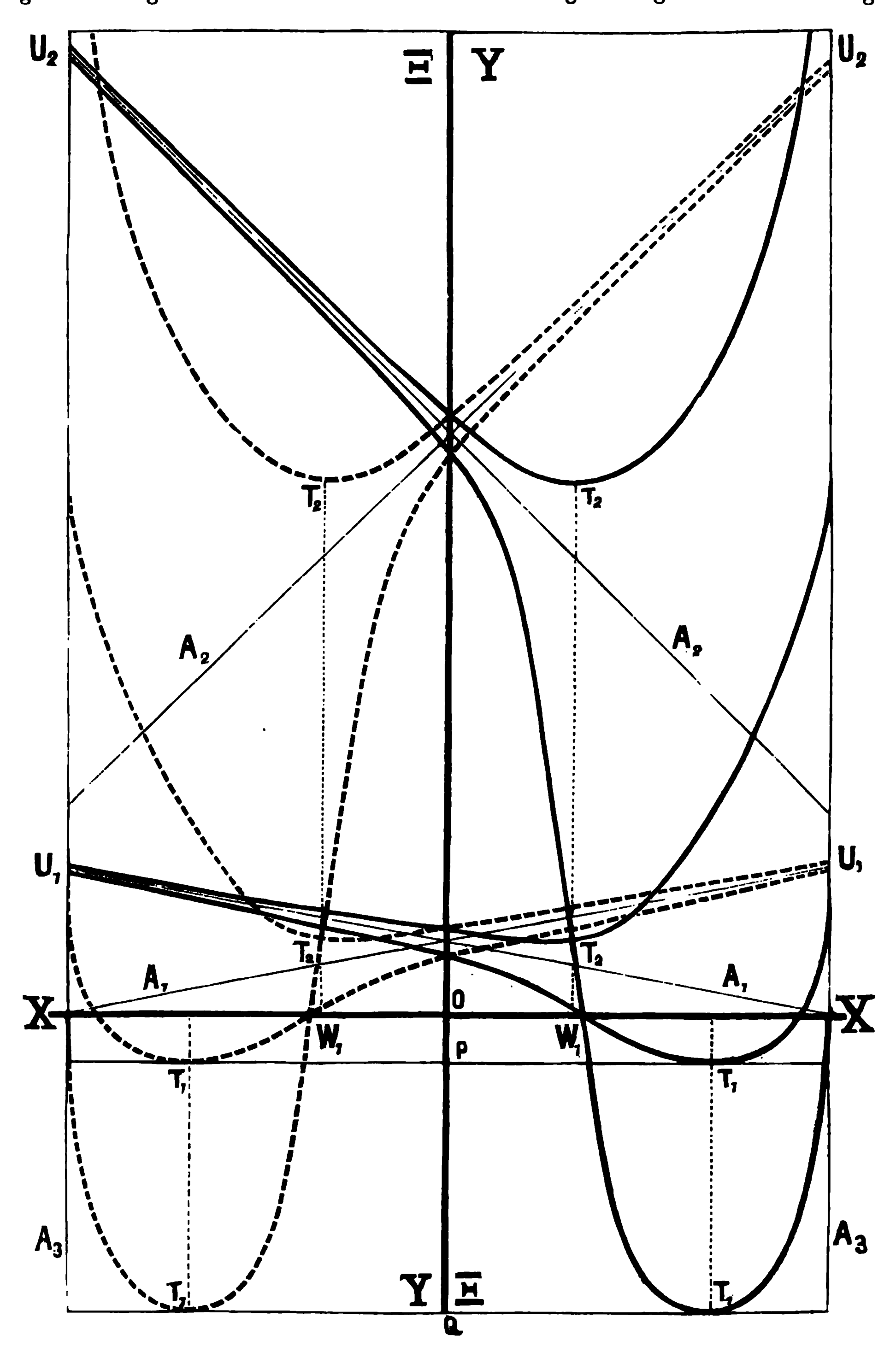
44) $\xi' = \mp \frac{b}{2}$ woraus $t^{\pm 1} = \pm 1$ und $\xi' = \pm 0$ woraus $t^{\pm 1} = \pm (3 \pm 2\sqrt{2})$

sich ergibt.*) Letztere Werthe von t liefern nun bestimmte Werthe für β, daher durch entsprechende Substitution für jede der beiden Lösungen je zwei bestimmte Gleichungen zwischen den Constanten C und C_1 resultiren, aus welchen sich deren Werthe ergeben. Die Gleichung der gemeinsamen Abscisse ist also vollständig bestimmt und lässt sich daher für jeden speciellen Fall und beliebigen Werth von x der entsprechende Werth von t feststellen, so dass hiedurch auch die beiden Ordinaten y und ξ bis auf deren willkürliche Constanten c respective b vollständig bestimmt sind. (Siehe graph. Darstellung.)

*) Wie ersichtlich haben wir es hier für jeden Punkt mit je vier verschiedenen Werthen von t zu thun, welche dem Wesen dieses Curvensystems gemäss, den vier einzelnen t-Functionen Rechnung tragen. (Siehe Form 20.) Die jenen Functionen jeweilig zugehörigen Werthe für t ergeben sich aus den bezüglichen speciellen Tangentengleichungen derselben, da ξ' für alle t-Functionen die gleichen Werthe besitzt, dagegen die Function desselben sich in angemessener Weise ändert. (Siehe die Formen 12.)

Das System der originären Wahrscheinlichkeitscurven.

generell ausgedrückt durch die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.





DIE MATHEMATIK

im

Dienste der Nationalökonomie

unter Rücksichtnahme auf die

praktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik

mit einigen, durch selbständige wissenschaftliche Errungenschaften auf dem Gebiete der reinen Mathematik begründeten, neuen Fundamenten der politischen Arithmetik

für Versicherungs- und Bank-Institute, sowie auch Lehrkräfte höherer Bildungsanstalten besonders geeignet.

Supplementband zum gleichnamigen Werke.

Verfasst

von

D^R. LUDWIG GROSSMANN

Inhaber des Ersten Wiener mathematischen Bureau und Herausgeber der Fachschrift „Controle“.

Neunte Lieferung.

WIEN 1897.

Im Selbstverlage des Verfassers.

III., Sofienbrückengasse Nr. 14.

Druck von Josef Bayer & Comp, Wien, I., Wollzeile 25.

VORREDE.

Vor Jahresfrist war es mir gelungen, das System der originären Wahrscheinlichkeitscurven auf Basis der selbstständig durchgeführten Erforschung der Beschaffenheit der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung festzustellen und wissenschaftlich zu begründen. Jene, diesen Gegenstand betreffenden Untersuchungen habe ich in der vorherigen und zum Theile auch in dieser Lieferung meines Werkes einer eingehenden wissenschaftlichen Behandlung unterzogen und besonders jene Umstände hervorgehoben, welche entsprechend dem Wesen der Materie eine geeignete praktische Anwendung in mathematisch-statistischer Beziehung zulassen. Dies gab mir Veranlassung, im weiteren Verlaufe das auf diese Weise gekennzeichnete mathematische Wahrscheinlichkeits-Gesetz für die Ausgleichung der Mortalitätstafeln zur Anwendung zu bringen, wodurch auch die analytische Darstellung der Sterblichkeitscurven ermöglicht wurde. Nachdem jedoch die Beschaffenheit der Functionen, auf Grund welcher diese Darstellung erfolgte, als eine solche von transcendenter Art sich erwies, demzufolge der zur mathematischen Ausgleichung der Sterbetafeln erforderliche Rechnungsprocess viel zu complicirt erschien, habe ich mich der Aufgabe unterzogen, die Form dieser Curvengleichung im speciellen Sinne für Jahresintervalle derart zu modificiren, dass eine allgemeine Beziehung der Coordinaten zweier aufeinanderfolgender Punkte der Curve resultirte, in welcher die Handhabe für einen besonders einfachen Ausgleichungsprocess gegeben ist.

Die vollständig exacte mathematische Ausgleichung der Sterbetafeln vollzieht sich nun gemäss diesem von mir aufgestellten Principe auf Grund einer allgemein geltenden algebraischen Bedingung von der Form

$$w_{x+1}^2 - (2w_x - b_1)\, w_{x+1} + w_x^2\, e^{-\frac{b}{w_x}} = 0$$

worin w_x die Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit im Alter x darstellt, während b und b_1 in ihren Functionen bestimmte, variable Constanten bedeuten, deren Summe stets der Zahl 2 gleich ist.

Hiemit erscheint dieses wichtige Problem der mathematischen Statistik endgiltig gelöst und erübrigt nur noch bezüglich eines geeigneten praktischen Verfahrens den erforderlichen Modus zu treffen.

Im Uebrigen enthält diese Lieferung auch mehrere bemerkenswerthe Abhandlungen sowohl rein nationalökonomischer, als auch finanzpolitischer Beschaffenheit, welche mit Rücksicht auf ihren praktischen Werth die Beachtung der Fachkreise verdienen.

Wien, am 1. Jänner 1897.

Der Verfasser.

INHALT.

Versicherungstechnik.

Finanztechnik.

Druckfehler und Correcturen:

Auf Seite 43, zehnte Zeile von unten soll es heissen anstatt: „Die mathematische Hoffnung jener Grenze“ richtig „Die mathematische Hoffnung jene Grenze“.

Auf Seite 46, Tabelle V soll es lauten unter „Ursprüngliche Zahlen der Lebenden“ beim Alter von 11 Jahren anstatt: 994340, richtig: 993240.

Auf Seite 52 soll die Formel lauten anstatt:

$$F = \frac{n.\Phi}{3.Q} + \frac{1}{9}\left(\frac{n.\Phi}{3.Q}\right)^2 - \dots \quad \text{richtig:} \quad F = -\frac{n.\Phi}{3.Q} + \frac{1}{9}\left(\frac{n.\Phi}{3.Q}\right)^2 - \dots$$

Auf Seite 57 soll es in der fünften Zeile von unten heissen anstatt: „Ungleichheit dieser Functionen bewirkend“ richtig: „Ungleichheit dieser Functionen zurücklassend“.

Auf Seite 64 sollen die Formeln $\mp$ vor den Wurzeln mit Doppelzeichen versehen sein u. zw. gilt bei der ersteren Formel $\mp$ bei der zweiten $\pm$.

Ferner soll auf derselben Seite der Ausdruck I. unten, richtig lauten:

$$\left(\frac{\Delta w_x}{w_x} + \Delta l w_x + \frac{\Delta L_x}{L_x} + \Delta l L_x\right)\frac{w_x}{2} = -1, \text{ anstatt } = 1$$

Die Mathematik

im

Dienste der Nationalökonomie.

Lieferung I—VI nebst Supplement-Lieferung VII—IX.

Gesammt-Inhalt.

Allgemeine mathematische Theorien.

Versicherungstechnik.

Lebensversicherung:

Untersuchungen über die geometrisch-analystische Darstellung des Absterbegesetzes. Lieferung VI.

Noch einige mathematische Grundlagen für den steigenden Gewinnantheil bei Lebensversicherungen. Lieferung VII.

Der Storno und dessen Einfluss auf die Zuschlagsprämie bei der Versicherung mit steigendem Gewinnantheil. Lieferung VIII.

Der sinkende Zinsfuss und dessen Einfluss auf die garantirte Rente. Lieferung VIII.

Die Beziehung der einmaligen Prämie zur Leibrenten-Mise mit Rücksicht auf den zugrundegelegten Zinsfuss. Lieferung VIII.

Die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden als Element einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und die hieraus entspringenden Conclusionen. Lieferung VIII.

Die allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und deren Bedeutung für die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie. Lieferung VIII und IX.

Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln. Lieferung IX.

Reflexionen über unsere Formel, betreffend die exacte Ausgleichung der Sterbetafeln. Lieferung IX.

Alters- und Invaliditätsversicherung:

Eine technische Basis für die Alters- und Invaliditätsversicherung. Lieferung III.

Untersuchungen über das Wesen der Invalidität vom Standpunkte des Absterbegesetzes. Lieferung IV.

Die Prämienberechnung für die Alters- und Invalidenrente. Lieferung IV.

Die Versicherung für den Fall der Invalidität in Folge Kräfteverfalles. Lieferung V.

Combination der Lebens- und Invaliditätsversicherung. Lieferung V.

Eine empirische Approbation unserer Hypothese, betreffend die mathematisch-physiologische Ableitung des Validitätsverlaufes beim Menschen aus dem Absterbegesetze. Lieferung VII.

Reflexionen über Zweck und versicherungstechnische Anwendung der Methode, betreffend die mathematisch-physiologische Ableitung des Validitätsverlaufes beim Menschen aus dem Absterbegesetze. Lieferung VII.

Unfall-Versicherung:

Eine Methode für die Cumulirung homogener, auf statistischen Daten ungleicher Frequenz beruhender Wahrscheinlichkeiten. Lieferung VII.

Feuerversicherung:

Mathematische Limitirung der Feuerversicherungsprämie. Lieferung II.

Mathematische Anleitung zur Schätzung der Brandschaden-Reserven. Lieferung II.

Reflexionen über die Eventualität eines minimalen Brandschaden-Ergebnisses. Lieferung III.

Systematische Riskenschätzung in der Brandschadenversicherung. Lieferung III.

Rückdeckung, Austausch und Theilung der Brandschaden-Risken. Lieferung III.

Ueber das Verhältniss der Feuerversicherungsprämie zum Risiko. Lieferung IV.

Zur Methode einer rationellen Handhabung der Brandschadenversicherung. Lieferung VI.

Versicherung gegen Verlosungsverlust:

Die Verlustchance verzinslicher Lospapiere. Lieferung VI.

Die Riskengrenze bei der Versicherung gegen Verlosungsverlust. Lieferung VII.

Finanztechnik.

Finanzwesen:

Anwendung der Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen auf die Zinseszins- und Rentenrechnung. Lieferung I.

Zinseszins- und Rentenrechnung mittelst Hilfstabellen. Lieferung V.

Die anticipative und decursive Verzinsung und ihre praktische Anwendung. Lieferung IV.

Untersuchungen über die gebräuchliche anticipative Verzinsungsform im Bankwesen. Lieferung IV.

Mathematische Principien für die Conversion von Tilgungsrenten. Lieferung II.

Staats- und Prioritätsanlehen. Lieferung II.

Fragmente finanzieller Disciplinen. Lieferung III.

Zur Conversion öffentlicher Anlehen. Lieferung VI.

Ueber die relative Werthbestimmung verzinslicher Lospapiere. Lieferung VI.

Das Wesen der Prämienpfandbriefe und deren Bedeutung für den Boden- und Hypothekar-Credit. Lieferung VII.

Finanztechnische Anleitung für die planmässige Tilgung der auf Ausgabe von Hypothekar-obligationen, Pfandbriefen und Schuldverschreibungen beruhenden Los- und Prämien-Anlehen. Lieferung VII.

Ueber die Wahrscheinlichkeit des zu erreichenden Zeitpunktes der Conversionsreife einer öffentlichen Schuld. Lieferung VIII.

Die Coursreserve als Präventivmittel gegen die Schwankungen der Capitalsrentabilität infolge sinkenden Zinsfusses. Lieferung VIII.

Bankwesen:

Mathematische Reflexionen über den Boden- und Hypothekarcredit. Lieferung II.

Reflexionen über den Einfluss des sinkenden Zinsfusses auf den Boden- und Hypothekar-credit. Lieferung III.

Betrachtungen über die Correlation zwischen Zinsfuss und Tilgungsfrist bei Boden- und Hypothekar-Darlehen. Lieferung III.

Reflexionen über den Einfluss der Veränderung des Provisionspercentes auf das Gewinn-erträgniss beim Boden- und Hypothekarcredit. Lieferung IV.

Die Creditvereine und ihre innere Organisation. Lieferung II.

Der Durchschnittszinsfuss im Escompte. Lieferung IV.

Eine praktische Methode zur Ermittlung der Portefeuille-Vortragszinsen im Escompte. Lieferung VI.

Betrachtungen über die Effectenbelehnung vom Standpunkte des bankmässigen Verkehres. Lieferung VI.

Landwirthschaftliche Creditvereine und Genossenschaften. Lieferung IX.

Reflexionen über die wirthschaftliche Bedeutung des Giro- und Checkverkehres. Lieferung IX.

Mathematische Darstellung der Capitalsaufzinsungsform unter Voraussetzung eines veränder-lichen Zinsfusses. Lieferung IX.

Ueber das Wesen des wahrscheinlichen Werthes ungewisser Güter und Anwartschaften. Lieferung IX.

Staatswissenschaft und Münzwesen:

Beiträge zur Lösung der Währungsfrage. Lieferung II.

Erörterungen über den Zinsfuss vom volkswirthschaftlichen Standpunkte. Lieferung III.

Mathematische Begriffe staatswirthschaftlicher Finanzpolitik. Lieferung III.

Zinsfuss und Securität vom staatswissenschaftlichen Standpunkte. Lieferung IV.

Finanzpolitische und staatswissenschaftliche Reflexionen. Lieferung IV.

Finanzpolitische Reflexionen vom Standpunkte des Staatssocialismus. Lieferung V.

Zur Frage der Valutaregulirung. Lieferung V.

Finanzpolitische und staatswissenschaftliche Betrachtungen über die Valutaregulirung in Oesterreich-Ungarn. Lieferung VI.

Die wirthschaftliche Seite der Valutaregulirung in Oesterreich-Ungarn. Lieferung VI.

Zur Lösung der Silberfrage. Lieferung VIII.

Die Silberfrage und der Bimetallismus. Lieferung IX.

Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln.

I.

Eines der wichtigsten Probleme auf dem Gebiete der mathematischen Statistik bildet die Frage der Ausgleichung der Mortalitätstafeln, da hierin die einzig mögliche Handhabe liegt, das gesammelte statistische Material in richtiger Weise zu verwenden und der Lebensversicherung dienstbar zu machen. Seit Schaffung der ersten Sterbetafel durch den berühmten Mathematiker Halley bewegt diese Frage ununterbrochen die Lebensversicherungswissenschaft, und Gelehrte aller Nationen, wie Gompertz, Makaham, Wittstein etc., haben ihr ganzes Können darauf verwendet, dieses Problem zu lösen. Dessenungeachtet war es bisher nicht möglich, ein feststehendes Gesetz für die Sterblichkeit zu finden, und die erzielten Ergebnisse bewegten sich bloss in mehr oder weniger vagen Annahmen und unzuverlässigen Näherungsformeln. Mit Recht lässt sich die Behauptung aufstellen, dass alle bisher für die Ausgleichung der Mortalitätstafeln angewendeten Näherungsmethoden kaum geeignet sind, selbst nur die blosse Regelmässigkeit der Absterbeordnung zu verbürgen, geschweige denn im entferntesten der mathematischen Gesetzmässigkeit derselben Rechnung zu tragen. Deshalb zeigt sich auch bei allen bekannten Mortalitätstafeln durchwegs der Mangel gesetzmässiger Absterbeordnung.

Erst durch die Darstellung des betreffenden mathematischen Gesetzes auf analytisch-deductivem Wege ist es möglich geworden, jene Anhaltspunkte festzustellen, welche die Wahrscheinlichkeit des Mortalitätsverlaufes bedingen. Indem wir von dem Begriffe der Lebenswahrscheinlichkeiten ausgingen, ist es uns gelungen, deren Summen durch eine geschlossene mathematische Form allgemein zum Ausdrucke zu bringen und auf diese Weise die Beziehung zwischen der Curve der Lebenden und der Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten durch eine bestimmte mathematische Form zu kennzeichnen.

In unserer Abhandlung unter dem Titel »Die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden als Element einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und die hieraus entspringenden Conclusionen«*) haben wir die Frage der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätscurven einer eingehenden Untersuchung unterzogen und gelangten auf deductivem Wege zu der Conclusion, dass wir es hier mit einer originären Function der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu thun haben. Durch dieses Ergebniss wurden wir in den Stand

*) Siehe VIII. Lieferung dieses Werkes.

gesetzt, die Erfolge unserer diesbezüglichen wissenschaftlichen Forschung praktisch zu verwerthen und die Beschaffenheit jener das Absterbegesetz betreffenden Curven analytisch zu beurtheilen, d. h. sowohl die Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten als auch die Curve der Lebenden durch geschlossene, allgemein giltige Formen mathematisch auszudrücken. Der naturgemässe Umstand, dass das Alter als gemeinsame Abscisse dieser beiden Curven erscheint, musste geeignet sein, die Lösung dieses Problemes zu fördern, nachdem es uns schon früher gelungen war, die Beziehung dieser beiden Curven unter Vermittlung ihrer gemeinsamen Abscisse im Wesen festzustellen und so für die vollständige Aufrollung dieser wichtigen Frage die Grundlage zu schaffen. Doch erst infolge des Erkennens der merkwürdigen Thatsache, dass die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung überhaupt Wahrscheinlichkeitscurven, respective deren Beziehung zueinander bedeuten, wurde es möglich auf dieser Grundlage weiter zu bauen und die beiden ursprünglich bloss durch ihre wechselseitige Beziehung gekennzeichneten Curven abgesondert in ihren Functionen klarzustellen und deren eigenthümliche Beschaffenheit im Wesen selbst wahrzunehmen. Diesbezüglich stellte sich anfangs der mathematischen Deutung der verschiedenen Formen manches Hinderniss in den Weg, da diese der Forschung bisher unzugängliche, neue Materie erst einer systematisch-wissenschaftlichen Zergliederung bedurfte, um merkwürdige, von der gewohnten Norm abweichende Erscheinungen im Wesen derselben begrifflich fassbar und erklärlich zu machen.

Erst nachdem es uns gelungen war, den methodischen Zusammenhang in allen seinen Phasen allgemein zu ergründen, war ein weiteres Fortschreiten im Sinne angewandter Wissenschaft möglich, so dass wir an die Lösung der Frage betreffend die mathematische Ausgleichung der Mortalitätstafeln schreiten konnten. Dieser Aufgabe haben wir uns nun in der genannten Abhandlung in einer Weise unterzogen, dass die daselbst dargestellten Formen allen Anforderungen in dieser Beziehung zu entsprechen vermögen. Sowohl die Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer als auch die Curve der Lebenden sind durch ihre Gleichungen in geschlossener Form algebraisch dargestellt, allgemein das Absterbegesetz in seiner analytischen Beschaffenheit kennzeichnend. Die transcendente Art dieser beiden Curven gestattet es jedoch nicht, deren Ordinaten direct durch eine reine Function der Abscisse oder umgekehrt auszudrücken, weshalb die Coordinaten der beiden Curven durch Vermittlung einer besonderen Variablen selbstständig derart zur Darstellung gelangen, dass für jeden Punkt derselben vorerst der Werth der vermittelnden Variablen aus dem Werthe einer der Coordinaten bestimmt werden muss, woraus sich dann erst der Werth der zweiten ergibt. Der Umstand jedoch, dass beiden Curven ein und dieselbe Abscisse gemeinsam ist, vereinfacht diese Procedur in bedeutendem Masse, so dass es genügt, aus einem beliebig gegebenen Werthe der Abscisse denjenigen der vermittelnden Variablen festzustellen, um aus demselben die Werthe der Ordinaten der beiden Curven zu erlangen. Während nun die Gleichungen dieser beiden

Curven das allgemeine Absterbegesetz im Wesen selbst darstellen, wird die specielle Beschaffenheit des Mortalitätsverlaufes, wie sich dieselbe in der Verschiedenheit der einzelnen Sterbetafeln äussert, durch die den beiden Curven zugehörigen, in deren Gleichungen enthaltenen Constanten gekennzeichnet.

Angesichts dessen nun, dass eine jede Sterbetafel eine Reihe statistisch ermittelter Punkte der beziehungsweisen Curve darstellt, welche mit Rücksicht auf die Unzulänglichkeit des beobachteten Menschenmateriales nicht genügend genau in ihrer Lage festgestellt werden können, gibt sich im geometrischen Verlaufe einer statistisch ermittelten Absterbecurve eine Unregelmässigkeit nicht nur in Betreff ihrer Krümmungsverhältnisse, sondern auch hinsichtlich ihrer mathematischen Gesetzmässigkeit kund, welche auf dem Wege der methodischen Anpassung an das allgemeine Absterbegesetz ausgeglichen werden muss. Dies wird derart bewirkt, dass alle statistisch gegebenen Punkte jenen der allgemeinen Absterbecurve entsprechenden analytischen Bedingungen einzeln unterordnet werden, wodurch die Sterbetafel einen der gesetzmässigen Absterbeordnung entsprechenden Verlauf erhält. In den vier unbestimmten Constanten, welche in den Gleichungen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der mit derselben in Beziehung stehenden Curve der Lebenden enthalten sind, ist nun der Spielraum für die Anpassung der statistisch ermittelten Absterbecurve an das allgemeine Absterbegesetz gegeben, indem alle statistisch gegebenen Punkte derselben ganz gleichen Werthen der einzelnen Constanten entsprechen müssen. Auf diese Weise wird die geometrische Lage der einzelnen statistisch gegebenen Punkte jenen Bedingungen unterordnet, welche durch die Constanten gegeben sind, so dass sich eine gesetzmässige Anordnung dieser Punkte durch gegenseitige Aufhebung der Anomalien vollzieht.

Solchermassen gestaltet sich daher der Process der mathematischen Ausgleichung zu einem Calcul, betreffend die Ermittlung der vier Constantenwerthe aus der Beschaffenheit der geometrischen Lage der einzelnen Punkte, einer statistisch ermittelten Absterbecurve.

Ueber die Methode der Durchführung dieses Calculs haben wir in der anfangs erwähnten Abhandlung in ausführlicher Weise uns geäussert und der Verlässlichkeit und systematischen Anordnung desselben in jeder Weise Genüge geleistet, so dass unter Zugrundelegung beliebig gegebener statistischer Daten, welche die Absterbeordnung betreffen, die entsprechende mathematisch ausgeglichene Sterbetafel hergestellt werden kann. Die etwas weitschweifige und complicirte Art dieser Methode veranlasste uns jedoch, nach einem einfacheren Modus, welcher für die praktische Anwendung besser geeignet erschiene, Untersuchungen anzustellen, welche insofern von Erfolg begleitet waren, als es uns gelungen ist, eine entsprechende Modification der bekannten Grundform der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung herzustellen, welche dieser Anforderung unter gewissen Bedingungen Genüge zu leisten vermag.

Diese Bedingungen treffen nun thatsächlich in unserem Falle, wo es sich um eine Reihe gleichen Abscissenintervallen entsprechender statistisch gegebener Punkte der Mortalitätscurve handelt, vollständig ein. Bei gleichen Abscissenintervallen bilden nämlich die gegebenen Ordinaten der beiden Curven eine Function, in welcher die Werthe dreier Constanten bereits als Multiplicatoren sich äussern, daher in dieser Function inbegriffen erscheinen. Bloss die vierte Constante erfordert eine specielle rechnerische Behandlung, da dieselbe im Wesen als willkürliche Constante auftritt, im speciellen Falle jedoch durch die gegebenen Umstände in ihrem Werthe bedingt wird.

Aus der Grundform, auf welcher die Beziehung der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden beruht, entspringt nun bekanntlich die Relation

$$1) \qquad \frac{dl\,L_x}{dx} + \frac{dl\,w_x}{dx} = -\frac{b}{w_x} \qquad \text{resp.} \quad (\Delta l L_x + \Delta l w_x)\, w_x = -b$$

da $\Delta x = 1$ ist. Aus dieser geht nun weiter die interessante Relation

$$2) \qquad \left(\frac{dl\,w_x}{dl\,L_x} + 1\right)\left(\frac{w'_x}{b} + 1\right) = 1 \qquad \text{resp.} \quad \left(\frac{\Delta l\,w_x}{\Delta l\,L_x} + 1\right)\left(\frac{\Delta\,w_x}{b} + 1\right) = 1$$

hervor, welche die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, deren Pol im Anfangspunkte des Achsensystems liegt und deren Halbachse $\sqrt{2}$ ist, darstellt.*)

Da nun $\Delta l L_x$, $\Delta l w_x$ und Δw_x der aus zwei aufeinanderfolgenden Punkten entspringenden jeweiligen Differenz der beziehungsweisen Werthe $l L_x$, $l w_x$ und w_x entspricht, so lassen sich diese Relationen für alle statistisch-gegebenen Punkte anwenden, so dass die Constante b als arithmetisches Mittel aus der Form 1) sich ergibt, während die Form 2) mit Rücksicht auf ihre Bedeutung zur Ausgleichung der Werthe L_x und w_x dient.

Dieser Process vollzieht sich in der Weise, dass durch wechselseitige Ermittlung der Coordinaten der gleichseitigen Hyperbel jene dieselben darstellenden Werthe durch fortgesetzte Interpolation ermittelt werden, so dass schliesslich mit Rücksicht auf die Beziehung zwischen w_x und L_x die vollständige Ausgleichung aller Punkte in beliebig genauer Weise erreicht wird.

Für die erforderliche Interpolation der Form 2) bildet die Form 1), falls dieselbe für zwei aufeinanderfolgende Werthe cumulirt wird, die entsprechende Hilfsgleichung, da dieselbe gleichzeitig der in Form 2) dargestellten Bedingung Genüge leisten muss. Auf diese Weise ist man in der Lage, die Resultate der beiden Formen gegenseitig zu controliren und den gegebenen Anforderungen zu unterordnen.

Die Einfachheit dieser Methode äussert sich darin, dass aus den gegebenen Zahlen der Lebenden L_x und der wahrscheinlichen Lebensdauer w_x bloss deren Logarithmen zu ermittteln sind, um alle in Betracht kommenden Werthe ziffermässig darzustellen.

---

*) Da hier l den natürlichen Logarithmus darstellt, so wird für den besser anzuwendenden Briggischen der entsprechende Modulus in Rechnung kommen.

Die allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und deren Bedeutung für die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie.

IV.

In der vorigen Abhandlung wurde die Lösung der reducirten Differentialgleichung von der Form

45) $$z'' - \frac{2}{x + 2C} \cdot z' + \beta z = 0$$

in welcher β eine beliebige Function von x darstellt, durchgeführt, indem der Nachweis geführt wurde, dass dieselbe in zwei Wurzelgleichungen zerfällt, welche ein System von Curvenpaaren darstellend, das ganze Gebiet der originären Wahrscheinlichkeitscurven umfassen.

Der Umstand, dass in dieser Gleichung bloss einer der beiden Coëfficienten eine beliebige Function von x darstellt, während der andere durch eine bestimmte Function dieser Variablen ausgedrückt erscheint, könnte nun zu dem Schlusse Anlass geben, dass nur eine besondere Kategorie dieser Differentialgleichungen dem genannten Princip entspricht.

Wir wollen nun den Nachweis führen, dass diese Gleichung bloss eine modificirte Form der bedingungslos allgemeinen reducirten Differentialgleichung zweiter Ordnung

46) $$z'' + \alpha z' + \beta z = 0$$

ist, in welcher sowohl β als auch α beliebige Functionen von x bedeuten. Daher das grosse mathematische Princip, nach welchem die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung das ganze Gebiet der Wahrscheinlichkeitscurven darstellen, allgemeine Bedeutung besitzt und diese Gleichungen in jeder Weise und unter allen Umständen den Grundsätzen entsprechen, welche wir in den bisherigen Abhandlungen über diesen Gegenstand als deren Charakteristikon erkannten.

Wird nämlich in die allgemeine reducirte Differentialgleichung 46) der Werth

47) $$z = \eta \cdot \frac{e^{-\int \frac{\alpha}{2} \cdot dx}}{x + 2C}$$

substituirt *), so erhält man die der Differentialgleichung 45) analoge Form

48) $$\eta'' - \frac{2}{x + 2C} \cdot \eta' + \psi(x) \cdot \eta = 0 \quad \text{worin} \quad \psi(x) = \frac{2}{(x + 2C)^2} - \left(\frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha^2}{4} - \beta\right)$$

eine beliebige Function von x darstellt. Wir haben es daher wieder mit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zu thun, welche blos

*) Siehe Form 3) unserer allgemeinen Theorie.

Diese Bedingungen treffen nun thatsächlich in unserem Falle, wo es sich um eine Reihe gleichen Abscissenintervallen entsprechender statistisch gegebener Punkte der Mortalitätscurve handelt, vollständig ein. Bei gleichen Abscissenintervallen bilden nämlich die gegebenen Ordinaten der beiden Curven eine Function, in welcher die Werthe dreier Constanten bereits als Multiplicatoren sich äussern, daher in dieser Function inbegriffen erscheinen. Bloss die vierte Constante erfordert eine specielle rechnerische Behandlung, da dieselbe im Wesen als willkürliche Constante auftritt, im speciellen Falle jedoch durch die gegebenen Umstände in ihrem Werthe bedingt wird.

Aus der Grundform, auf welcher die Beziehung der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden beruht, entspringt nun bekanntlich die Relation

1) $$\frac{dl L_x}{dx} + \frac{dl w_x}{dx} = -\frac{b}{w_x} \qquad \text{resp.} \quad (\Delta l L_x + \Delta l w_x)\, w_x = -b$$

da $\Delta x = 1$ ist. Aus dieser geht nun weiter die interessante Relation

2) $$\left(\frac{dl w_x}{dl L_x} + 1\right)\left(\frac{w'_x}{b} + 1\right) = 1 \qquad \text{resp.} \quad \left(\frac{\Delta l w_x}{\Delta l L_x} + 1\right)\left(\frac{\Delta w_x}{b} + 1\right) = 1$$

hervor, welche die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, deren Pol im Anfangspunkte des Achsensystems liegt und deren Halbachse $\sqrt{2}$ ist, darstellt.*)

Da nun $\Delta l L_x$, $\Delta l w_x$ und Δw_x der aus zwei aufeinanderfolgenden Punkten entspringenden jeweiligen Differenz der beziehungsweisen Werthe $l L_x$, $l w_x$ und w_x entspricht, so lassen sich diese Relationen für alle statistisch-gegebenen Punkte anwenden, so dass die Constante b als arithmetisches Mittel aus der Form 1) sich ergibt, während die Form 2) mit Rücksicht auf ihre Bedeutung zur Ausgleichung der Werthe L_x und w_x dient.

Dieser Process vollzieht sich in der Weise, dass durch wechselseitige Ermittlung der Coordinaten der gleichseitigen Hyperbel jene dieselben darstellenden Werthe durch fortgesetzte Interpolation ermittelt werden, so dass schliesslich mit Rücksicht auf die Beziehung zwischen w_x und L_x die vollständige Ausgleichung aller Punkte in beliebig genauer Weise erreicht wird.

Für die erforderliche Interpolation der Form 2) bildet die Form 1), falls dieselbe für zwei aufeinanderfolgende Werthe cumulirt wird, die entsprechende Hilfsgleichung, da dieselbe gleichzeitig der in Form 2) dargestellten Bedingung Genüge leisten muss. Auf diese Weise ist man in der Lage, die Resultate der beiden Formen gegenseitig zu controliren und den gegebenen Anforderungen zu unterordnen.

Die Einfachheit dieser Methode äussert sich darin, dass aus den gegebenen Zahlen der Lebenden L_x und der wahrscheinlichen Lebensdauer w_x bloss deren Logarithmen zu ermittteln sind, um alle in Betracht kommenden Werthe ziffermässig darzustellen.

*) Da hier l den natürlichen Logarithmus darstellt, so wird für den besser anzuwendenden Briggischen der entsprechende Modulus in Rechnung kommen.

Die allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und deren Bedeutung für die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie.

IV.

In der vorigen Abhandlung wurde die Lösung der reducirten Differentialgleichung von der Form

$$45)\qquad z'' - \frac{2}{x+2C}\cdot z' + \beta z = 0$$

in welcher β eine beliebige Function von x darstellt, durchgeführt, indem der Nachweis geführt wurde, dass dieselbe in zwei Wurzelgleichungen zerfällt, welche ein System von Curvenpaaren darstellend, das ganze Gebiet der originären Wahrscheinlichkeitscurven umfassen.

Der Umstand, dass in dieser Gleichung bloss einer der beiden Coëfficienten eine beliebige Function von x darstellt, während der andere durch eine bestimmte Function dieser Variablen ausgedrückt erscheint, könnte nun zu dem Schlusse Anlass geben, dass nur eine besondere Kategorie dieser Differentialgleichungen dem genannten Princip entspricht.

Wir wollen nun den Nachweis führen, dass diese Gleichung bloss eine modificirte Form der bedingungslos allgemeinen reducirten Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$46)\qquad z'' + \alpha z' + \beta z = 0$$

ist, in welcher sowohl β als auch α beliebige Functionen von x bedeuten. Daher das grosse mathematische Princip, nach welchem die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung das ganze Gebiet der Wahrscheinlichkeitscurven darstellen, allgemeine Bedeutung besitzt und diese Gleichungen in jeder Weise und unter allen Umständen den Grundsätzen entsprechen, welche wir in den bisherigen Abhandlungen über diesen Gegenstand als deren Charakteristikon erkannten.

Wird nämlich in die allgemeine reducirte Differentialgleichung 46) der Werth

$$47)\qquad z = \eta\,.\,\frac{e^{-\int\frac{\alpha}{2}\cdot dx}}{x+2C}$$

substituirt *), so erhält man die der Differentialgleichung 45) analoge Form

$$48)\qquad \eta'' - \frac{2}{x+2C}\cdot\eta' + \psi(x)\,.\,\eta = 0 \quad \text{worin} \quad \psi(x) = \frac{2}{(x+2C)^2} - \left(\frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha^2}{4} - \beta\right)$$

eine beliebige Function von x darstellt. Wir haben es daher wieder mit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zu thun, welche bloss den

*) Siehe Form 3) unserer allgemeinen Theorie.

zweiten Coëfficienten beliebig hat, während der erste durch eine bestimmte Function von x ausgedrückt erscheint, so dass in dieser Gleichung thatsächlich die durchaus allgemeine Form der reducirten Differentialgleichung zweiter Ordnung erblickt werden muss.

Diese Gleichung zerfällt nun gleichfalls, wie diejenige in 45) in die Wurzelgleichungen

49) $$y'' = y \cdot \left(\frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha^2}{4} - \beta\right) = y \cdot f(x) \quad \text{und} \quad \xi'' = \xi \cdot \psi(x)$$

worin also $$f(x) + \psi(x) = \frac{2}{(x+2C)^2}$$

ist; und zwar ergeben sich dieselben aus der Gleichung 48) sobald in dieselbe die Werthe

50) $$\eta = y(x+2C) \text{ respective } \eta \cdot \xi = (x+2C) \cdot e^{\pm \int \frac{dx}{\xi}}$$

substituirt werden. Wie ersichtlich, ergeben diese beiden Substitutionswerthe durch Verbindung und Elimination von η unsere bekannte allgemeine Grundform, durch welche das Wesen der durch diese Differentialgleichungen ausgedrückten Beziehung allgemein gekennzeichnet erscheint.

Hinsichtlich der Ermittlung der beiden Constanten C und C_1 wird also für die allgemeine Gleichung 48) der Coëfficient $\psi(x)$ demselben Verfahren unterliegen, wie der Coëfficient β in Bezug auf die Gleichung 45). Während $f(x)$ naturgemäss in diesem Falle seinen Werthbegriff entsprechend ändert, da α nicht mehr eine bestimmte, sondern eine durchaus beliebige Function von x darstellt.

Für die allgemeine reducirte Differentialgleichung von der Form 46), in welcher also sowohl β als auch α beliebige Functionen von x bedeuten, gelten daher analog zu den Formen 36) die allgemeinen Bedingungen*)

51) $$y \cdot \left(\frac{d\xi}{dx} + b\right) + \xi \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{d\xi}{dx} + b\right) + \frac{f(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Auf das Princip, welches hier zur Geltung kommt, indem die beiden beliebigen Coëfficienten α und β der Gleichung 46) in derjenigen von der modificirten Form 48) im zweiten Coëfficienten $\psi(x)$ vereinigt erscheinen, ist bereits in den Formen 90) und 91) unserer allgemeinen Theorie hingewiesen worden, so dass hieraus der geometrische Begriff dieser Transformation mit Rücksicht auf unseren Substitutionswerth 47) deutlich hervorgeht.

Die allgemeine Giltigkeit unserer für diese Gleichungen dargestellten Relationen ist daher vollständig dargethan, so dass die Lösung einer jeden beliebigen Differentialgleichung dieser Kategorie auf Grundlage der gegebenen allgemeinen Normen erfolgt. Die Coëfficienten α und β als beliebige Functionen der Abcisse x sowie deren functionellen Ausdrücke $f(x)$ und $\psi(x)$

*) In der zweiten der Bedingungen 36) ist ein Druckfehler unterlaufen und soll es daselbst anstatt $\frac{dy^2}{dx^2}$ richtig: $\frac{d^2y}{dx^2}$ lauten.

haben für das Wesen dieser Gleichungen und jene durch dieselben ausgedrückten Wahrscheinlichkeitscurven die Bedeutung charakterisirender Bedingungen, indem sie für jeden speciellen Fall zur Feststellung besonderer der Gleichung eigenthümlicher Constanten, welche die für den entsprechenden Verlauf der bezüglichen Wahrscheinlichkeitscurven charakterisirenden Umstände kennzeichnen, die Handhabe bieten; d. h. diese Functionen haben die Aufgabe für jeden besonderen Fall die das allgemeine System darstellenden originären Wahrscheinlichkeitscurven näher zu bestimmen und den jeweilig gegebenen Suppositionen zu unterordnen.

Aus dem Umstande, dass die der allgemeinen Gleichung entsprechenden Coëfficienten α und β als selbstständige Function von x, sich zu einer einzigen Function durch Transformation zusammenziehen lassen, ohne in ihrer Unabhängigkeit von einander bezüglich ihrer functionellen Beschaffenheit Abbruch zu erleiden, lässt sich der intereressante Schluss ziehen, das jeder dieser Coëfficienten für sich auf das Wesen der Curvengestaltung seinen besonderen Einfluss ausübt, welcher jedoch in analogem Sinne zur Geltung gelangt.

In der functionellen Beschaffenheit der Coëfficienten birgt sich die Wesenheit der beziehungsweisen Werthe der beiden Constanten C und C_1, und zwar ebenso wie in einer Anzahl gegebener Punkte der beziehungsweisen Curven. Während jedoch diese Constanten erst desto genauer festgestellt werden können, je mehr Punkte der supponirten Curve in Betracht kommen, wird der Werth derselben durch die gegebenen Coëficienten unter allen Umständen mathematisch genau bestimmt, so dass in diesen gewissermassen die geschlossene Function bestimmter mathematischer Ergebnisse zu erblicken ist. Daraus folgt, dass der Differentialgleichung zweiter Ordnung stets Genüge geleistet werden kann, da aus der jeweiligen functionellen Beschaffenheit der Coëfficienten, die entsprechenden Werthe dieser Constanten, welche die Krümmungsdimensionen der beziehungsweisen Curven bedingen, hervorgehen.

Dieses allgemeine, die Lösung dieser Gleichungen betreffende Gesetz findet seine Erklärung in folgendem Umstande.

Den grundlegenden Gleichungen 105) und 106) unserer allgemeinen Theorie wird allgemein Genüge geleistet durch die Relation

52) $$\frac{\xi' - 1}{\xi} \cdot \left(\frac{\alpha'}{2} - \frac{\alpha^2}{4}\right) = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{2}{(x + 2\,C)^2}\right)$$

so dass hiedurch auch der allgemeinen reducirten Differentialgleichung 46) vollständig entsprochen wird, da gemäss den Formen 109) unserer allgemeinen Theorie die Doppelrelation

53) $$\frac{z'}{z} + \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \xi'}{\xi} = \frac{y'}{y}$$

Geltung besitzt. Wird nun auf die Differentialgleichungen 49) Bezug genommen, so ergeben sich durch entsprechende Substitution zwei Gleichungen zwischen der Abscisse x und der Constante C, so dass dieselben bestimmt werden können, wobei für die Abscisse zwei oder mehrere Werthe sich ergeben, welche particulären Integralen der Curven entsprechen. Auf Grund dieser

Abscissenwerthe lässt sich dann in Verbindung mit den resultirenden Ordinatenwerthen auch die zweite Constante C_1 feststellen, so dass hiedurch den Anforderungen auch auf diesem Wege Genüge geleistet zu werden vermag.

Im Uebrigen ist unsere ursprüngliche Methode für die Ermittlung der beiden Constanten C und C_1 ihrer Einfachheit halber jeder anderen vorzuziehen, da dieselbe eine numerische Einheitlichkeit der Factoren für alle gegebenen Fälle aufweist.

Für die t-Function I. unter Berücksichtigung des unteren Zeichens ergeben sich beispielsweise folgende zwei Gleichungen zwischen den Constanten C und C_1, wenn bloss die in der positiven Sphäre liegende Curve in Betracht gezogen wird, und zwar

$$2\,C = 8\,C_1 \,.\, 0{\cdot}575941 - \varphi_1\left(\frac{1}{5{\cdot}30733\,.\,C_1^2}\right) \quad \text{(für } t=1)$$

$$2\,C = 8\,C_1 \,.\, 0{\cdot}192635 - \varphi_1\left(\frac{1}{0{\cdot}770706\,.\,C_1^2}\right) \quad \text{(für } t=3-2\sqrt{2})$$

als der ersten Lösung der Formen 41) entsprechend.*)

Daraus geht deutlich hervor, dass $f(x)$ respective $\psi(x)$ als beliebige Functionen von x thatsächlich für das Wesen dieser Differentialgleichungen keine andere Bedeutung haben, als die nähere Kennzeichnung des Verlaufes der originären Wahrscheinlichkeitscurven ebenso wie eine Anzahl gegebener Punkte derselben.

Handelt es sich darum, die Integration zwischen gegebenen Grenzen x_1 und x_2 durchzuführen, so wird laut Form 140) unserer allgemeinen Theorie die Differenz der Ordinatenproducte der beiden Curven der Anforderung Genüge leisten, da laut der allgemeinen Grundform 21)

54) $$y\,.\,\xi = b\,e^{\pm b\int\frac{dx}{\xi}} = F \pm b\int y\,dx \quad \text{daher} \quad y_2\,\xi_2 - y_1\,\xi_1 = b\int_{x_2}^{x_1} y\,dx = b\,.\,c\,.\,Y$$

sich ergibt, worin F die constante Gesammtfläche, Y dagegen die zwischen zwei gegebenen Grenzpunkten liegende Fläche der Curve $y'' = y\,.\,f(x)$ bedeutet.

Will man die verticale Verschiebung der beiden Wurzelcurven um die beziehungsweisen Abstände deren Tiefpunkte von der Abscissenachse bewirken, so nehmen die Gleichungen 37) folgende Form an:

55) $$\xi = b\,C_1\left[\frac{1-t^2}{t}\,\tau - 1{\cdot}089709\right], \quad y = c\left[\frac{\sigma}{\tau} + 1{\cdot}3681306\right], \quad x + 2\,C = \pm 8\,C_1\,.\,\tau$$

Die beziehungsweisen Abstände entsprechen nämlich den fixen Relationen**)

56) $$a_1 = -\,b\,.\,C_1\,.\,1{\cdot}089709 \qquad a_2 = c\,.\,1{\cdot}3681306$$

so dass die Integration dementsprechend modificirte Resultate liefert.

Wir verweisen diesbezüglich auf das graphisch dargestellte System der originären Wahrscheinlichkeitscurven, in welchem $\underline{OP} = a_1$ und $\underline{OQ} = a_2$.

*) Im Wesen der Rechnung gelten gemäss unseren Ausführungen für $\psi(x)$ als eine von der Variablen t abhängige Function im beziehungsweisen Sinne die gleichen Voraussetzungen wie für β.

**) Siehe: „Die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden etc.“ Seite 48, Form 11) und Seite 61, Form 22).

Die Silberfrage und der Bimetallismus.

Die bimetallistischen Bestrebungen, dem Silber im internationalen Geldverkehre seine frühere Bedeutung wiederzugeben, machen sich von Zeit zu Zeit immer wieder geltend, obzwar dieselben, wenn von dem berechtigten Bedürfnisse der Hebung des Silberpreises im Interesse des Handels abgesehen wird, ihre Berechtigung täglich mehr einbüssen. Je mehr die Productionsverhältnisse des Goldes sich bessern und die Ausbeutung dieses Edelmetalles zunimmt, desto mehr wird das Silber als Verkehrsvaluta vom Weltmarkte verdrängt, indem ein europäischer Silberstaat nach dem anderen den schwankenden Boden seiner bisherigen Währungsgrundlage verlässt und seine Zuflucht in der Stabilisirung seiner Geldverhältnisse sucht. Die principale Goldvaluta wird zur alleinigen Panacee für die hilfsbedürftigen monetaren Einrichtungen aller Länder, da sie geeignet ist, jene feste Grundlage für geordnete Währungsverhältnisse zu verbürgen, welche die Finanzpolitik eines jeden Staatswesens erheischt. Je veränderlicher der Massstab zwischen dem Gold- und Silberwerthe sich gestaltet, desto dringender wird das Bedürfniss, den Geldverkehr den schädlichen Einwirkungen dieses Vorganges zu entziehen und vom Silber als Urheber desselben unabhängig zu machen. All dies vermag die Anhänger des Bimetallismus von dem Wahne der möglichen Wiederherstellung der monetaren Bedeutung des Silbers als internationale Verkehrsvaluta nicht zu heilen und die Anstrengungen, welche in dieser Beziehung so oft schon sich als vergeblich erwiesen, werden immer wieder erneuert. Die vielen Congresse, welche seit zwei Decennien zum Zwecke der Berathung über den Gegenstand einer zu fixirenden, den neuen Verhältnissen entsprechenden Relation zwischen dem Gold- und Silberwerthe, abgehalten wurden, die Comissionen, welche zur Untersuchung der Ursachen und Wirkungen des sinkenden Silberpreises eingesetzt wurden, verliefen resultatlos und der einzige Erfolg derselben bestand darin, dass man zur Ueberzeugung gelangte, die Feststellung einer fixen Relation zwischen Gold und Silber unter den gegenwärtigen Verhältnissen sei undurchführbar. Dessenungeachtet aber werden von den Anhängern des bimetallistischen Princips immer wieder neue Versuche unternommen, in die Position des Goldes als principale Verkehrsvaluta Bresche zu schiessen. Die Parlamente fast aller bedeutenden Staaten Europas wurden in jüngster Zeit zugleich von Demonstrationen zu Gunsten der internationalen Regelung des Verhältnisses zwischen Gold und Silber heimgesucht. In London ging der Antrag dahin, die Regierung aufzufordern, mit aller Macht dahin zu wirken, um mittelst internationaler Vereinbarung ein fixes Werthverhältniss zwischen den beiden Edelmetallen herzustellen, was insbesondere mit dem von den Bimetallisten behaupteten schädlichen Einflusse der entwertheten Valuta der

Silberländer auf die Industrie Englands motivirt wurde. Die Wirkung aller dieser Bemühungen musste unter solchen Umständen nur wieder eine negative sein. So sehr es zu wünschen ist, dass die Frage der monetaren Mehrverwendung des Silbers durch internationale Verträge gelöst werde, so sehr entfernen sich die Anhänger der bimetallistischen Lehre von ihrem Ziele, solange sie daran festhalten, eine fixe Relation zwischen den beiden Edelmetallen Gold und Silber decretiren zu können, denn nach den bisherigen Erfahrungen dürfte es überhaupt kaum möglich sein, eine von den Schwankungen des Marktes unabhängige Relation herzustellen, so dass der Wunsch der Bimetallisten nach Stabilität nach wie vor unerfüllt bliebe. Ueberdies bleibt die unüberwindliche Schwierigkeit, eine Relation zu fixiren. Das in Amerika befürwortete alte Verhältniss von $15^1/_2$ zu 1 würde zweifellos allgemeine Panique bedeuten; seine Einführung wäre eine »absolute Unehrlichkeit gegenüber den Gläubigern«. Doch auch die Fixirung der Relation nach dem Stande der gegenwärtigen Marktverhältnisse zwischen Gold und Silber wäre zwecklos, da die ständigen Schwankungen immer Aenderungen der gesetzlichen Relation zur Folge haben müssten.

Wir finden es erklärlich, wenn die Stlberkönige der Vereinigten Staaten Amerikas Alles aufbieten, um ihr aufgehäuftes weisses Metall vor der Entwerthung zu bewahren und infolge dessen Alles versuchen, um Absatzquellen für dasselbe zu schaffen. Wenn dieselben daher in der Heimat ohne Rücksicht auf die Staatsinteressen die Inaugurirung der reinen Silberwährung betreiben, so ist der Zweck dieser Bestrebungen ein klarer. Anders steht es in dieser Hinsicht in den europäischen Staaten. Hier beruhen die Beweggründe auf falschen Voraussetzungen.

Die bimetallistische Strömung in England fliesst aus zwei heterogenen Quellen. Auf der einen Seite schwärmen die Grundeigenthümer und Landwirthe für die Doppelwährung, ähnlich den ostelbischen Junkern und theilweise aus denselben Beweggründen, während auf der andern Seite der Bimetallismus eine Stütze an der Baumwollindustrie Lancashires findet, die sich durch den starken Preisfall des Silbers gegenüber der ostasiatischen Concurrenz benachtheiligt sieht. Die Bimetallisten sind von jeher gewohnt, von allen anderen wirthschaftlichen Ursachen und Wirkungen zu abstrahiren und die Währungsverhältnisse als alleinige Triebkraft wirthschaftlicher Erscheinungen darzustellen. Diesen Irrthum begehen ebenso die Landwirthe, die den Preisfall der Bodenproducte auf Rechnung des Preisfalles des Silbers schreiben, ohne der Fortschritte landwirthschaftlicher Technik, der Steigerung der Production und der Erleichterung des Transports zu gedenken, wie die englischen Baumwollspinner, die vergessen, dass die indische Concurrenz wie jene Japans viel mehr auf der Billigkeit des Rohmaterials und der Arbeitskräfte, als auf dem niedrigen Cours von Rupie und Yen basirt.

Der Zweck, die Demonetisirung des Silbers auf geignete Art hintanzuhalten, ist vielleicht mit Rücksicht auf die hieraus etwa entspringenden

allgemeinen wirthschaftlichen Gefahren wichtig genug, um die möglichen Vorkehrungen in dieser Hinsicht zu treffen und wir sind seit einem Jahrzehnt bestrebt, zur rationellen Lösung dieser Frage beizutragen, doch sehen wir hierin das Wesen derselben erschöpft.

Die Ansicht, welche wir im Jahre 1886 gelegentlich der Tagung der von der englischen Regierung eingesetzten Gold- und Silbercommission diesbezüglich geäussert, hat seither durch die gemachten Erfahrungen ihre Bestätigung gefunden. Unser Standpunkt ist durchaus nicht ein der bimetallistischen Lehre entgegengesetzter, doch haben wir die Undurchführbarkeit der Herstellung einer fixen Relation auf internationaler Basis schon damals erkannt, indem wir unser Urtheil in dieser Frage in folgender Art definirten: ». . . Es handelt sich hier offenbar darum, in welcher Weise und unter welchen Auspicien die Doppelwährung in irgend einer Form zur Durchführung gelangen könnte, denn mit dem einfachen Princip einer solchen, ein bestimmtes Werthverhältniss zwischen den beiden Edelmetallen Gold und Silber herbeizuführen, kann es wohl nicht ernst sein und überdiess stösst man auf ungeheure Schwierigkeiten, ein internationales Abkommen in dieser Beziehung herbeiführen zu können.«*)

Seither haben fünf Welttheile mitgewirkt, die Undurchführbarkeit der Bimetallistenlehre zu erhöhen. In Asien ist der Rupie die metallische Basis entzogen worden, in Amerika wurde die Sherman-Bill cassirt, in Afrika hat sich die Goldausbeute in ungeahnter Weise entwickelt, in Austratien wurden neue ergiebige Goldminen erschlossen, und in Europa ist Oesterreich-Ungarn zur Goldwährung übergetreten, und Russland schickt sich soeben an, die reine Goldwährung durchzuführen. Die Macht der Thatsachen, die sich allmälig entwickelt haben, und die aus denselben hervorgegangene Disharmonie der Interessen ist zu stark, um eine internationale Verständigung der hervorragendsten Wirthschaftsgebiete bezüglich der Währung und des Werthverhältnisses zwischen Silber und Gold auch nur annähernd wahrscheinlich zu machen. Die Verschiedenheit der ökonomischen Lage, der herrschenden Gewohnheiten, sowie der factisch bestehenden Edel. metall- und Münzverhältnisse stellt sich von allem Anderen abgesehen, einer solchen Uebereinkunft mächtig in den Weg.

Aber auch das Argument von der Appreciation des Goldes hat sich als Märchen erwiesen; die Goldproduction im Jahre 1895 war doppelt so gross als jene im Jahre 1885, die grossen europäischen Banken haben grössere Goldvorräthe als jemals und die Discontrate war niemals niedriger wie jetzt.

Wenn also überhaupt an eine Action in dieser Beziehung gedacht werden kann, so könnte dieselbe einzig und allein im Interesse der Hebung des Silberpreises erfolgen, da vielleicht, wie bereits bemerkt wurde, der Umstand der vollständigen Demonetisirirung des Silbers, Gefahren wirthschaftlicher Art in sich birgt, welche derzeit nicht ermessen werden können. Eine solche

*) Siehe »Beitrag zur Lösung der Währungsfrage«, II. Lieferung dieses Werkes.

Action könnte jedoch nur dann stattfinden, wenn von der bimetallistischen Forderung, betreffend die Fixirung einer Relation zwischen Gold und Silber, Abstand genommen und zur Feststellung der Grundlage der auszuprägenden Silbermünze, welche für den internationalen Verkehr bestimmt, einer möglichst stetigen Vollwerthigkeit entsprechen soll, ein anderer Modus gewählt worden würde. Ein solcher könnte nur darin bestehen, dass zu diesem besonderen Zwecke eine Standardmünze geschaffen würde, deren Werth wohl kein fixer, doch dem inneren Silbergehalte gemäss stets dem jeweiligen Marktpreise dieses Metalles angemessener wäre. In diesem Sinne lautet auch unser diesbezüglicher Vorschlag, dessen Bekanntgabe vor Jahresfrist erfolgte.*) Für eine neben den bestehenden Währungen der einzelnen Staaten zu schaffende internationale Silberwährung wäre die geeignete Münze auf folgendem monetaren Princip beruhend, auszuprägen.

Sämmtliche an einer internationalen Silberwährung interessirte Staaten mögen unbeschadet ihre bisherigen Währungsgrundlagen zur Prägung einer gleichen Münze schreiten, welche eine Gewichtsmenge von zwei Unzen Feinsilber enthalten würde. Dieses Zweiunzenstück könnte als Handelsmünze, für Zollzahlungen und im colonialen Geldverkehre allgemeine Verwendung finden, sonst aber bloss unter folgenden Bedingungen: die Münze soll an öffentlichen Zahlstellen, nur in Verbindung mit einer gleich grossen Summe in Gold als Zahlung angenommen und ausgegeben werden. Hingegen wäre dieselbe im gewöhnlichen Geldverkehre als Zahlungsmittel möglichst zu beschränken. Der Werth dieser Münze ist veränderlich; und zwar ihrem Feingehalte an Silber gemäss derjenige, welchen zwei Standardunzen Silber nach dem Londoner Marktcours unter Einbeziehung der Prägungskosten zur Zeit besitzen. Der jeweilige Werth derselben wäre in allen Staaten auf die beziehungsweise gesetzliche Währung umgerechnet, zu publiciren.

Für diese Münze wird die freie Silberprägung gewährt, jedoch bloss bis zur Erreichung einer für jeden betheiligten Staat besonders zu fixirenden Maximalgrenze, welche alle drei Jahre nach Bedarf zn regeln wäre, wie auch gleichzeitig ein gegenseitiger Ausgleich der etwaigen Ueberschüsse an fremden Standardmünzen bankmässig eingeleitet werden könnte, um ein übermässiges Einströmen derselben in einzelne Staatsgebiete hintanzuhalten.

Durch die Bestimmung, der zufolge die Zahlung in Standardmünzen von der gleichen Summe in Gold abhängig gemacht wird, wäre dem Einströmen allzugrosser Silbermengen überhaupt ein Riegel vorgeschoben, wobei auch der Umstand in Betracht käme, dass bei steigendem Silberpreise auch eine Verschiebung des Mengenverhältnisses zwischen Silber und Gold zu Gunsten des letzteren sich vollziehen würde. Hiedurch würde sich das Verhältniss zwischen dem Gold- und Silberwerthe den jeweiligen Umständen entsprechend von selbst regeln.

*) Siehe »Zur Lösung der Silberfrage« VII. Lieferung.

Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln.

II.

In der vorigen Abhandlung über diese Frage haben wir die mathematische Grundlage für einen einfachen Modus der Ausgleichung der Sterbetafeln zur Darstellung gebracht, indem wir diejenige Grundform, auf welcher die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden beruht, zum Ausgangspunkte unserer Untersuchungen machten.

Die daselbst dargestellten Formen 1) und 2), welche in ihrem Wesen identischer Beschaffenheit sind, liefern die Handhabe, auf dem möglichst kürzesten Wege und unter Vermeidung jeder complicirten Rechnungsart zu einem Resultate zu gelangen, welches den Anforderungen nach jeder Richtung hin zu entsprechen vermag.

Diesbezüglich ist die Form 2) insoferne von besonderer Bedeutung, als in derselben, wie bereits hervorgehoben wurde, die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel von der Beschaffenheit

3) $$(u + 1)(v + 1) = 1$$

zum Ausdrucke gelangt, deren Coordinaten

4) $$u = \frac{d\,l\,w_r}{d\,l\,L_x} \text{ und } v = \frac{w'_r}{b}$$

in Bezug auf ihre Werthbeschaffenheit sich entgegengesetzt gestalten, indem die erstere positive, die letztere negative Werthe darstellt. Die Gleichung 2) respective 3) repräsentirt daher eine gleichseitige Hyperbel, deren Pol in den Anfangspunkt des Achsensystems zu liegen kommt.

Das Wesen dieser Form gestattet nun die Ausgleichung der gegebenen Werthe durch Interpolation in höchst einfacher und präciser Weise, wie auch dieser Process in seinem Verlaufe zu beliebig genauen Resultaten führt und allen Anforderungen Genüge zu leisten vermag, welche an die Verlässlichkeit derselben gestellt werden können.

In Nachfolgendem wollen wir ein Beispiel der mathematischen Ausgleichung einer Sterbetafel durchführen, und zwar finden wir es der Uebersichtlichkeit halber für geboten, bevor wir auf die Ausgleichung statistischer Ursprungszahlen eingehen, eine nach den bisherigen Hilfsmitteln unzureichend ausgeglichene Tafel nach unserer Methode einer genauen Rectification zu unterziehen und haben uns diesbezüglich für die Tafel der 17 englischen Gesellschaften entschieden. Der Gang des Ausgleichungsprocesses ist in nachfolgenden Zifferntabellen zur Darstellung gebracht.

Tabelle I.

Alter Jahre	Wahrscheinliche fernere Lebensdauer w_x	Differenzen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden w_x $\frac{\Delta w_x}{\Delta x} = w'_x$	Die Briggischen Logarithmen $lg\ w_x$	Differenzen je zweier aufeinanderfolgenden Logarithmen $\Delta\ lg\ w_x$
10	47·86241	— 0·67822	1·6799947	— 0·0061982
11	47·18419	— 0·68082	1·6737965	— 0·0063120
12	46·50337	— 0·68330	1·6674845	— 0·0064287
13	45·82007	— 0·68565	1·6610558	— 0·0065480
14	45·13442	— 0·68785	1·6545078	— 0·0066696
15	44·44657	— 0·68990	1·6478382	— 0·0067940
16	43·75667	— 0·69182	1·6410442	— 0·0069212
17	43·06485	— 0·69373	1·6341230	— 0·0070531
18	42·37112	— 0·69545	1·6270699	— 0·0071873
19	41·67567	— 0·69749	1·6198826	— 0·0073299
20	40·97818	— 0·69904	1·6125527	— 0·0074726
21	40·27914	— 0·70066	1·6050801	— 0·0075210
22	39·57848	— 0·70236	1·5974591	— 0·0077762
23	38·87612	— 0·70368	1·5896829	— 0·0079329
24	38·17244	— 0·70512	1·5817500	— 0·0080974
25	37·46732	— 0·70660	1·5736526	— 0·0082686
26	36·76072	— 0·70778	1·5653840	— 0·0084432
27	36·05294	— 0·70904	1·5569408	— 0·0086273
28	35·34390	— 0·70996	1·5483135	— 0·0088116
29	34·63394	— 0·71103	1·5395019	— 0·0090089
30	33·92291	— 0·71176	1·5304930	— 0·0092090
31	33·21115	— 0·71265	1·5212840	— 0·0094207
32	32·49850	— 0·71324	1·5118633	— 0·0096376
33	31·78526	— 0·71395	1·5022257	— 0·0098661
34	31·07131	— 0·71480	1·4923596	— 0·0101078
35	30·35651	— 0·71319	1·4822518	— 0·0103249
36	29·64332	— 0·71216	1·4719269	— 0·0105611
37	28·93116	— 0·71383	1·4613658	— 0·0108499
38	28·21733	— 0·71565	1·4505159	— 0·0111567
39	27·50168	— 0·71751	1·4393592	— 0·0114810
40	26·78417	— 0·71956	1·4278782	— 0·0118268
41	26·06461	— 0·72044	1·4160514	— 0·0121733
42	25·34417	— 0·72088	1·4038781	— 0·0125320
43	24·62329	— 0·71979	1·3913461	— 0·0128846
44	23·90350	— 0·71718	1·3784615	— 0·0132278
45	23·18642	— 0·71335	1·3652337	— 0·0135712
46	22·47307	— 0·70772	1·3516625	— 0·0138968
47	21·76535	— 0·70179	1·3377657	— 0·0142339
48	21·06356	— 0·69530	1·3235318	— 0·0145778
49	20·36826	— 0·68854	1·3089540	— 0·0149350
50	19·67972	— 0·68126	1·2940190	— 0·0153005
51	18·99846	— 0·67320	1·2787185	— 0·0156683
52	18·32526	— 0·66534	1·2630502	— 0·0160614
53	17·65992	— 0·65626	1·2469888	— 0·0164463
54	17·00366	— 0·64744	1·2305425	— 0·0168595

Alter Jahre	Wahrscheinliche fernere Lebensdauer w_x	Differenzen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden w_x $\frac{\Delta w_x}{\Delta x} = w'_x$	Die Briggischen Logarithmen $lg\, w_x$	Differenzen je zweier aufeinanderfolgenden Logarithmen $\Delta\, lg\, w_x$
55	16·35622	— 0·63878	1·2136830	— 0·0173011
56	15·71744	— 0·62791	1·1963819	— 0·0177060
57	15·08953	— 0·61817	1·1786759	— 0·0181666
58	14·47136	— 0·60851	1·1605093	— 0·0186567
59	13·86285	— 0·59633	1·1418526	— 0·0190955
60	13·26652	— 0·58495	1·1227571	— 0·0195841
61	12·68157	— 0·57249	1·1031730	— 0·0200618
62	12·10908	— 0·55925	1·0831112	— 0·0205354
63	11·54983	— 0·54577	1·0625758	— 0·0210228
64	11·00406	— 0·53162	1·0415530	— 0·0215050
65	10·47244	— 0·51708	1·0200480	— 0·0219910
66	9·95536	— 0·50229	0·9980570	— 0·0224841
67	9·45307	— 0·48640	0·9755729	— 0·0229419
68	8·96667	— 0·47244	0 9526310	- 0·0235070
69	8·49423	— 0·45698	0·9291240	— 0·0240165
70	8·03725	— 0·44187	0·9051075	— 0·0245580
71	7·59538	— 0·42692	0·8805495	— 0·0251236
72	7·16846	— 0·41078	0·8554259	— 0·0256283
73	6·75768	— 0·39526	0·8297976	— 0·0261752
74	6·36242	— 0·38275	0·8036224	— 0·0269453
75	5·97967	— 0·36793	0·7766771	— 0·0275796
76	5·61174	— 0·35437	0·7490975	— 0·0283289
77	5·25737	— 0·34035	0·7207686	— 0·0290754
78	4·91692	— 0·32668	0·6916932	— 0·0298578
79	4·59024	— 0·31372	0·6618354	— 0·0307449
80	4·27652	— 0·30147	0·6310905	— 0·0317479
81	3·97505	— 0·29029	0·5993426	— 0·0329335
82	3·68476	— 0·28178	0·5664091	— 0·0345497
83	3·40298	— 0·27358	0·5318594	— 0·0363983
84	3·12940	— 0·26748	0·4954611	— 0·0388036
85	2·86192	— 0·26159	0·4566575	— 0·0416290
86	2·60033	— 0·25595	0·4150285	— 0·0450005
87	2·34438	— 0·25057	0·3700280	— 0·0490807
88	2·09381	— 0·24381	0·3209373	— 0·0537656
89	1·85000	— 0·23590	0·2671717	— 0·0592413
90	1·61410	— 0·22733	0·2079304	— 0·0659259
91	1·38677	— 0·21667	0·1420045	— 0·0737815
92	1·17010	— 0·20490	0·0682230	— 0·0836057
93	0·96520	— 0·18259	0·9846173—1	— 0·0910719
94	0·78261	— 0·16461	0·8935454—1	— 0·1025569
95	0·61800	— 0·13151	0·7909885—1	— 0·1039146
96	0·48649	— 0·10387	0·6870739—1	— 0·1043062
97	0·38262	— 0·13262	0·5827677—1	— 0·1848277
98	0·25000	— 0·15000	0·3979400—1	— 0·3979400
99	0·10000	— 0·10000	0·0000000—1	

Aus den hier berechneten Zahlen ist bereits zu entnehmen, in welcher Weise der Process der Ausgleichung und die gesetzmässige Anordnung der einzelnen Punkte der Absterbecurve durch gegenseitige Aufhebung der Anomalien sich vollziehen dürfte.

Die aus den Zahlen der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer w_x entspringenden Differenzen derselben zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Jahren, welche mit Rücksicht auf den in Betracht kommenden Umstand ganzer Jahresintervalle für Δx den Werth 1 bedingen, daher der Relation $\Delta\, w_x = w'_x$ entsprechen, deuten in ihrer systematischen Anordnung der steigenden und fallenden Werthe den Verlauf der bezüglichen Curve an.

Die Zahlen, welche die Briggischen Logarithmen der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer w_x darstellen, ersetzen mit Rücksicht auf den in Rechnung kommenden Modulus die natürlichen Logarithmen vollständig, ohne das Calcul irgendwie zu compliciren.

Während nämlich in der Relation 1) der Modulus bloss als Multiplicator der Constante b erscheint, gelangt derselbe in der Relation 2) gänzlich ausser Rechnung, da hier die Differenzen der beziehungsweisen Logarithmen in ihren Quotienten zur Geltung gelangen.

In den Differenzen der Briggischen Logarithmen der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer äussert sich bereits eine bestimmte Continuität in der Abstufungsart der Zahlen, deren Verlauf infolge des logarithmischen Processes offenbar ein regelmässigerer wird.

In unseren weiteren rechnerischen Ausführungen werden wir nunmehr aus den Zahlen der Lebenden, analog zu dieser Tabelle, vorerst deren Logarithmen und sodann deren Differenzen ermitteln. Aus diesen Ergebnissen müssen, entsprechend den gegebenen Formen, in erster Linie die Summen, in zweiter Linie die Quotienten der beiderseitigen logarithmischen Differenzen berechnet werden.

In den Producten dieser Differenzensummen mit den entsprechenden Werthen der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer w_x ergeben sich sodann unter Bezugnahme auf den Modulus die mit den einzelnen Punkten correspondirenden Näherungswerthe der Constante b, deren arithmetisches Mittel den gesuchten Werth derselben liefert.

Der ermittelte Durchschnittswerth der Constante b bietet endlich die gesuchte Handhabe, in Verbindung mit den tabellarisch dargestellten Werthen die Coordinaten der bezüglichen gleichseitigen Hyperbel zu bestimmen, und mit Hilfe des bekannten Interpolationsprocesses die Ausgleichung der Sterbetafel durchzuführen.

Gegenüber der das theoretische Princip begründenden, jedoch in den Rechnungsgrundlagen unstreitig sehr umständlichen Methode, besitzt die hier dargestellte einfache Form daher einen besonderen Vorzug, welcher in dem ziffermässigen Rechnungsgange desto mehr zur Geltung kommt.

Landwirthschaftliche Creditvereine und Genossenschaftscassen.

Die Institution der Banken ist zum grossen Theile aus dem Bedürfnisse nach einem organisch ausgebildeten Credite entstanden, und die Entwicklung derselben zeigt, dass sich dieses Bedürfniss anfangs bloss auf den Handelscredit beschränkte. Erst im Laufe der Zeit wurde auch der landwirthschaftliche Credit einer Organisation unterworfen, und zwar ging die Initiative von Seite der einzelnen Regierungen aus, welche das Bedürfniss empfanden, dem ständischen Gutsbesitz Gelegenheit zu billigem Credit zu geben. Das erste derartige Creditinstitut wurde in Preussen gegründet. Nach dem siebenjährigen Kriege befanden sich die preussischen mittleren Gutsbesitzer in grosser Nothlage. Dieselben, auch Junker genannt, spielten als Landwirthe daselbst eine grosse Rolle, weil sie den kleinen Adel repräsentirten und Kriegsdienste leisteten. Sie hatten daher für Preussen eine grosse Bedeutung und fand es deshalb die Regierung für geboten, den Besitz in ihren Händen zu erhalten. Bühring hatte damals diese Idee angeregt, welche von Friedrich dem Grossen gefördert wurde. Demzufolge bildeten sich im Jahre 1770 unter Intervention der Regierung Verbände, welche den Gläubigern Simultanhypotheken einräumten, später aber auch Pfandbriefe ausgaben. In Oesterreich war das erste Institut dieser Art der ständische Landwirthschaftliche Creditverein in Lemberg mit Beschränkung auf Landtafelgüter in Galizien. Auf der gleichen Grundlage entstanden später landwirthschaftliche Creditvereine auch für den kleinen Grundbesitz sowie öffentliche durch das Privatcapital geschaffene Institute, welche den Boden- und Hypothekarcredit unumschränkt cultivirten und hiedurch auch dem kleinen Grundbesitz Gelegenheit gaben, Credit gegen mässigen Zinsfuss in Anspruch zu nehmen. Diese Privatinstitute entsprachen den Intentionen des mittleren Bauernstandes umsomehr, als dieser den Zwang von Staatswegen stets perhorrescirte. Insbesondere zu Ende des vorigen und zu Anfang dieses Jahrhunderts war das Losungswort: die Befreiung des Individuums von allen Fesseln des Staates und der Corporation. Was war der Grund dieses weitgehenden Verlangens nach individueller Freiheit? Um dies zu beantworten, muss man sich der Zustände des achtzehnten Jahrhunderts erinnern. Die Staatsgewalt befand sich in den Händen von Privilegirten. In rücksichtsloser Weise wurde sie den Interessen derselben dienstbar gemacht. Ein Hauptmittel, dessen man sich dabei bediente, waren die Corporationen. Tausende von Armen und Befähigten wurden durch sie in der Entfaltung ihrer Kräfte und damit in der Möglichkeit, sich zu erhalten, gehemmt. Mit Entrüstung wendeten sich dagegen Adam Smith und die Physiokraten. Am stärksten trat die Reaction hervor in Frankreich. Nicht nur, dass es Turgot war, der schrieb, dass der Nationalökonom bei

seinen Untersuchungen so denken müsse, als ob es gar keinen Staat gäbe, dort wurde man aus Furcht vor missbräuchlicher Vergewaltigung des Individuums der Feind selbst jeder freiwilligen Vereinigung zu wirthschaftlichen Zwecken. An dieser Auffassung, welche nur vom Individuum in seiner Vereinzelung etwas wissen wollte, wurde aber merkwürdigerweise später auch von den Regierungen festgehalten und dieselbe beherrschte die nationalökonomische Literatur der ersten Hälfte des Jahrhundertes in solchem Masse, dass, als die Idee der Association in der Theorie aufkam, dies als etwas Revolutionäres galt.

Seitdem ist ein grosser Wandel in den Anschauungen eingetreten, die lang verfehmte Association und Corporation wird heute wieder als berechtigt anerkannt und was vor hundert Jahren bloss für den ständischen Grundbesitz sich von Vortheil erwies, wird jetzt zur Rettung des Bauernstandes von Staatswegen decretirt. Die Organisation des Bauernstandes zum Zwecke der Milderung der landwirthschaftlichen Krise und der Beseitigung der Creditnoth auf dem Lande bildet seit Jahren das Leitmotiv der Bestrebungen der mitteleuropäischen Regierungen in ökonomischer Beziehung. Der landwirthschaftliche Personalcredit soll durch genossenschaftliche Organisation erleichtert und verbilligt werden; das Ziel ist entschieden ein erstrebenswerthes, ob aber dasselbe durch die angewendeten Mittel erreicht zu werden vermag, ist eine Frage, deren Lösung ganz von den gegebenen Bedingungen abhängt, unter welchen eine derartige Organisation sich vollziehen wird.

Die freiwillige Organisation setzt die Ueberzeugung ihrer Nothwendigkeit bei ihren Theilnehmern voraus. Wer nicht überzeugt ist, unterwirft sich nicht den Opfern, welche die Organisation auferlegt.

Dadurch wird deren Zweck vollkommen erreicht; sie dient dann wirklich dem Interesse aller Betheiligten. Ein Missbrauch der Gewalt, welche die Organisation gibt, seitens Derer, die an der Spitze stehen, zu Zwecken, die nicht wirklich im Interesse der Mitglieder liegen, ist eben infolge der lebhaften Theilnahme der Letzteren ausgeschlossen.

Anders bei der Zwangsorganisation durch den Staat. Sie wirkt weit rascher und extensiver, denn Alle müssen sich ihr unterwerfen. Allein sie beruht nicht auf der Ueberzeugung ihrer Theilnehmer; sie wird decretirt. Also auch Nichtüberzeugte müssen ihr angehören. Daher sind ihre Theilnehmer zum grossen Theil lässig und kann die Organisation leicht zu Dingen missbraucht werden, die nicht völlig den Interessen der Mitglieder entsprechen. Und da es lediglich von der Staatsgewalt abhängt, welche Interessenkreise sie organisirt, ergibt sich die Möglichkeit für Diejenigen, welche der Staatsgewalt nahestehen oder gar sie in Händen haben, nur einen Interessentenkreis, nicht auch den entgegenstehenden zu organisiren. Die Zwangsorganisation birgt also die Gefahr jenes Missbrauches der Staatsgewalt im wirthschaftlichen Interesse der jeweilig herrschenden Gesellschaftsclasse, um dessentwillen die besten Männer im 18. Jahrhundert, das ja jene Zwangsorganisationen kannte, sich gegen sie aussprechen.

Darin culminiren denn auch die Bedenken, welche sich in dieser Hinsicht allgemein geltend machen. Die Einmischung des Staates wird der gesunden Entwicklung des Genossenschaftswesens als schädlich angesehen. Es ist richtig, dass die Rettung der Landwirthschaft in der Genossenschaft zu suchen ist. In dieser Auffassung besteht heute allgemeine Uebereinstimmung, und Niemand wird der Landwirthschaft die genossenschaftliche Organisation versagen, doch muss dieselbe eine freiwillige, von staatlicher Bevormundung unbeeinflusste sein. Der Staat kann die Institution fördern und kräftigen, kann durch seine Behörden die nöthige Aufsicht üben, aber er möge es unterlassen, dieselbe in den Rahmen einer behördlich decretirten Zwangsorganisation zu zwängen.

In diesem Sinne ist auch die neueste diesbezügliche Einrichtung in Preussen zu verstehen. Unter dem Namen »Preussische Central-Genossenschaftscassa« wird zur Förderung des landwirthschaftlichen Personalcredits eine Anstalt errichtet, welche befugt ist:

1. An die Vereinigungen und Verbandscassen eingetragener Erwerbs- und Wirthschaftsgenossenschaften, die landschaftlichen (ritterschaftlichen) Darlehenscassen, die gleichartigen Provinzialinstitute Darlehen zu gewähren; 2. von diesen Vereinigungen Gelder gegen Verzinsung aufzunehmen und zur Erfüllung dieser Aufgaben 3. sonstige Gelder im Depositencheckverkehr als Spareinlagen u. s. w. anzunehmen, auch andere Bankgeschäfte, wie Lombard-, Escompte- und Effectengeschäfte u. s. w. zu betreiben. Der Staat gewährt der Anstalt in dreiprocentigen Schuldverschreibungen als Grundcapital eine Einlage von 5 Millionen Mark; den erwähnten genossenschaftlichen Vereinigungen, Cassen, Instituten ist es vorbehalten, sich an der Anstalt mit Vermögensanleihen zu betheiligen. Vom Reingewinn der Anstalt soll die Hälfte zur Bildung eines Reservefonds, die andere Hälfte zur Verzinsung der Einlagen bis zu drei Procent verwendet, ein Ueberrest gleichfalls dem Reservefonds zugeführt werden; erst wenn dieser die Höhe von einem Viertel der Einlagen erreicht, soll eine höhere Verzinsung bis] zum Maximum von vier Procent gewährt werden, während darüber noch hinausgehende Ueberschüsse wieder an den Reservefonds fallen sollen. Weitere Bestimmungen regeln die Verwaltung der Anstalt durch ein vom Staate zu ernennendes Directorium, die Staatsbeamtenqualität der Beamten, die Rechnungsprüfung durch die Oberrechnungskammer, die Vertretung der Anstalt durch das Directorium, die Function des als Beirath zu hörenden sachverständigen Ausschusses.

Es mag zwar zutreffen, dass die Verwaltung jener Genossenschaftsverbände, die das neue Institut zur Crediterlangung benützen wollen, sich gewissen, die finanzielle Sicherheit der betreffenden Körperschaften gewährleistenden Vorschriften wird fügen müssen; allein diese indirecte, nur in der Richtung materieller Sicherheit wirkende Staatsaufsicht schadet unseres Erachtens nicht, vermag vielmehr die Genossenschaften nur zu stärken und das Vertrauen zu ihnen zu erhöhen.

Anders gestaltet sich diese Frage in Oesterreich. Das, was bisher geschehen ist und geplant wird, ist eher geeignet, im Bauernstande Misstrauen zu erwecken, als den angestrebten Zweck zu erfüllen. Das Wesen der österreichischen »Zwangsgenossenschaften für die Landwirthschaft« mit ihrem Anhängsel der sogenannten Rentengüterinstitution*) beruht auf reiner Zwangsorganisation, und bildet daher eine Massregel, welche den Interessenten in erster Linie bloss Opfer auferlegt, ohne deren wirklichen Vortheil zu sichern.

Nach Massgabe dessen soll gesetzlich für jeden Gerichtsbezirk eine Berufsgenossenschaft der Landwirthe und in jedem Lande eine solche für den Bereich des Landes errichtet werden. Die Landesgesetzgebung setzt die Grenzen der Genossenschaften fest. Sie kann also auch anordnen, dass die Bezirksgenossenschaft nicht alle Landwirthe umfasse, sondern dass für die Grossgrundbesitzer besondere Berufsgenossenschaften gebildet werden sowie dass die Kleingütler aus den für den mittleren Besitz berechneten Bezirksgenossenschaften ausgeschlossen bleiben.

Der Wirkungskreis dieser Genossenschaften soll die Vertretung aller berufsständischen Interessen der Genossen umfassen: die Errichtung von Magazinen für die Lagerung landwirthschaftlicher Producte, wie die Errichtung von Schlachthäusern und Backhäusern, die Aufgaben landwirthschaftlicher Consumvereine, wie die landwirthschaftlicher Verkaufsgenossenschaften, die Beschaffung von Maschinen zu gemeinsamer Benützung, die Aufgaben landwirthschaftlicher Creditgenossenschaften, die Convertirung von Hypothekardarlehen, die Vertretuug von landwirthschaftlichen Interessen auf den Productenbörsen etc.

Die Haupteigenthümlichkeit dieser Genossenschaften aber ist, dass die Zugehörigkeit zu ihnen keine freiwillige ist. Es handelt sich um die Errichtung von Zwangsgenossenschaften des mittleren Besitzes, welchen gleichzeitig die Aufgaben von Associationen und Corporationen zugewiesen werden und denen insbesondere auch die Aufgabe zufällt, die Interessen der ländlichen Arbeitgeber beim Abschlusse und bei Durchführung des Arbeitsvertrages gegenüber den ländlichen Arbeitern zur Geltung zu bringen.

Auf solcher Grundlage ist eine gedeihliche Entwicklung des landwirthschaftlichen Credites kaum zu erreichen. Die hier zur Geltung gelangenden Bestrebungen hätten bei freiwilligem Zusammenwirken der wirthschaftlichen Kräfte gewiss manche Vortheile gebracht. Doch unter dem Zwange verdorrt jede Initiative.

---

*) Unter der Institution der Rentengüter ist die Einrichtung zu verstehen, nach welcher die zur executiven Feilbietung gelangenden Liegenschaften von der landwirthschaftlichen Berufsgenossenschaft derart eingelöst werden, dass für den Besitzer der Kaufschilling in Form einer festen, nach den Bestimmungen des Gesetzes ablösbaren Geldrente gezahlt wird, wobei der Eigenthümer gewissen gesetzlich normirten Eigenthumsbeschränkungen sich unterwerfen muss.

Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln.

III.

Die Grundlage des Ausgleichungsprocesses nach dieser Methode bilden den bisherigen Ausführungen gemäss zwei allgemein giltige mathematische Regeln, welche für die Charakterisirung der Absterbeordnung von besonderer Bedeutung sind. Dieselben sind in den Formen 1) und 2) dargestellt und lassen sich in folgender Weise interpretiren.

I. **Das Product der wahrscheinlichen Lebensdauer w_x und der Summe der Logarithmen-Differenzen der Lebenden L_x und der wahrscheinlichen Lebensdauer w_x ist constant, daher der numerische Werth desselben für alle Altersclassen gleich gross.**

II. **Der um die Einheit vermehrte Quotient zwischen den Logarithmen - Differenzen der wahrscheinlichen Lebensdauer w_x und der Lebenden L_x multiplicirt mit dem um die Einheit vermehrten Quotienten zwischen der Differenz der wahrscheinlichen Lebensdauer des betreffenden Alters und der Constante b ist stets gleich der Zahleneinheit.**

Werden daher für eine bestimmte Sterbetafel diese Producte bei allen Altersclassen ermittelt, so ergeben sich je nach der Regelmässigkeit im gesetzmässigen Verlaufe derselben in den einzelnen Altern mehr oder minder grosse Abweichungen von diesen Regeln, so dass hieraus auf die Beschaffenheit der betreffenden Tafel hinsichtlich deren erforderlichen mathematischen Ausgleichung geschlossen zu werden vermag.

Die Ausgleichung selbst besteht in der vollständigen Anpassung der Sterbetafel an diese beiden Regeln, daher in der Beseitigung der Abweichungen, welche sich bezüglich der jeweiligen Resultate vom einheitlichen Resultatswerthe ergeben.

Hinsichtlich dessen ist die Ermittlung der Constante bei der Regel I von Bedeutung, da hiefür nicht immer der Durchschnitt sämmtlicher. den einzelnen Altern entsprechender Werthe massgebend sein kann, insbesondere als die Verlässlichkeit der Statistik in höheren Altern infolge stetiger Abnahme des beobachteten Materiales eine immer geringere wird. Es wird deshalb diesbezüglich die Beschaffenheit der Zahlen blos etwa bis zum 80. oder 85. Lebensjahre in Betracht kommen können, aus deren arithmetischem Mittel die gesuchte constante Zahl festzustellen ist, nach welcher alle Resultatswerthe geregelt werden müssen.

Mit dieser Regelung ist natürlich auch die entsprechende Ausgleichung der Zahlen der Lebenden und derjenigen der wahrscheinlichen Lebensdauer, aus denen die bezüglichen Resultatswerthe entspringen, zu verstehen. Nachfolgende Tabelle stellt die der Sterbetafel der 17 englischen Gesellschaften entsprechenden abgeleiteten Zahlenwerthe nach Regel I dar.

Tabelle II.

Alter Jahre	Lebende L_x	Die Briggischen Logarithmen $lg\ L_x$	Differenzen je zwei aufeinander folgenden Logarithmen $\Delta\, lg\, L_x$	Constanter Werth $(\Delta\, lg\, L_x + \Delta\, lg\, w_x)\, w_x = -\frac{b}{\mu}$, $\mu = 2·3025851$ *)
10	100,000	5·0000000	— 0·0029458	— 0·4376539
11	99,324	4·9970542	— 0·0029571	— 0·4373550
12	98,650	4·9940971	— 0·0029685	— 0·4370016
13	97,978	4·9911286	— 0·0029845	— 0·4367801
14	97,307	4·9881441	— 0·0030052	— 0·4366665
15	96,636	4·9851389	— 0·0030260	— 0·4364656
16	95,965	4·9821129	— 0·0030519	— 0·4363900
17	95,293	4·9790610	— 0·0030781	— 0·4362986
18	94,620	4·9759829	— 0·0031092	— 0·4362744
19	93,945	4·9728737	— 0·0031410	— 0·4363820
20	93,268	4·9697327	— 0·0031780	— 0·4364176
21	92,588	4·9665547	— 0·0032156	— 0·4364889
22	91,905	4·9633391	— 0·0032538	— 0·4365506
23	91,219	4·9600853	— 0·0032976	— 0·4365982
24	90,529	4·9567877	— 0·0033421	— 0·4366737
25	89,835	4·9534456	— 0·0033876	— 0·4367265
26	89,137	4·9500580	— 0·0034387	— 0·4367872
27	88,434	4·9466193	— 0·0034910	— 0·4369004
28	87,726	4·9431283	— 0·0035491	— 0·4368745
29	87,012	4·9395792	— 0·0036087	— 0·4369973
30	86,292	4·9359705	— 0·0036743	— 0·4370388
31	85,565	4·9322962	— 0·0037416	— 0·4371352
32	84,831	4·9285546	— 0·0038154	— 0·4372022
33	84,089	4·9247392	— 0·0038909	— 0·4372696
34	83,339	4·9208483	— 0·0039682	— 0·4373597
35	82,581	4·9168801	— 0·0040525	— 0·4364476
36	81,814	4·9128276	— 0·0041389	— 0·4366461
37	81,038	4·9086887	— 0·0042274	— 0·4362037
38	80,253	4·9044613	— 0·0043237	— 0·4370167
39	79,458	4·9001376	— 0·0044223	— 0·4373673
40	78,653	4·8957153	— 0·0045236	— 0·4379318
41	77,838	4·8911917	— 0·0046333	— 0·4380576
42	77,012	4·8865584	— 0·0047573	— 0·4381830
43	76,173	4·8818011	— 0·0049139	— 0·4382578
44	75,316	4·8768872	— 0·0051100	— 0·4383377
45	74,435	4·8717772	— 0·0053363	— 0·4383972
46	73,526	4·8664409	— 0·0056120	— 0·4384227
47	72,582	4·8608289	— 0·0059098	— 0·4384348
48	71,601	4·8549191	— 0·0062374	— 0·4384422
49	70,580	4·8486817	— 0·0065907	— 0·4384411
50	69,517	4·8420910	— 0·0069778	— 0·4384308
51	68,409	4·8351132	— 0·0074015	— 0·4382908
52	67,253	4·8277117	— 0·0078652	— 0·4384612
53	66,046	4·8198465	— 0·0083720	— 0·4382892
54	64,785	4·8114745	— 0·0089128	— 0·4382236

Alter Jahre	Lebende L_x	Die Briggischen Logarithmen $lg\ L_x$	Differenzen je zwei aufeinander folgenden Logarithmen $\Delta lg\ L_x$	Constanter Werth $\frac{(\Delta lg\ L_x + \Delta lg\ w_x)\ w_x}{\mu \cdot 2{\cdot}3025851}$ *) $= -\frac{b}{\mu}$
55	63,469	4·8025617	— 0·0095121	— 0·4385626
56	62,094	4·7930496	— 0·0101615	— 0·4380048
57	60,658	4·7828881	— 0·0108526	— 0·4378863
58	59,161	4·7720355	— 0·0116130	— 0·4380437
59	57,600	4·7604225	— 0·0124439	— 0·4372261
60	55,973	4·7479786	— 0·0133788	0·4373031
61	54,275	4·7345998	— 0·0143991	— 0·4370183
62	52,505	4·7202007	— 0·0155269	— 0·4366813
63	50,661	4·7046738	— 0·0167526	— 0·4362996
64	48,744	4·6879212	— 0·0181024	— 0·4358422
65	46,754	4·6698188	— 0·0195793	— 0·4353425
66	44,693	4·6502395	— 0·0211869	— 0·4347605
67	42,565	4·6290526	— 0·0229508	— 0·4338269
68	40,374	4·6061018	— 0·0248578	— 0·4336709
69	38,128	4·5812440	— 0·0269124	— 0·4326018
70	35,837	4·5543316	— 0·0291572	— 0·4317225
71	33,510	4·5251744	— 0·0315909	— 0·4307682
72	31,159	4·4935835	— 0·0342363	— 0·4291370
73	28,797	4·4593472	— 0·0369222	— 0·4263920
74	26,439	4·4224250	— 0·0404080	0·4285300
75	24,100	4·3820170	— 0·0436203	— 0·4257519
76	21,797	4·3383967	— 0·0472944	— 0·4243782
77	19,548	4·2911023	— 0·0513275	— 0·4227080
78	17,369	4·2397748	— 0·0557367	— 0·4208614
79	15,277	4·1840381	0·0605131	— 0·4188961
80	13,290	4·1235250	— 0·0657068	— 0·4167670
81	11,424	4·0578182	— 0·0713152	— 0·4143940
82	9,694	3·9865030	— 0·0773751	— 0·4124160
83	8,112	3·9091279	— 0·0840265	— 0·4098022
84	6,685	3·8251014	— 0·0913426	— 0·4072683
85	5,417	3·7337588	0·0996848	— 0·4044289
86	4,306	3·6340740	— 0·1092886	— 0·4012027
87	3,348	3·5247854	0·1204649	— 0·3974791
88	2,537	3·4043205	0·1338746	0·3928830
89	1,864	3·2704459	0·1502041	— 0·3874684
90	1,319	3·1202418	— 0·1698769	— 0·3806141
91	892	2·9503649	0·1944900	— 0·3720310
92	570	2·7558749	0·2256752	— 0·3618900
93	339	2·5301997	0·2653819	0·3440500
94	184	2·2648178	0·3154278	0·3271190
95	89	1·9493900	0·3811883	— 0·2997937
96	37	1·5682017	0·4542583	— 0·2711110
97	13	1·1139434	0·5118834	— 0·2665756
98	4	0·6020600	0·6020600	— 0·2500000
99	1	0·0000000		

*) Modulus zur Umrechnung des Briggischen Logarithmus in den natürlichen.

Mit Rücksicht auf die Umstände, welche bezüglich der nach Regel I als constant zu betrachtenden Resultatswerthe bestehen, werden die für die einzelnen Alter zumeist variirenden, jedoch bis zu einem gewissen höheren Alter nur wenig von einander abweichenden diesbezüglichen Zahlen die Grundlage für die Bestimmung der Constante *b*, welche als ausgeglichener Werth derselben zu gelten hat, bilden; während jene mit etwa bedeutenden Abweichungen behafteten Zahlen der höheren Altersclassen schon deshalb für die Bestimmung dieser Constante nur selten in Betracht kommen werden, weil dieselben nicht auf relativ gleich grossem statistischen Materiale basirt sind und daher die Verlässlichkeit der Rechnung ungünstig beeinflussen. Massgebend für das numerische Ausmass der gesuchten Constante werden also hauptsächlich jene Resultatszahlen sein, welche in den einzelnen Altern am meisten vertreten sind, respective welche annähernd am meisten mit einander übereinstimmen.

Dementsprechend werden wir auch bei der Tafel der 17 englischen Gesellschaften hinsichtlich der Ermittlung der Constante *b* nach diesem Principe vorzugehen haben, u. zw. liefert der Durchschnitt der in Tabelle II ermittelten Resultatszahlen zwischen dem 10. und 83. Lebensjahre hier für die Constante *b* den Werth 1, d. h. $b = \mu . 0{\cdot}4342945$, welcher Umstand vom Gesichtspunkte der mathematischen Beschaffenheit dieses Werthes merkwürdig genug ist, um die Frage nach der Ursache dieser offenbaren Eigenthümlichkeit aufzuwerfen.

Untersuchen wir daher das Wesen dieser Constante genauer und gehen zu diesem Behufe auf die ursprüngliche Form zurück, auf welcher die Regel sich aufbaut. Jene, das Wesen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung charakterisirende Grundform, welche als das ursprüngliche Resultat unserer diesbezüglichen Untersuchungen sich ergab, lautete bekanntlich

$$\frac{L'_x}{L_x} = \frac{w'_x}{w_x} = \frac{1}{w_x}$$

Erst später wurde der unbeschränkten mathematischen Anwendung halber hier anstatt der Zahl 1 allgemein die Constante *b* eingeführt, da dies auch für die generelle Kennzeichnung des Wahrscheinlichkeits-Gesetzes sich als nothwendig erwies und überhaupt aus dem allgemeinen Calcul directe hervorgehen musste, weil hier oft auch gewisse constante Multiplicatoren bei den als Summanden auftretenden Wahrscheinlichkeiten mit in Berücksichtigung gelangen.

Sofern es sich jedoch um den speciellen Fall der Sterbenswahrscheinlichkeiten handelte, entfiel der allgemeine Begriff der Constante *b* vollständig und trat für dieselbe stets blos die Zahl 1 auf.*)

Es ist daher anzunehmen, dass die Zahl 1 hier als Constante allgemeine Geltung besitzt und dieser Werth für alle Sterbetafeln ein einheitlicher ist.

*) Siehe „Untersuchungen über das Wesen der Invalidität vom Standpunkte des Absterbegesetzes", IV. Lief. und „Allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung", V. Lief., Seite 25.

Reflexionen über die wirthschaftliche Bedeutung des Giro- und Check-Verkehres.

Das Bedürfniss eines Staates hinsichtlich seines Goldumlaufes richtet sich nach dem wirthschaftlichen Verkehre desselben. Je geringer der Verkehr in einem Lande ist, desto weniger Circulationsmittel sind nothwendig, um dessen Bedarf zu befriedigen. In Ländern, wo Naturalwirthschaft herrscht und jeder seine Nahrungsmittel selbst producirt, zugleich auch die sonstigen Bedürfnisse geringe sind, ist der Geldumlauf ein sehr mässiger. Umgekehrt ist aber in einem Staatswesen, wo ein grosser Verkehr und Austausch von Producten und Waaren stattfindet, der Geldbedarf relativ ein grosser. Daraus folgt der Grundsatz, dass mit der wirthschaftlichen Entwicklung eines Landes die Geldcirculation im gleichen Verhältnisse zunimmt.

Die Circulationsmittel in einem Lande summiren sich aus dem Bedarfe der einzelnen wirthschaftenden Subjecte und nach deren Zahl wächst auch der Bedarf an Umlaufsmitteln, weil jedes Subject eine gewisse Quantität derselben absorbirt. Diese Quantität ist jedoch zu verschiedenen Zeitperioden einer ebensolchen Variation unterworfen, wie der wirthschaftliche Verkehr selbst, welcher von den periodisch eintretenden Geschäftscampagnen und deren Conjuncturen abhängt. Es besteht in Folge dessen in dem Erforderniss an Umlaufsmitteln eines Landes eine stetige Veränderung, welche sich dort am meisten geltend macht, wo es an Einrichtungen des bankmässigen Verkehres mangelt. Die Ansammlung baarer Münze in den Händen Einzelner zum Zwecke von Zahlungen bewirkt die Brachlegung eines grossen Theiles der Umlaufsmittel, was eine Schädigung des Volksvermögens involvirt, da jene Capitalien, die nicht unbedingt der Circulation dienen, überflüssigerweise der productiven Anlage entzogen werden.

Der Giro- und Checkverkehr hat nun die Aufgabe, in dieser Beziehung ausgleichend einzuwirken und auf diese Weise seine Metallgeld ersparende Mission dahin geltend zu machen, dass nur derjenige Theil der Umlaufsmittel dem Verkehre zufliesst, welcher den Anforderungen unbedingt entspricht. In seinem Wesen bietet jedoch der Giro- und Checkverkehr nicht nur die Handhabe, ein grosses Circulationsgebiet mit verhältnissmässig geringen Umlaufsmitteln zu befriedigen, sondern birgt auch in seinen weiteren Consequenzen das Mittel, die Notenbanken in Bezug auf ihre geldwirthschaftlichen Maassnahmen actionsfähiger zu machen. Dies erklärt sich aus dem Umstande, dass mit der zunehmenden Beschränkung der Umlaufsmittel auf ihren wahren Zweck der ausschliesslichen Verwendung im engsten Sinne die Empfindlichkeit des Verkehres für münzpolitische Vorkehrungen der Notenbank gesteigert wird und demzufolge deren Wirkung als eine rasche und unmittelbare sich erweist, während umgekehrt dort, wo eine Verschwendung an Umlaufsmitteln infolge geringer Anwendung des Giro- und Checkverkehres sich kundgibt, die geldwirthschaftlichen Maassnahmen der Noteninstitute erst

nach längerer Zeit im Verkehre sich geltend machen, ja sogar manchmal, wenn dieselben nicht einschneidend genug sind, ganz wirkungslos bleiben, weil die in continuo bestehende Inflation der Umlaufsmittel eine Empfindungslosigkeit des wirthschaftlichen Verkehres erzeugt. Es ist daher von grosser Bedeutung für die Ordnung der Münzverhältnisse eines Landes, dass durch möglichste Förderung der Institution des Giro- und Checkverkehres für die rasche und kräftige Functionirung jener Ventile gesorgt werde, welche das Ab- und Zuströmen des Goldes in die Cassen der Notenbank reguliren.

Die hohe Wirksamkeit der münzpolitischen Maassnahmen der Bank von England ist mehr der knapp angepassten Baargeldcirculation des Landes, als anderen Vorzügen der wirthschaftlichen Verhältnisse desselben zuzuschreiben. Wie die Berührung einer straff gespannten Schnur äussert sich hier jede Regung der Bank im wirthschaftlichen Getriebe, indem sie in die verborgensten Centren desselben eindringt und sich daselbst fühlbar macht.

Mehr als alle anderen Einrichtungen des bankmässigen Credites trägt der rationell organisirte Giro- und Checkverkehr dazu bei, die Hindernisse zu beseitigen, welche sich im Verkehre durch die Veränderungen des Geldbedarfes dem glatten, unmittelbaren Ausgleiche der gegenseitigen Verpflichtungen entgegenstellen und in der höchsten Entwicklung dieser Institution, dem reinen buchmässigen Abrechnungsverkehr ist offenbar das Ideal eines geregelten Geldverkehres zu suchen. Diese Ansicht gelangt in der modernen Volkswirthschaft immer mehr zur Geltung und ein hervorragender deutscher Gelehrter äussert sich hierüber folgendermassen*): Alle bisher an Stelle des Baargeldes benützten Umlaufsmittel, wie Bankzettel, Staatscassen-Anweisungen, der ganze Wechsel-, Lombard-, Giro- und Checkverkehr, stellen nur Zwischenstufen dar zwischen dem reinen Baargeldverkehr und dem reinen buchmässigen Abrechnungsverkehr. Schon jetzt ist der Circulationswerth eines Geldstückes durch diese künstlichen Hilfsmittel ins Tausendfache vermehrt und dabei liegt der Checkverkehr auf dem europäischen Continent noch in den Windeln und der Abrechnungsverkehr durch Buchung und Compensation bei centralen Abrechnungsstellen beschränkt sich selbst innerhalb des Handelsstandes noch auf enge, den centralen Börsen nahestehende Kreise. Wie das Silbergeld das ausschliessliche Zahlungsmittel des Arbeiterstandes und das Zahlungsmittel aller Stände im Kleinverkehre bleiben wird, so werden das Gold und die Zettel das Zahlungsmittel des niederen Mittelstandes für seine grösseren Umsätze und das Zahlungsmittel aller Stände für den mittleren Verkehr des täglichen Lebens bleiben. Aber alle grösseren Zahlungen nicht nur der oberen Stände, sondern auch schon des höheren Mittelstandes werden künftighin weder baar, noch durch Noten, sondern durch Checks beglichen werden. Damit diese Buchwirthschaft wirklich bequem werde, dazu gehört allerdings noch, dass der gesammte Checkverkehr eines Landes in ähnlicher Weise durch ein einziges Institut, das überall Filialen hat, centralisirt werde,

*) Siehe „Deutsche Rundschau" Eduard von Hartmann über Geldkrisen.

wie dies mit dem Giroverkehre durch die deutsche Reichsbank und die österreichische Postsparcassen-Einrichtung bereits geschehen ist. Denn nur dann wird jeder gerne einen Check in Zahlung nehmen, wenn er auf dieselbe Abrechnungsstelle lautet, bei welcher er sein Conto hat, damit nicht zu einer einzigen Zahlung eine vielfache Buchung bei verschiedenen Instituten oder schliesslich doch eine Begleichung durch Baargelder oder Zettel erforderlich ist. Zu einer solchen Centralisation des nationalen Checkverkehres wird die unerbittliche Logik der Thatsachen ganz von selbst hinführen, sobald nur erst das Bedürfniss nach ihr durch Einbürgerung des Checkverkehres in weiteren Kreisen sich lebhaft fühlbar gemacht haben wird. Die ganze Entwicklung drängt ja sichtbar zu einer Aufsaugung des soliden Bankgeschäftes durch die Grossbanken und zur allmäligen Fusionirung der Grossbanken zu einer nationalen Centralbank hin, die selbstverständlich nicht mehr unabhängig von staatlicher Aufsicht oder Verwaltung zu denken ist. Sobald diese Centralisirung erreicht ist, verliert der Check seine Bedeutung als Zahlungsanweisung und geht in eine Anweisung zur Gutschrift über, das heisst der Checkverkekr löst sich dann ganz von selbst im Giroverkehr auf. Damit wäre die Buchwirthschaft für alle grösseren Zahlungen des höheren Mittelstandes und der höheren Stände, sowie für allen kaufmännischen, landwirthschaftlichen und industriellen Verkehr hergestellt, ohne die feste Grundlage der Goldwährung zu verlassen." . . . Wir glauben, dass die Zukunft dem Verfasser Recht geben wird, nur in einer Hinsicht weichen unsere Anschauungen von den seinigen ab. Der Check- und Giroverkehr soll nämlich nicht durch die Centralisirung bei einem einzigen Institute sozusagen monopolisirt werden. Je mehr Institute das Girowesen fördern, desto rascher wird es in alle Schichten der Bevölkerung dringen. Worauf es ankommt, ist, dass diese Institute dann in dem zu diesem Zwecke bestehenden Clearinghause ihre Abrechnungen, und zvar in der Weise pflegen, dass das Clearinghaus und jedes seiner Mitglieder ein Giro-Conto bei der Notenbank des Landes habe. Während das Conto des Clearinghauses sich jeden Tag ausgleichen muss, wird das Conto jedes anderen Mitgliedes mit dem Saldo, der sich aus der Abrechnung ergibt, belastet oder erkannt. Um die Richtigkeit unserer Ansicht zu beweisen, brauchen wir nur auf das Londoner, auf das New-Yorker und auf die anderen amerikanischen Clearinghäuser, sowie auf die Abrechnungsstellen der Deutschen Reichsbank hinzuweisen.

Die kaufmännische Zahlungsweise hat sich mit der Entwicklung des Handels mehrfach geändert. Während in den früheren Jahrhunderten den Hauptgrund für die Einrichtung des Giro die häufige Veränderung, die Verschlechterung, kurz die Unsicherheit des Metallgeldes bildete, ist heute diese Gefahr nicht mehr zu besorgen, dagegen liegt nunmehr der Hauptzweck des Giro anderswo, nämlich in der Ersparung der Geldcirculationsmittel. Aber auch die Form ist eine andere geworden, denn die Girobanken gehören längst der Vergangenheit an. Heute ist es der Clearingverkehr, mittelst dessen die Forderungen und Verpflichtungen compensirt und beglichen werden. Und um

diese Abrechnung nach Zeit und Ort zu concentriren, dazu dienen gleichsam als Träger und Zubringer die Checks, kurzsichtige Anweisungen, mittelst deren auf Grund einer bei einer bestimmten Bank hinterlegten Baarsumme Zahlungen geleistet, sowie auf dem Wege des Zuschlages zu derselben empfangen werden.

Der Clearingverkehr macht die Centralisation des Checkverkehres durch eine Centralbank überflüssig. Der Giroverkehr eines Platzes soll und muss sich in der Abrechnungsstelle dieses Platzes centralisiren, und in diesem Sinne plaidiren wir auch für eine Centralisirung des Giroverkehres; allein es wäre gewiss vom Uebel, wenn man den ganzen Giroverkehr in Eine Hand legen und damit die Existenz des Clearinghauses überflüssig machen wollte. Je breiter die Basis ist, auf die man den Giroverkehr stellt, desto wirksamer begegnet man den Anfechtungen der „ungemein grossen Künstlichkeit dieser Entwicklung", und desto entschiedener kann man der Ansicht entgegentreten, dass wir auf eine „solide Baargeldwirthschaft" angewiesen sind, wie dies Adolph Wagner in seiner letzten Broschüre „Die neueste Silberkrisis und unser Münzwesen" behauptet.

In unserer Zeit, wo ein fühlbarer Mangel des Geldes als Umlaufsmittel im Verkehre der Völker sich fühlbar macht, bietet sich als willkommenes Auskunftsmittel, um Gold zu sparen, die kräftige Entwicklung des Giro- und Checkwesens, eines Mittels zur Zahlung ohne Geld und ohne Gold. Es wäre verfehlt, die agitatorische Kraft, welche im Wesen der Privatbanken für die so nothwendige Verbreitung dieser Institution sich darbietet, ungenützt zu lassen, denn die Erfahrung lehrt, dass dort, wo der Giro- und Checkverkehr ein freier, von allen Fesseln des Zwanges unbeeinflusster ist, dessen Entwicklung am meisten fortschreitet. Während die Umsatzziffern des Londoner Clearinghauses für 1892 einen Umsatz von rund 6482 Millionen Pfund Sterling ausmachen und der Giroverkehr des New-Yorker Clearinghauses in den letzten Jahren in einer Weise sich entwickelt, dass derselbe die Ziffern der Londoner Umsätze trotz der Möglichkeit, mit Noten (Greenbacks) zu zahlen, heute nahezu erreicht und die Ausdehnung des Giroverkehres daselbst eine so enorme ist, dass nach einer vom Schatzamte in Washington bereits im Jahre 1881 veranlassten Feststellung des Verhältnisses zwischen Baargeld und Checks bei 48 New-Yorker Banken blos 1·3 Percent des gesammten Geldverkehres auf den Metall- und Papiergeldumlauf fallen, also 98·7 Percent desselben durch den Giro- und Checkverkehr bestritten werden *), hat der Giroverkehr am europäischen Continente sich bisher blos zu mässiger Bedeutung aufschwingen können, wenn auch insbesondere Frankreich nicht geringe Erfolge aufzuweisen hat. Von einer besonders bemerkenswerthen Entwicklung der Institution in Ländern, wo eine centrale Organisation derselben besteht, kann jedoch durchaus keine Rede sein.

*) Die von 3473 Banken der Vereinigten Staaten im Jahre 1892 gelieferten Ziffern weisen vom gesammten Geldverkehre 90·6 Percent in Checks und Anweisungen aus.

Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln.

IV.

In der Tabelle II wurde jener der Regel I entsprechende constante Werth durch die für die einzelnen Alter sich ergebenden Zahlen desselben ausgedrückt. Diese weisen bis zum 70. Lebensjahre nur mässige Abweichungen auf, indem sie bis auf zwei Decimalstellen miteinander übereinstimmen. Von da ab machen sich die Abweichungen in einer mit dem höheren Alter stets zunehmenden Intensität geltend, so dass hieraus auf eine bedeutende Anomalie der Sterbetafel in diesen Altersstadien geschlossen werden kann.

Während der Verlauf der Sterblichkeit anscheinend ein ziemlich regelmässiger ist, deutet die Beschaffenheit dieser Zahlen darauf hin, dass die Absterbeordnung daselbst dem mathematischen Gesetze insoferne nicht genügend Rechnung trägt, als diese Zahlen, welche im Principe miteinander ziffermässig übereinstimmen sollen, bis zum 66. Lebensjahre durchwegs grösser und von da ab bis zur höchsten Altersgrenze immer kleiner als der rechnungsgemäss bedingte Werth sich erweisen.

Die Ursache hievon mag in dem Umstande liegen, dass der Verlauf der natürlichen Sterblichkeit hier nicht in genügender Weise zur Geltung gelangt, u. zw. dürfte dieselbe bis zum 66. Lebensjahre zu niedrig und von da ab bis zur höchsten Altersgrenze zu hoch bemessen sein oder umgekehrt.

In dem Processe der Beseitigung der Anomalien dieser Zahlen und deren Anpassung an einen gemeinsamen constanten Werth für alle Altersclassen besteht nun aber die Ausgleichung der Sterbetafel im Sinne des mathematisch bedingten Absterbegesetzes. In diesen Zahlen sind daher auch jene Merkmale gegeben, welche die Beurtheilung einer auf statistischer Grundlage construirten Sterbetafel vom Gesichtspunkte ihrer mathematischen Gesetzmässigkeit in der wirksamsten Weise gestatten und lässt sich in Folge dessen auf dieser Grundlage die Untersuchung einer beliebigen Sterbetafel durchführen. Indem die betreffenden Zahlen für alle Altersclassen in der hier demonstrirten Weise dargestellt werden, bietet sich hiedurch die Handhabe, die Ungleichheiten derselben ziffermässig wahrzunehmen und in deren relativer Beschaffenheit die Wirkung der Abweichungen von der mathematischen Gesetzmässigkeit der betreffenden Absterbeordnung zu erkennen. Die in der vorigen Abhandlung dargestellten Regeln I und II bieten demgemäss das erforderliche Mittel zur Untersuchung der Sterbetafeln auf ihre mathematische Gesetzmässigkeit.

Nachfolgende Tabelle stellt die der Sterbetafel der 17 englischen Gesellschaften entsprechenden abgeleiteten Zahlenwerthe nach Regel II dar.

Tabelle III.

Alter Jahre	$\frac{\Delta lg\, w_x}{\Delta lg\, L_x}$	$\frac{\Delta lg\, w_x}{\Delta lg\, L_x} + 1$	$\frac{w'_x}{b} + 1$ $b = 1$	Constanter Werth $\left(\frac{\Delta lg\, w_x}{\Delta lg\, L_x} + 1\right)\left(\frac{w'_x}{b} + 1\right) = 1$
10	2·10408	3·10408	0·32178	0·999061
11	2·13452	3·13452	0·31918	1·000476
12	2·16564	3·16564	0·31670	1·002560
13	2·19400	3·19400	0·31435	1·004034
14	2·21935	3·21935	0·31215	1·004922
15	2·24521	3·24521	0·31010	1·006340
16	2·26783	3·26783	0·30818	1·006851
17	2·29138	3·29138	0·30627	1·008051
18	2·31162	3·31162	0·30455	1·008554
19	2·33362	3·33362	0·30251	1·008453
20	2·35135	3·35135	0·30096	1·008622
21	2·37001	3·37001	0·29934	1·008779
22	2·38988	3·38988	0·29764	1·008964
23	2·40566	3·40566	0·29632	1·009165
24	2·42285	3·42285	0·29488	1·009330
25	2·44084	3·44084	0·29340	1·009542
26	2·45535	3·45535	0·29222	1·009722
27	2·47130	3·47130	0·29096	1·010010
28	2·48277	3·48277	0·29004	1·010142
29	2·49644	3·49644	0·28897	1·010366
30	2·50633	3·50633	0·28824	1·010664
31	2·51783	3·51783	0·28735	1·010850
32	2·52597	3·52597	0·28676	1·011107
33	2·53569	3·53569	0·28605	1·011384
34	2·54720	3·54720	0·28520	1·011661
35	2·54779	3·54779	0·28681	1·014673
36	2·55167	3·55167	0·28784	1·022310
37	2·56657	3·56657	0·28617	1·020645
38	2·58036	3·58036	0·28435	1·018075
39	2·59616	3·59616	0·28249	1·015879
40	2·61447	3·61447	0·28044	1·013642
41	2·62735	3·62735	0·27956	1·014062
42	2·63427	3·63427	0·27912	1·014398
43	2·62207	3·62207	0·28021	1·014940
44	2·58861	3·58861	0·28282	1·014930
45	2·54319	3·54319	0·28665	1·015655
46	2·47627	3·47627	0·29228	1·016044
47	2·40852	3·40852	0·29821	1·016455
48	2·33716	3·33716	0·30470	1·016833
49	2·26607	3·26607	0·31146	1·017250
50	2·19274	3 19274	0·31874	1·017654
51	2·11691	3·11691	0·32680	1·018630
52	2·04209	3·04209	0·33466	1·018065
53	1·96444	2·96444	0·34374	1·018996
54	1·89161	2·89161	0·35256	1·019466

Alter Jahre	$\frac{\Delta lg\, w_x}{\Delta lg\, L_x}$	$\frac{\Delta lg\, w_x}{\Delta lg\, L_x} + 1$	$\frac{w'_x}{b} + 1$ $b = 1$	Constanter Werth $\left(\frac{\Delta lg\, w_x}{\Delta lg\, L_x} + 1\right)\left(\frac{w'_x}{b} + 1\right) = 1$
55	1·81885	2·81885	0·36122	1·018225
56	1·74246	2·74246	0·37209	1·020442
57	1·67394	2·67394	0·38183	1·020990
58	1·60654	2·60654	0·39149	1·020434
59	1·53453	2·53453	0·40367	1·023114
60	1·46382	2·46382	0·41505	1·022608
61	1·39327	2·39327	0·42751	1·023147
62	1·32257	2·32257	0·44075	1·023672
63	1·25490	2·25490	0·45423	1·024243
64	1·18796	2·18796	0·46838	1·024796
65	1·12318	2·12318	0·48292	1·025310
66	1·06123	2·06123	0·49771	1·025895
67	0·99961	1·99961	0·51360	1·027000
68	0·94610	1·94610	0·52756	1·026684
69	0·89240	1·89240	0·54302	1·027610
70	0·84226	1·84226	0·55813	1·028221
71	0·79528	1·79528	0·57308	1·028839
72	0·74857	1·74857	0·58922	1·030292
73	0·70893	1·70893	0·60474	1·033458
74	0·66683	1·66683	0·61725	1·028850
75	0·63237	1·63237	0·63207	1·031772
76	0·59899	1·59899	0·64563	1·032356
77	0·56647	1·56647	0·65965	1·033322
78	0·53569	1·53569	0·67332	1·034010
79	0·50807	1·50807	0·68628	1·034958
80	0·48318	1·48318	0·69853	1·036045
81	0·46180	1·46180	0·70971	1·037454
82	0·44652	1·44652	0·71822	1·038920
83	0·43318	1·43318	0·72642	1·041090
84	0·42481	1·42481	0·73252	1·043702
85	0·41761	1·41761	0·73841	1·046777
86	0·41176	1·41176	0·74405	1·050420
87	0·40743	1·40743	0·74943	1·054770
88	0·40161	1·40161	0·75619	1·059883
89	0·39441	1·39441	0·76410	1·065470
90	0·38807	1·38807	0·77267	1·072273
91	0·37936	1·37936	0·78333	1·080500
92	0·37047	1·37047	0·79510	1·089660
93	0·34317	1·34317	0·81741	1·097920
94	0·32506	1·32506	0·83539	1·106942
95	0·27261	1·27261	0·86849	1·105249
96	0·22962	1·22962	0·89613	1·101900
97	0·36107	1·36107	0·86738	1·180565
98	0·66401	1·66401	0·85000	1·414408

Aus dieser Tabelle, welche für die einzelnen Altersclassen die Resultatszahlen für den constanten Werth 1 nach Regel II liefert, ist gleichfalls zu entnehmen, dass die Absterbeordnung, welche die hier zu Grunde gelegte Sterbetafel kennzeichnet, der mathematischen Gesetzmässigkeit entbehrt, doch gibt sich dieser Umstand in anderer Form kund, als bei den Resultatszahlen der vorigen Tabelle. Hier äussern sich die Abweichungen, abgesehen von einzelnen Unregelmässigkeiten, durchwegs in einer mit der Höhe des Alters zunehmenden Weise, so dass der Fehler bei der äussersten Altersgrenze am meisten zur Geltung kommt. Dies ist offenbar auf die vorhandene totale Verschiebung des gesetzmässigen Verlaufes dieser Sterbetafel zurückzuführen, deren Wirkung in dieser Form zum Ausdrucke gelangt.

Die hier dargestellte Methode der Untersuchung der Sterbetafeln auf ihre mathematische Gesetzmässigkeit leistet daher in jeder Beziehung den Anforderungen Genüge, u. zw. indem sie nicht nur einzelne Unregelmässigkeiten in der Absterbeordnung offenbart, sondern auch über die Gesetzmässigkeit des Gesammtverlaufes der Sterblichkeiten vollends Aufschluss gibt.

Aus den Resultatszahlen, welche den Regeln I und II entsprechen, entspringt jedoch noch ein anderer wichtiger Anhaltspunkt, welcher besonders für die Charakterisirung der Constante b von wesentlicher Bedeutung ist. Während nämlich die nach Regel I sich hier ergebenden Resultatszahlen derart beschaffen sind, dass unter etwaiger Berücksichtigung ihres Fehlers, denselben nur dann Genüge geleistet werden könnte, wenn die Constante b grösser als 1 angenommen würde, gestaltet sich dies bei den Resultatszahlen, welche der Regel II entsprechen, in umgekehrter Weise, indem hier unter Berücksichtigung der vorhandenen Fehler die Constante b kleiner als 1 angenommen werden müsste, um der rechnungsmässigen Anforderung zu entsprechen.

Dieser merkwürdige Umstand deutet unbedingt darauf hin, dass der Werth der Constante b thatsächlich zwischen diesen beiden Grenzen liegen muss, also in der Nähe der Zahl 1 sich bewegt, oder mit derselben übereinstimmt. Es ist dies ein zwingendes Argument mehr für unsere in der vorigen Abhandlung über dieses Thema begründete Annahme, dass die Constante b hier stets nur durch die Zahl 1 ausgedrückt werden kann.

Im Allgemeinen wird also die Absterbeordnung, indem sie der mathematischen Gesetzmässigkeit subordinirt wird, in ihrem Verlaufe stets jene hiedurch bedingte Regelmässigkeit aufweisen müssen und wird deren Unterschiedlichkeit hauptsächlich in der veränderlichen höchsten Altersgrenze bestehen. Der von derselben abhängige, mehr oder weniger rapide Verlauf der Sterblichkeiten bildet sodann jenes Merkmal, welches als qualificirendes Moment die Verschiedenheit der Absterbeordnungen kennzeichnet.

Auf diese Weise ist das Wesen des mathematischen Absterbegesetzes hinreichend charakterisirt und wir können nunmehr zum eigentlichen Processe der Ausgleichung der Sterbetafeln übergehen.

Mathematische Darstellung der Kapitals-Aufzinsungsform unter Voraussetzung eines veränderlichen Zinsfusses.

I.

Durch den continuirlichen Aufschwung der wirthschaftlichen Institutionen werden stets neue Fragen von politisch-ökonomischer Wichtigkeit in den Vordergrund gedrängt, welche immer höhere Anforderungen an die wissenschaftliche Forschung stellend, zu einer gesteigerten Bethätigung derselben beitragen. Eine solche Frage bildet nun auch diejenige der mathematischen Darstellung einer geeigneten Kapitals-Aufzinsungsform unter Voraussetzung eines veränderlichen Zinsfusses, welche infolge der sich immer mehr herausbildenden wirthschaftlichen Tendenz einer stetig sinkenden Kapitalsrentabilität dringend ihre Lösung erheischt. Die im Allgemeinen auf unveränderlicher Zinsfuss-Grundlage beruhende Kapitals-Aufzinsung vermag wohl den Anforderungen der gewöhnlichen Zinseszins- und Rentenrechnung, welcher die Voraussetzung eines für die Dauer fixen Zinsfusses entspricht, Genüge zu leisten, sobald jedoch diese Voraussetzung zu bestehen aufhört und die mit der actuellen Tendenz der sinkenden Kapitalsrentabilität verbundene Veränderlichkeit der Zinsfuss-Grundlage während der Anlagedauer zur Geltung gelangt, tritt ein neuer Factor in Action, dessen Berücksichtigung in den bestehenden Formen der Zinses- und Rentenrechnung nicht vorgesehen ist.

In allen jenen Fällen, wo die jeweilige actuelle Rentabilität des Kapitals als Grundlage der finanziellen Bedingungen in Frage kommt, muss sich das Bedürfniss geltend machen, das Calcul auf jene rechnungsmässigen Grundlagen zu stellen, denen dasselbe in Wirklichkeit entspricht. Insbesondere bei allen wirthschaftlichen Institutionen, deren Leistung in der Rentabilität jener aus der Gegenleistung dauernd angesammelten Kapitalien ihren Ausdruck findet, trifft dies zu, zuvörderst dort, wo diese Ansammlung in continuirlicher Weise sich stets erneuert und solchermassen die sinkende Rentabilität des Kapitales im jeweiligen Erstehungspreise der Anlagewerthe zum Ausdrucke kommt. Hier muss das Bestreben, die rechnungsmässigen Grundlagen des finanziellen Calculs der abfallenden Bewegung der Kapitalsrentabilität anzupassen, sich umsomehr geltend machen, als die spontane Veränderung des bezüglichen Zinsfusses ihre Wirkung blos auf die zukünftige finanzielle Gebahrung übt, hingegen die bis dahin eingegangenen Verbindlichkeiten unberücksichtigt lässt. Dies ist hauptsächlich bei den verschiedenen Arten der Versicherung auf lange Fristen der Fall, wo eine fixe Verzinsungs-Verbindlichkeit einer fluctuirenden Rentabilität des Kapitales gegenübersteht.

Es handelt sich also um die Schaffung einer Kapitals-Aufzinsungsform, bei welcher die etwaige Veränderung des Zinsfusses während der Anlagedauer

mit in Rechnung gelangt. Die Aufstellung einer solchen Form ist jedoch blos unter der Voraussetzung möglich, dass eine gewisse Regelmässigkeit platzgreift, welcher diese Veränderung sowohl mit Rücksicht auf ihre Beschaffenheit als auch hinsichtlich ihres periodischen Eintreffens unterworfen sein muss. Dieser Anforderung kann nun derart Rechnung getragen werden, dass eine jährlich gleichmässige Veränderung des Zinsfusses, u. zw. consequent nach einer Richtung hin angenommen wird, in welcher der Effect der voraussichtlichen Gesammtveränderung während einer längeren Anlageperiode zum Ausdrucke gelangt.

Wird nun in diesem Sinne die Veränderung des allgemeinen Zinsfusses $P = 100\ p$ durch die Relation $P + \Phi = 100\ (p + \varphi)$ ausgedrückt, so ergibt sich folgende Ableitung:

$$K_1 = K.\ (1 + p)$$
$$K_2 = K\ (1 + p)\ (1 + p + \varphi) = (1 + p)^2 + \varphi\ (1 + p)$$
$$K_3 = K\ (1 + p)\ (1 + p + \varphi)\ (1 + p + 2\varphi) = (1 + p)^3 + 3\ \varphi\ (1 + p)^2 + 2\ \varphi^2\ (1 + p)$$
$$K_4 = K\ (1 + p)\ (1 + p + \varphi)\ (1 + p + 2\ \varphi)\ (1 + p + 3\ \varphi) = (1 + p)^4 + 6\ \varphi\ (1 + p)^3 + 11\ \varphi^2\ (1 + p)^2 + 6\ \varphi^3\ (1 + p)$$
$$K_5 = K\ (1 + p)\ (1 + p + \varphi)\ (1 + p + 2\ \varphi)\ (1 + p + 3\ \varphi)\ (1 + p + 4\ \varphi) = (1 + p)^5 + 10\ \varphi\ (1 + p)^4 + 35\ \varphi^2\ (1 + p)^3 + 50\ \varphi^3\ (1 + p)^2 + 24\ \varphi^4\ (1 + p)$$

$$\vdots$$

$$K_n = K\ (1 + p)\ (1 + p + \varphi)\ (1 + p + 2\ \varphi) \ldots (1 + p + n\ \varphi) = (1 + p)^n + A.\ \varphi\ (1 + p)^{n-1} + B.\ \varphi^2\ (1 + p)^{n-2} + C.\ \varphi^3\ (1 + p)^{n-3} \ldots$$

Da nun die Grösse Φ als jährliche Veränderung des Zinsfusses sehr klein sich gestaltet, so wird φ als der hundertste Theil derselben in den höheren Potenzen um so eher vernachlässigt werden können und wir werden deshalb blos die erste und zweite Potenz desselben in der Rechnung berücksichtigen.

Demnach gelangen wir zu folgendem Resultate:

$$K_n = K\ [(1 + p)^n + A.\ \varphi.\ (1 + p)^{n-1} + B.\ \varphi^2\ (1 + p)^{n-2}]$$

worin die Coëfficienten A und B den Werthen

$$A = \frac{n\ (n-1)}{2}$$

und
$$B = \frac{1}{2}\left[(n-1)^2\ (n-2) + (n-2)^2\ (n-3) + \ldots + (n-k)^2\ (n-k-1)\right] = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(n-k)^2\ (n-k-1)}{2}$$

entsprechen, so dass die gesuchte Form in folgender Weise sich präsentirt:

$$K_n = K\left[(1+p)^n + \frac{n\,(n-1)}{2} \cdot \varrho \cdot (1+p)^{n-1} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{k=n}^{k=1} \frac{(n-k)^2\,(n-k-1)}{2}\right) \varrho^2 \cdot (1+p)^{n-2}\right]$$

Ist nun ϱ negativ, d. h. vollzieht sich die Veränderung des Zinsfusses in abnehmendem Sinne, so wird diese Form eine Aenderung nur insoferne erleiden, als bei den mittleren der innerhalb der Klammer vorkommenden Summanden das positive Zeichen in ein negatives übergeht Es bezeichnet daher dieses Zeichen die eigentliche Veränderung des Zinsfusses im zunehmenden oder abnehmenden Sinne, u. zw. je nachdem dasselbe positiv oder negativ sich gestaltet.

Es sei z. B. ein Kapital von 10.000 Gulden auf 10 Jahre derart verzinslich angelegt, dass der Zinsfuss im ersten Jahre 4 Percent, im zweiten 3·95 Percent, im dritten Jahre 3·90 Percent u. s. w. und schliesslich im zehnten Jahre 3·55 Percent beträgt, also in jedem nächsten Jahre um 0·05 Percent abnimmt, auf welchen Betrag wächst das Kapital durch Zinsen und Zinseszinsen an?

In diesem Falle ist nun

$$K = 10.000,\ n = 10,\ P = 100.p = 4,\ \Phi = 100.\varrho = -0·05 \text{ und } K_n = ?$$

Es ergibt sich daher folgende Form:

$$K_n = 10.000\ [(1·04)^{10} - 45\ (1·04)^9\ 0·0005 + 880\,.\,(1·04)^8\ 0·00000025]$$

und schliesslich

$$K_n = 10.000\ (1·480243 - 0·032025 + 0·000300) = 14485·18$$

Ein zweites Beispiel: Ein Kapital, welches während 20 Jahren derart verzinslich angelegt war, dass der Zinsfuss im ersten Jahre 5 Percent, im zweiten Jahre 5·04 Percent, im dritten Jahre 5·08 Percent u. s. w. und schliesslich im zwanzigsten Jahre 5·76 Percent betrug, also in jedem nächsten Jahre eine Zunahme von 0·04 Percent aufwies, beträgt gegenwärtig 5400 Gulden; welcher Betrag wurde ursprünglich angelegt?

Hier bedeutet

$$K_n = 5400,\ n = 20,\ P = 100\,p = 5,\ \Phi = 100\,\varrho = +0·04 \text{ und } K = ?$$

demnach ergibt sich die Form

$$5400 = K\ [(1·05)^{20} + 190\ (1·05)^{19}\,.\,0·0004 + 16{,}825\ (1·05)^{18}\,.\,0·00000016]$$

respective

$$5400 = K\ [2·653300 + 0·192048 + 0·006479] = K.\ 2·851827$$

und daher

$$K = 1893{\cdot}52$$

Mit diesem Beispiele correspondirt in Bezug auf eine Zinsfuss-Veränderung im umgekehrten Sinne folgendes: Ein Kapital, welches während 20 Jahren derart verzinslich angelegt war, dass der Zinsfuss im ersten Jahre 5·76 Percent, im zweiten Jahre 5·72 Percent, im dritten Jahre 5·68 Percent u. s. w. und schliesslich im zwanzigsten Jahre 5 Procent betrug, also in jedem nächsten Jahre sich um 0·04 Percent verminderte, beträgt gegenwärtig 5400 Gulden; welcher Betrag wurde ursprünglich angelegt?

Diesem Beispiele entsprechen nun die Werthe:

$K_n = 5400$, $n = 20$, $P = 100\,p = 5{\cdot}76$, $\Phi = 100\,\varphi = -0{\cdot}04$ und $K = ?$

demnach ergibt sich die Form

$$5400 = K\,[(1{\cdot}0576)^{20} - 190\,.\,(1.0576)^{19}\,.\,0{\cdot}0004 + 16{,}825\,(1{\cdot}0576)^{18}\,.\,0{\cdot}00000016]$$

respective

$$5400 = K\,[3{\cdot}064983 - 0{\cdot}220232 + 0{\cdot}007345] = K\,.\,2{\cdot}852096$$

und

$$K = 1893{\cdot}34$$

Aus den Resultaten dieser beiden Beispiele ist nun zu entnehmen, dass die Umkehrung der Reihenfolge der Zinsfüsse eine besondere Aenderung des Ergebnisses nicht zu bewirken vermag, woraus der Schluss zulässig ist, dass die Anwendung eines fixen Durchschnittszinsfusses gleichfalls zu annähernd verlässlichen Resultaten führen dürfte.

So liefert in diesem speciellen Falle der fixe Durchschnittszinsfuss von 5·38 Percent für K den Werth

$$K = 1893{\cdot}34$$

und kann daher, wenn nicht auf besondere Genauigkeit Werth gelegt wird, für blos näherungsweise Berechnung auch zu diesem einfachen Hilfsmittel gegriffen werden. Die merkwürdige Erscheinung des so nahen Uebereinstimmens der Resultate bei steigender und fallender Zinsfussveränderung von gleichem Ausmaasse dürfte offenbar in dem Umstande zu suchen sein, dass bei anfangs grösserem und successive abfallendem Zinsfusse die Zinsen, hingegen bei anfangs kleinerem und successive aufsteigendem Zinsfusse die Zinseszinsen insoferne ausschlaggebend für das Resultat sich erweisen, indem deren beziehungsweiser Einfluss auf dasselbe eine nahezu gleiche Wirkung ausübt. Von diesem Gesichtspunkte aus lässt sich auch die annähernde Uebereinstimmung mit jenem aus dem Durchschnittszinsfusse entspringenden Resultate erklären.

Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln.

V.

Die bisherigen Ausführungen über dieses Thema betrafen **die Feststellung und Untersuchung** derjenigen Merkmale, welche in ihrem Wesen **die etwaigen Abweichungen** von der mathematischen Gesetzmässigkeit **des Verlaufes einer Sterbetafel** zu kennzeichnen geeignet sind. Diese Merkmale, **deren Charakteristicon** in zweien bestimmten, auf deductivem Wege **abgeleiteten mathematischen Regeln** besteht, umfassen ganz allgemein das Wesen **des Absterbegesetzes in Bezug auf dessen** functionelle Beschaffenheit, **indem sie jede, selbst die geringste** Unregelmässigkeit, im gesetzmässigen Verlaufe **der Sterblichkeiten erkennen** lassen und solchermassen eine geeignete Handhabe **bieten, um eine mathematisch** vollkommen verlässliche Methode für die genaue **Ausgleichung** der Sterbetafeln zu ermöglichen.

Combiniren wir nämlich die den Regeln I und II entsprechenden **Formen:**

$$\text{I.} \qquad (\triangle\, lg\, L_x + \triangle\, lg\, w_x)\; w_x = -\frac{b}{\mu}$$

$$\text{II.} \qquad \left(\frac{\triangle\, lg\, w_x}{\triangle\, lg\, L_x} + 1\right)\left(w'_x + 1\right) = c$$

indem wir die beziehungsweisen laut Tabelle II und III sich für die **einzelnen Alter ergebenden** Resultatswerthe in ihren Abweichungen **berücksichtigen, u. zw. derart,** dass wir dieselben allgemein durch $\frac{b}{\mu}$ respective c **ausdrücken, so ergibt sich** hieraus die Relation

$$-\frac{1}{\mu} \cdot \frac{w'_x + 1}{w_x} = \frac{c}{b} \cdot \triangle\, lg\, L_x$$

Wenn wir nun diese mit der ursprünglichen Grundform, von welcher **wir hinsichtlich dieser** Materie ausgegangen sind, vergleichen, so finden wir **den unmittelbaren** Zusammenhang, welcher bezüglich der Anomalien **der Ursprungszahlen** und deren Ausgleichung besteht.

Diese Grundform lautet nämlich:

$$-\frac{1}{w_x} - \frac{w'_x}{w_x} = \frac{L'_x}{L_x} \quad \text{d. h. also} \quad -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{w'_x + 1}{w_x} = \triangle\, lg\, L_x$$

woraus zu entnehmen ist, dass die Anomalie der Ursprungszahlen in der **Abweichung** des Werthes der Function von w_x von demjenigen der **entsprechenden Function** von L_x besteht, da nach der Grundform die Werthe **der entsprechenden** beiden Functionen vollständig übereinstimmen müssen. **Es ergibt sich daher** die Nothwendigkeit, jene Werthe, in welchen der gesammte **Effect der** jeweiligen Abweichung zur Geltung gelangt, für die einzelnen **Alter ziffermässig** festzustellen, weshalb wir in der folgenden Tabelle dieselben **berechnen.**

Tabelle IV.

Alter Jahre	$\frac{b}{\mu}$	b	c	$\frac{c}{b}$	$-\frac{1}{\mu}\,\frac{w'_x+1}{w_x}=\frac{c}{b}\cdot\triangle lg\,L_x$
10	0·4376539	1·007735	0·999061	0·991391	— 0·0029204
11	0·4373550	1·007047	1·000476	0·993475	— 0·0029378
12	0·4370016	1·006233	1·002560	0·996350	— 0·0029577
13	0·4367801	1·005723	1·004034	0·998320	— 0·0029795
14	0·4366665	1·005461	1·004922	0·999464	— 0·0030036
15	0·4364656	1·005000	1·006340	1·001334	— 0·0030300
16	0·4363900	1·004825	1·006851	1·002014	— 0·0030581
17	0·4362986	1·004615	1·008051	1·003420	— 0·0030886
18	0·4362744	1·004559	1·008554	1·003977	— 0·0031216
19	0·4363820	1·004807	1·008453	1·003629	— 0·0031524
20	0·4364176	1·004888	1·008622	1·003715	— 0·0031898
21	0·4364889	1·005052	1·008779	1·003776	— 0·0032275
22	0·4365506	1·005194	1·008964	1·003750	— 0·0032660
23	0·4365982	1·005346	1·009165	1·003840	— 0·0033049
24	0·4366737	1·005478	1·009330	1·003830	— 0·0033549
25	0·4367265	1·005600	1·009542	1·003920	— 0·0034009
26	0·4367872	1·005740	1·009722	1·003960	— 0·0034523
27	0·4369004	1·006000	1·010010	1·003983	— 0·0035049
28	0·4368745	1·005940	1·010142	1·004176	— 0·0035639
29	0·4369973	1·006223	1·010366	1·004117	— 0·0036236
30	0·4370388	1·006320	1·010664	1·004318	— 0·0036902
31	0·4371352	1·006540	1·010850	1·004280	— 0·0037576
32	0·4372022	1·006695	1·011107	1,004382	— 0·0038321
33	0·4372696	1·006850	1·011384	1·004503	— 0·0039084
34	0·4373597	1·007058	1·011661	1·004571	— 0·0039863
35	0·4364476	1·004958	1·014673	1·009668	— 0·0040917
36	0·4366461	1·005415	1·022310	1·016804	— 0·0042085
37	0·4362037	1·004396	1·020645	1·016180	— 0·0042958
38	0·4370167	1·006268	1·018075	1·011733	— 0·0043744
39	0·4373673	1·007075	1·015879	1·008742	— 0·0044610
40	0·4379318	1·008375	1·013642	1·005223	— 0·0045472
41	0·4380576	1·008665	1·014062	1·005351	— 0·0046581
42	0·4381830	1·008954	1·014398	1·005396	— 0·0047830
43	0·4382578	1·009126	1·014940	1·005761	— 0·0049422
44	0·4383377	1·009310	1·014930	1·005568	— 0·0051385
45	0·4383972	1·009446	1·015655	1·006150	— 0·0053691
46	0·4384227	1·009506	1·016044	1·006479	— 0·0056483
47	0·4384348	1·009533	1·016455	1·006856	— 0·0059503
48	0·4384422	1·009550	1·016833	1·007214	— 0·0062824
49	0·4384411	1·009548	1·017250	1·007630	— 0·0066410
50	0·4384308	1·009524	1·017654	1·008053	— 0·0070340
51	0·4382908	1·009202	1·018630	1·009342	— 0·0074706
52	0·4384612	1·009594	1·018065	1·008390	— 0·0079312
53	0·4382892	1·009198	1·018996	1·009793	— 0·0084533
54	0·4382236	1·009047	1·019466	1·010326	— 0·0090048

Alter Jahre	$\frac{b}{\mu}$	b	c	$\frac{c}{b}$	$-\frac{1}{\mu} \cdot \frac{w'_x + 1}{w_x} = \frac{c}{b} \cdot \Delta \lg L_x$
55	0·4385626	1·009827	1·018225	1·008316	— 0·0095912
56	0·4380048	1·008543	1·020442	1·011774	— 0·0102812
57	0·4378863	1·008270	1·020990	1·012616	— 0·0109895
58	0·4380437	1·008633	1·020434	1·011700	— 0·0117489
59	0·4372261	1·006750	1·023114	1·016254	— 0·0126462
60	0·4373031	1·006928	1·022608	1·015572	— 0·0135871
61	0·4370183	1·006271	1·023147	1·016770	— 0·0146406
62	0·4366813	1·005496	1·023672	1·018077	— 0·0158076
63	0·4362996	1·004617	1·024243	1·019536	— 0·0170799
64	0·4358422	1·003563	1·024786	1·021157	— 0·0184854
65	0·4353425	1·002413	1·025310	1·022842	— 0·0200265
66	0·4347605	1·001073	1·025895	1·024796	— 0·0217123
67	0·4338269	0·998923	1·027000	1·028107	— 0·0235959
68	0·4336709	0·998541	1·026684	1·028184	— 0·0255584
69	0·4326018	0·996103	1·027610	1·031631	— 0·0277637
70	0·4317225	0·994078	1·028221	1·034346	— 0·0301587
71	0·4307682	0·991881	1·028839	1·037261	— 0·0327680
72	0·4291370	0·988125	1·030292	1·042674	— 0·0356973
73	0·4263920	0·981804	1·033458	1·052612	— 0·0388647
74	0·4285300	0·986727	1·028850	1·042690	— 0·0421330
75	0·4257519	0·980330	1·031772	1·052474	— 0·0459093
76	0·4243782	0·977167	1·032356	1·056476	— 0·0499654
77	0·4227080	0·973321	1·033322	1·061646	— 0·0544916
78	0·4208614	0·969069	1·034010	1·067013	— 0·0594718
79	0·4188961	0·964544	1·034958	1·073003	— 0·0649307
80	0·4167670	0·959642	1·036045	1·079617	— 0·0709382
81	0·4143940	0·954171	1·037454	1·087276	— 0·0775393
82	0·4124160	0·949623	1·038920	1·094034	— 0·0846510
83	0·4098022	0·943605	1·041090	1·103312	— 0·0927075
84	0·4072683	0·937770	1·043702	1·112962	— 0·1016608
85	0·4044289	0·931232	1·046777	1·124078	— 0·1120535
86	0·4012027	0·923803	1·050420	1·137060	— 0·1242678
87	0·3974791	0·915230	1·054770	1·152465	— 0·1388317
88	0·3928830	0·904647	1·059883	1·171600	— 0·1568474
89	0·3874684	0·892179	1·065470	1·194234	— 0·1793755
90	0·3806141	0·876396	1·072273	1·223502	— 0·2078485
91	0·3720310	0·856633	1·080500	1·261333	— 0·2453167
92	0·3618900	0·833283	1·089660	1·307672	— 0·2951090
93	0·3440500	0·792205	1·097920	1·418186	— 0·3763610
94	0·3271190	0·753221	1·106942	1·466238	— 0·4624923
95	0·2997937	0·690300	1·105249	1·601113	— 0·6103256
96	0·2711110	0·624256	1·101900	1·765141	— 0·8018300
97	0·2665756	0·613813	1·180565	1·918910	— 0·9553406
98	0·2500000	0·575646	1·414408	2·457078	
99					

Dem Werthe von w_x respective dessen Differentialquotienten w'_x entspricht also ein anderer Werth von L_x, als derjenige, welcher der zugrundegelegten, auszugleichenden Sterbetafel gemäss sich ergibt, so dass die betreffende Relation mit Rücksicht auf diesen Umstand auch in folgendem Sinne aufgefasst werden kann

$$-\frac{1}{\mu} \cdot \frac{w'_x + 1}{w_x} = \frac{c}{b} \Delta \, lg L_x = \Delta \, lg (L_x)$$

wobei (L_x) die Zahlen der Lebenden einer anderen Sterbetafel darstellt, welcher die Anomalien der ersteren Sterbetafel im reciproken Sinne anhaften. Auf diese Weise werden die aus der neuen Sterbetafel entspringenden Werthe der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer den veränderten Zahlen der Lebenden gemäss gleichfalls eine Veränderung erleiden, welche sich im entgegengesetzten Sinne der ursprünglichen Sterbetafel geltend machen wird. Bezeichnen wir die mit (L_x) correspondirenden Werthe mit (w_x) und (w'_x), so ergibt sich demzufolge die folgende Relation

$$-\frac{1}{\mu} \cdot \frac{(w'_x) + 1}{(w_x)} = \frac{c_1}{b_1} \Delta \, lg (L_x)$$

welche diesen Process in seiner diesbezüglichen Consequenz kennzeichnet.

Aus diesen beiden Relationen entspringt nun schliesslich diejenige von der Form

$$\frac{1 + (w'_x)}{(w_x)} = \frac{c_1}{b_1} \cdot \frac{1 + w'_x}{w_x}$$

aus welcher der Coëfficient verschwindet, sobald anstatt der Werthe von w_x und (w_x) das arithmetische Mittel der Beiden gleichzeitig substituirt wird, so dass eine identische Gleichung resultirt. Diesem arithmetischen Mittel der beiden Lebensdauerwahrscheinlichkeiten wird nun auch das arithmetische Mittel der beiden Zahlen der Lebenden L_x und (L_x) im selben Masse entsprechen, als die Coëfficienten $\frac{c}{b}$ und $\frac{c_1}{b_1}$ miteinander übereinstimmen.

Ist dies blos in unzureichendem Masse der Fall, so erfahren die sich ergebenden arithmetischen Mittelwerthe (L_x) und (w_x) eine weitere Correctur dadurch, dass auf Grund der gegebenen Zahlen gegenseitig nochmals eine weitere Ausgleichung erfolgt. Dieselbe vollzieht sich schliesslich derart, dass auf der einen Seite aus den selbstständig sich ergebenden Mittelwerthen der Zahlen der Lebenden die entsprechenden Lebensdauerwahrscheinlichkeiten und auf der anderen Seite aus den vorhandenen Mittelwerthen der wahrscheinlichen Lebensdauer die correspondirenden Zahlen der Lebenden berechnet werden und aus den solchermassen dargestellten Doppelwerthen abermals das arithmetische Mittel derselben berechnet wird. Durch Fortsetzung dieses Processes mittelst gegenseitiger Ausgleichung gelangt man schliesslich zu vollständig übereinstimmenden Werthen der Function von w_x und L_x laut der bekannten Grundform.

Ueber das Wesen des wahrscheinlichen Werthes ungewisser Güter und Anwartschaften.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung verdankt ihre Entstehung einer durch den Mathematiker Pascal aufgestellten Billigkeitsregel, welcher die von demselben erfundene Geometrie des Zufalles als Grundlage dient. Ebenso hatten die grossen Genies des 17. Jahrhunderts, Fermat, Leibnitz, Huyghens, welche sich gleichzeitig oder einige Jahre später mit der Berechnung der Combinationen und der Wahrscheinlichkeiten beschäftigten, nur diese Regel im Auge. Jacob Bernoulli bestimmte in der ars conjectandi formell den wesentlichen Zweck und den objectiven Werth der Theorie des Zufalles. Erst später ging man auf den Begriff der Wahrscheinlichkeit im subjectiven und objectiven Sinne über, durch welche Unterscheidung erst die eigentliche Theorie der mathematischen Wahrscheinlichkeiten einem ausgesprochenen Systeme unterordnet werden konnte. Die Principien, welche auf diese Weise sich Geltung verschafften, lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

Erscheinungen, welche durch ein Zusammentreffen der durch eine Vereinigung mehrerer, hinsichtlich der Causalität von einander unabhängiger Erscheinungen hervorgebracht werden, nennt man zufällige Erscheinungen oder Wirkungen des Zufalles.

Anders gestaltet sich der Begriff, wenn Ursache und Wirkung sich in ihrem Zusammenhange erkennen lassen, dann kommt die Frage der Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer gewissen Erscheinung in Betracht. In der Sprache der Mathematik und Metaphysik, wo es sich stets um abstracte und absolute Wahrheiten handelt, kann eine Sache blos möglich sein oder nicht; denn Grade der Möglichkeit oder Unmöglichkeit gibt es hier nicht. Wenn aber in der wirklichen, physischen Welt zwei entgegengesetzte Ereignisse in Folge der zufälligen Verbindung gewisser veränderlicher Ursachen mit anderen constanten Ursachen stattfinden können und auch wirklich stattfinden, so ist es ganz natürlich, wenn man annimmt, dass ein Ereigniss umso leichter stattfinden kann, oder physisch umso eher möglich ist, je öfter dasselbe bei einer grossen Anzahl von Versuchen wirklich eintritt. Die mathematische Wahrscheinlichkeit bezeichnet also das Mass der physischen Möglichkeit, so dass der eine dieser Ausdrücke für den anderen zur Anwendung gelangen kann. Immerhin besteht zwischen denselben ein gewisser Unterschied, welcher sich darin kundgibt, dass durch den Ausdruck Möglichkeit die Existenz eines zwischen den Dingen selbst stattfindenden Verhältnisses deutlich angezeigt wird, welches nicht von unserem Urtheile oder Gefühle abhängt, so dass dieser Ausdruck eine objective Bedeutung hat im Gegensatze zur Wahrscheinlichkeit, deren Wesen in seiner gewöhnlichen Bedeutung in subjectivem Sinne aufzufassen ist.

Für die zufälligen oder ungewissen Ereignisse, deren Bedingungen nicht durch den Menschen bestimmt werden können, sind die Ursachen, welche einem solchen Ereignisse gewisse Wahrscheinlichkeiten ertheilen, oder welche das Wahrscheinlichkeitsgesetz der verschiedenen Werthe einer veränderlichen

Grösse bestimmen, ihrer Natur und Wirkungsart nach fast immer unbekannt oder so complicirt, dass wir weder eine genaue Analyse derselben machen, noch ihre Wirkungen der Rechnung unterwerfen können. Selbst bei den Spielen, wo alles eine blosse Uebereinkunft und Erfindung des Menschen ist, unterliegt die Construction der aleatorischen Instrumente Unregelmässigkeiten, wodurch in den objectiven Wahrscheinlichkeiten Modificationen hervorgebracht werden, deren Einfluss man nicht a priori würde bestimmen können. Sogar in den Spielen, wo die Wahrscheinlichkeiten nur von einer rein arithmetischen Aufzählung der Combinationen abhängen, ohne dass mechanische oder physische Bedingungen in Betracht kommen, kann die Auflösung der rein arithmetischen Aufgabe noch die Kräfte der mathematischen Analysis überschreiten. Es ist daher für die Anwendungen der Theorie der Wahrscheinlichkeiten durchaus nothwendig, dass man diese Wahrscheinlichkeiten, deren directe Bestimmung nach den Daten der Rechnungsgrundlage nicht bewirkt zu werden vermag, durch Versuche oder a posteriori bestimmt.

In dieser Beziehung gilt nun eine von dem Engländer Bayes ausgesprochene Regel:

Die Wahrscheinlichkeiten der Ursachen oder Hypothesen verhalten sich wie die Wahrscheinlichkeiten, welche diese Ursachen oder Hypothesen für die beobachteten Ereignisse geben und die Wahrscheinlichkeit einer dieser Ursachen oder Hypothesen ist ein Bruch, dessen Zähler jene dieser Ursache entsprechende Wahrscheinlichkeit des Ereignisses und dessen Nenner die Summe der ähnlichen Wahrscheinlichkeiten für alle Ursachen oder Hypothesen ist.

Nehmen wir beispielsweise an, dass die Ursache oder das vorangehende Ereigniss die Wahl verschiedener Urnen wäre, während das nachfolgende oder beobachtete Ereigniss, durch den Zug einer bestimmten Kugel unter sonst gleichen Bedingungen gekennzeichnet ist, so muss dieses Ereigniss für jede einzelne dieser Urnen a priori eine verschiedene Wahrscheinlichkeit haben, deren Wesen durch die Bayes'sche Regel bedingt ist.

Auf diese Weise lässt sich also der Einfluss gewisser veränderlicher Ursachen auf die Wirkung constanter Ursachen mathematisch unterscheiden, doch ist es nicht immer möglich, denselben auch hinsichtlich seiner Wirksamkeit mathematisch zu controliren, so dass in mehr oder minder hohem Masse die Zuverlässigkeit der Resultate hierunter leidet. Man ist unter solchen Umständen blos im Stande, auf Grund wiederholter Versuche und Beobachtungen annähernd die Grenzen festzustellen, zwischen welchen die Wahrscheinlichkeit oder das Mass der physischen Möglichkeit eines in Frage kommenden Ereignisses sich bewegt.

Wenn ein Gegenstand auf dem Wege der Lotterie zur Ausspielung gelangt, so kann jedes Los, dessen Besitz ein eventuelles Recht auf diesen Gegenstand gibt, selbst wieder in den Handel gebracht werden und der Verkaufspreis oder der Werth desselben ist kein anderer, als der des eventuellen Rechtes auf den in Rede stehenden Gegenstand. Es ist durchaus kein Grund vorhanden, dem einen Lose einen grösseren Werth beizulegen als dem anderen,

so dass sich der Besitz zweier Personen, wovon die eine *m* und die andere *n* Lose hat, in dieser Beziehung, wie *m* zu *n* verhält. Das eben in Beziehung auf eine Verlosung und Lotterie Gesagte ist ebenfalls auf jede andere Art ungewisser Güter und Anwartschaften anwendbar, so dass, wenn mehrere Personen auf einen Gegenstand eventuelle Rechte besitzen und diese Rechte ihrerseits in den Handel gebracht werden können, die Kaufpreise derselben nothwendig den Wahrscheinlichkeiten proportional sind, welche diese Personen haben den fraglichen Gegenstand zu bekommen.

Diese Betrachtung ist aber noch nicht hinreichend, um uns den absoluten Werth eines solchen eventuellen Gutes kennen zu lehren; denn es ist klar, dass jeder diesen Werth, wie denjenigen eines anderen Handelsgegenstandes nach seinen besonderen Verhältnissen und Umständen abschätzen wird. Aber so wie sich für die anderen Handelsgegenstände ein Marktpreis (Curs) herstellt, ebenso muss sich auch bei dem Handel mit ungewissen Gütern ein solcher Curs bilden und demgemäss muss sich der Preis oder Werth jeder Erwartung, jedes Loses oder eventuellen Rechtes auf den Gegenstand zu dem absoluten Werthe desselben, wie die Einheit zu der Gesammtzahl der Lose verhalten.

Anders würde sich dies jedoch gestalten, wenn die Wahrscheinlichkeit, durch Verlosung in den Besitz jenes Gegenstandes zu gelangen, noch an eine weitere Bedingung geknüpft wäre, welche von den constanten Ursachen des einzutretenden Ereignisses unabhängig, gleichzeitig die Wirkung veränderlicher Ursachen zur Voraussetzung hätte. In diesem Falle würde der Marktpreis der einzelnen Lose sich mehr willkürlich gestalten, indem derselbe anfangs zwischen gewissen Grenzen variirend, erst nach und nach durch Beobachtung der günstigen Ergebnisse sich abschätzen liesse, so dass thatsächlich der Umstand einer a posteriori ermittelten Wahrscheinlichkeit hier eintreten würde.

In diesem Sinne ist nun auch die Darstellung des wahrscheinlichen Werthes ungewisser Güter und Anwartschaften, welche an ein mit individuellen Chancen verbundenes Ereigniss verknüpft sind und deren mathematischer Hoffnung aufzufassen.

Unter dem Wesen der mathematischen Hoffnung wird im Allgemeinen jenes Product verstanden, welches man erhält, wenn man den absoluten Werth eines Gegenstandes mit jenem Bruch multiplicirt, welcher die mathematische Wahrscheinlichkeit des Gewinnes ausdrückt und es bezeichnet folglich nach dem Vorhergehenden die mathematische Hoffnung jener Grenze, welcher sich bei einem freien Handel der Kaufpreis eines ungewissen Handelsgutes stetig nähert.

Wenn der Gegenstand, auf welchen man durch ein Los ein eventuelles Recht erhält, eine Summe Geldes ist, so fallen die Veränderungen des Kaufpreises weg und die mathematische Hoffnung eines Losbesitzers ist völlig bestimmt, sobald man die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes kennt, wie bei den reinen Hazardspielen, bei welchen man die Anzahl der möglichen und günstigen Combinationen berechnen kann. Wenn die Spieler übereinkommen, die Partie abzubrechen oder nicht auszuspielen, so müssen sie offenbar den ganzen Einsatz nach Verhältniss der Wahrscheinlichkeiten denselben zu gewinne

unter sich theilen und die Regel der mathematischen Hoffnung stimmt alsdann mit der bereits erwähnten Billigkeits- oder Theilungsregel überein, welche die erste Veranlassung zu der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben hat.

Die mathematische Hoffnung stellt folglich auch den richtigen und wahren Werth eines ungewissen Gutes dar. Ist der geforderte Preis für dasselbe ein anderer, so ist der Handel damit kein durch die Bedingung der Billigkeit bestimmter mehr, sowie jeder andere Handel aufhört billig zu sein, sobald der eine Contrahent die Lage, Bedürfnisse, Leidenschaften oder die Unwissenheit des anderen zu seinem Vortheile benützt. Hieraus folgt jedoch nicht, dass dieselbe Sache Jedermann zu demselben Preise entspricht, oder dass es vernünftig ist, eine Sache jedesmal zu kaufen, wenn man selbe nicht über den Curs zu bezahlen braucht oder sogar darunter bekommen kann. Der convenirende Werth einer Sache im Gegensatze zu ihrem commerciellen Werthe richtet sich offenbar nach den besonderen Verhältnissen und dem Vermögen des Käufers, und es ist nicht möglich den convenirenden Werth einer Sache, wie den Werth ungewisser Güter und Anwartschaften oder anderer bestimmter Güter der Rechnung zu unterwerfen und festzustellen. Offenbar riskirt Jemand bei dem Ankaufe eines ungewissen Gutes desto mehr, je beträchtlicher der dafür gezahlte Preis gegen sein Vermögen ist und der gesunde Menschenverstand sagt auch, dass die Wichtigkeit einer Summe Geldes für Jedermann desto mehr abnimmt, je grösser sein Vermögen ist, so dass für einen Arbeiter, der 1000 Gulden erspart hat und davon die Hälfte auf's Spiel setzen wollte, die 500 Gulden, welche er gewinnen kann, weniger Werth haben, als die 500 Gulden, welche er verlieren kann. Man hat diesen relativen Werth ungewisser Summen die moralische Hoffnung genannt und verschiedene Regeln zur Bestimmung desselben vorgeschlagen, welche aber alle ganz willkürlich sind und keine reelle Anwendung gestatten. Man darf die Mathematik nicht missbrauchen, wenn man ihre Auctorität in jenen Fragen erhalten will, welche wirklich in ihr Gebiet gehören, und überhaupt wird die logische Argumentation, von welcher der Calcul nur ein Zweig ist, in Misscredit gebracht, wenn man dieselbe über den Kreis logischer Combinationen hinaus erstreckt.

Im Allgemeinen mischt sich der Zufall in alle Angelegenheiten der Welt und in ökonomischer Beziehung gibt es keine Speculation, welche nicht mehr oder weniger die Natur eines oleatorischen Handels hätte; denn bei allen Handelsangelegenheiten werden sozusagen ungewisse Güter und Erwartungen gekauft oder verkauft. Wenn man einer commerciellen Speculation oder einer blossen Privatsache, die ihr inhärirende Unsicherheit oder Ungewissheit nehmen will, so versichert man sie. Eine solche Versicherung ist immer vortheilhaft, denn sie beseitigt die Besorgnisse, welche der productiven Thätigkeit und der freien Entwicklung nachtheilig werden können und erweitert gewissermassen die Macht des Menschen, welche er sich durch seine Intelligenz und seinen voraussehenden Verstand über die den blossen Gesetzen des Zufalles und des Schicksales unterliegende physische Natur verschafft.

Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln.

VI.

Der in der vorigen Abhandlung dargestellte Ausgleichsprocess lässt sich aber auch in umgekehrter Reihenfolge durchführen, indem die Relation

$$\frac{c}{b} \cdot \Delta\, lg\, L_x = \Delta\, lg\, (L_x)$$

zur Grundlage angenommen wird und aus dem arithmetischen Mittel der Zahlen der Lebenden L_x und (L_x) eine neue Sterbetafel mit den Zahlen der Lebenden $(L_x)_1$ geschaffen wird, deren Ergebnis $(w_x)_1$ dann erst mit dem arithmetischen Mittel von w_x und (w_x) zur Vergleichung gelangt. Auf diese Weise wird ein rascherer Einblick in den Entwicklungsgang des Ausgleichungsprocesses erzielt, wobei sich gleichzeitig eine bequeme Controle für die Verlässlichkeit des Rechnungsergebnisses darbietet. In Folge desen erweist sich dieser Vorgang vortheilhafter als der erstere und werden wir denselben desshalb auch vorziehen.

Der vollständigen Ausgleichung einer Sterbetafel liegt aber noch eine wichtige Bedingung zu Grunde, welche erfüllt werden muss, wenn den beiden Regeln I und II Rechnung getragen werden soll. Mit Rücksicht auf die Intervalle von je einem Jahre, welchen eine jede Sterbetafel entspricht, ergibt sich zwischen den mathematisch eigentlich identischen Werthen

$$\frac{w'_x}{w_x} \text{ und } \mu \,.\, \Delta\, lg\, w_x \text{ respective } \frac{L'_x}{L_x} \text{ und } \mu \,.\, \Delta\, lg\, L_x$$

ein gewisser aus der Grösse der Intervalle entspringender Unterschied, dessen Ausgleichung bei dem Ausgleichungsprocesse einer Sterbetafel überhaupt von besonderer Bedeutung ist, da in demselben zum grossen Theile die Quelle der Anomalien zu suchen ist.

Wir haben es daher in diesem Falle mit zweien wenn auch nur wenig von einander abweichenden Werthen ein- und derselben mathematischen Function zu thun, welche den Gang der Rechnung naturgemäss irritiren müssen, da die alternative Anwendung beider Werthe im Calcul nicht leicht vermieden werden kann. Dieser Umstand hat seine Ursache darin, dass aus den Zahlen der Lebenden L_x wohl die entsprechenden Lebensdauerwahrscheinlichkeiten w_x, nicht aber auch umgekehrt aus den Lebensdauerwahrscheinlichkeiten die Zahlen der Lebenden arithmetisch direct ermittelt werden können, so dass man das einemal zu diesem, das anderemal zu jenem Werthe derselben Function greifen muss, um den Ausgleichungsprocess rechnungsmässig unter Vermeidung mathematisch complicirter Conclusionen durchführen zu können.

Der Ausgleichungsprocess, der hier zur Anwendung kommt, dürfte jedoch geeignet sein, auch dieser Anforderung Rechnung zu tragen und mag in Nachfolgendem die tabellarische Darstellung desselben hierüber Aufschluss geben.

Tabelle V.

Alter Jahre	Logarithmendifferenzen der abgeleiteten Zahlen der Lebenden $-\frac{1}{\mu}\frac{w'x+1}{w_x}=\triangle lg(L_x)$	Logarithmen der abgeleiteten Zahlen der Lebenden $lg\ (L_x)$	Abgeleitete Zahlen der Lebenden (L_x)	Ursprüngliche Zahlen der Lebenden L_x	Arithmetisches Mittel $\frac{L_x+(L_x)}{2}=(L_x)_1$
10	— 0·0029204	6·0000000	1000000	1000000	1000000
11	— 0·0029378	5·9970793	993297	994340	993269
12	— 0·0029577	5·9941415	986601	986500	986551
13	— 0·0029795	5·9911838	979905	979780	979843
14	— 0·0030036	5·9882043	973205	973070	973138
15	— 0·0030300	5·9852007	966497	966360	966429
16	— 0·0030581	5·9821707	959778	959650	959714
17	— 0·0030886	5·9791126	953043	952930	952987
18	— 0·0031216	5·9760240	946289	946200	946245
19	— 0·0031524	5·9729024	939512	939450	939481
20	— 0·0031898	5·9697500	932717	932680	932699
21	— 0·0032275	5·9665602	925892	925880	925886
22	— 0·0032660	5·9633327	919036	919050	919043
23	— 0·0033049	5·9600667	912151	912190	912171
24	— 0·0033549	5·9567618	905236	905290	905263
25	— 0·0034009	5·9534069	898270	898350	898310
26	— 0·0034523	5·9500060	891263	891370	891317
27	— 0·0035049	5·9465537	884207	884340	884274
28	— 0·0035639	5·9430488	877099	877260	877180
29	— 0·0036236	5·9394849	869931	870120	870026
30	— 0·0036902	5·9358613	862703	862920	862812
31	— 0·0037576	5·9321711	855404	855650	855527
32	— 0·0038321	5·9284135	848035	848310	848173
33	— 0·0039084	5·9245814	840584	840890	840737
34	— 0·0039863	5·9206730	833054	833390	833222
35	— 0·0040917	5·9166867	825442	825810	825626
36	— 0·0042085	5·9125950	817702	818140	817921
37	— 0·0042958	5·9083865	809816	810380	810098
38	— 0·0043744	5·9040907	801845	802530	802188
39	— 0·0044610	5·8997163	793809	794580	794195
40	— 0·0045472	5·8952553	785697	786530	786114
41	— 0·0046581	5·8907081	777514	778380	777947
42	— 0·0047830	5·8860500	769219	770120	769670
43	— 0·0049422	5·8812670	760794	761730	761262
44	— 0·0051385	5·8763248	752185	753160	752673
45	— 0·0053691	5·8711863	743338	744350	743844
46	— 0·0056483	5·8658172	734205	735260	734733
47	— 0·0059503	5·8601689	724718	725820	725269
48	— 0·0062824	5·8542186	714856	716010	715433
49	— 0·0066410	5·8479362	704590	705800	705195
50	— 0·0070340	5·8412952	693897	695170	694534
51	— 0·0074706	5·8342612	682749	684090	683420
52	— 0·0079312	5·8267906	671105	672530	671818
53	— 0·0084533	5·8188594	658960	660460	659710
54	— 0·0090048	5·8104061	646258	647850	647054

Alter Jahre	Logarithmendifferenzen der abgeleiteten Zahlen der Lebenden $\frac{1}{\mu}\frac{w'_x+1}{w_x}=\Delta lg(L_x)$	Logarithmen der abgeleiteten Zahlen der Lebenden $lg(L_x)$	Abgeleitete Zahlen der Lebenden (L_x)	Ursprüngliche Zahlen der Lebenden L_x	Arithmetisches Mittel $\frac{L_x+(L_x)}{2}=(L_x)_1$
55	— 0·0095912	5·8014013	632997	634690	633844
56	— 0·0102812	5·7918101	619170	620940	620055
57	— 0·0109895	5·7815289	604685	606580	605633
58	— 0·0117489	5·7705394	589575	591610	590593
59	— 0·0126462	5·7587905	573840	576000	574920
60	— 0·0135871	5·7461443	557371	559730	558551
61	— 0·0146406	5·7325572	540203	542750	541477
62	— 0·0158076	5·7179166	522296	525050	523673
63	— 0·0170799	5·7021090	503627	506610	505119
64	— 0·0184854	5·6850291	484205	487440	485823
65	— 0·0200265	5·6665437	464028	467540	465784
66	— 0·0217123	5·6465172	443116	446930	445023
67	— 0·0235959	5·6248049	421507	425650	423579
68	— 0·0255584	5·6012090	399217	403740	401479
69	— 0·0277637	5·5756506	376401	381280	378841
70	— 0·0301587	5·5478869	353091	358370	355731
71	— 0·0327680	5·5177282	329404	335100	332252
72	— 0·0356973	5·4849602	305464	311590	308527
73	— 0·0388647	5·4492629	281360	287970	284665
74	— 0·0421330	5·4103982	257275	264390	260833
75	— 0·0459093	5·3682652	233488	241000	237244
76	— 0·0499654	5·3223559	210066	217970	214018
77	— 0·0544916	5·2723905	187236	195480	191358
78	— 0·0594718	5·2178989	165158	173690	169424
79	— 0·0649307	5·1584271	147376	152770	150073
80	— 0·0709382	5·0934964	124021	132900	128461
81	— 0·0775393	5·0225582	105332	114240	109786
82	— 0·0846510	4·9450189	88109	96940	92525
83	— 0·0927075	4·8603679	72505	81120	76813
84	— 0·1016608	4·7676604	58568	66850	62709
85	— 0·1120535	4·6659996	46345	54170	50258
86	— 0·1242678	4·5539461	35805	43060	39433
87	— 0·1388317	4·4296783	26895	33480	30188
88	— 0·1568474	4·2908466	19537	25370	22454
89	— 0·1793755	4·1339992	13614	18640	16127
90	— 0·2078485	3·9546237	9008	13190	11099
91	— 0·2453167	3·7467752	5582	8920	7251
92	— 0·2951090	3·5014585	3173	5700	4437
93	— 0·3763610	3·2063495	1608	3390	2499
94	— 0·4624923	2·8299885	676	1840	1258
95	— 0·6103256	2·3674962	228	890	559
96	— 0·8018300	1·7571706	57	370	214
97	— 0·9553406	0·9553406	9	130	70
98		0·0000000	1	40	21
99				10	5

Die entsprechende Wiederholung dieses Processes ist auf die weitere Ausgleichung der Werthe der noch in Betracht kommenden identischen Functionen gerichtet.

Unseren früheren Ausführungen gemäss wird sodann das arithmetische Mittel zwischen L_x und (L_x) das ist $(L_x)_1$ die Grundlage des weiteren Ausgleichungsprocesses bilden, indem analog hiezu das w_x und (w_x) das entsprechende arithmetische Mittel $(w_x)_1$ festgestellt wird und auf diese Weise eine gegenseitige Ausgleichung dieser beiden Grössen bewirkt wird. Dies geschieht bekanntlich in der Weise, dass aus den festgestellten Zahlen der Lebenden $(L_x)_1$ direct die entsprechenden Lebensdauerwahrscheinlichkeiten $(w_x)_1$ und umgekehrt aus $(w_x)_1$ die Werthe von $(w'_x)_1$ und mit Hilfe derselben der Form

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{(w'_x)_1 + 1}{(w_x)_1} = \Delta\, lg\, (L_x)_2$$

gemäss, die Werthe $(L_x)_2$ ermittelt werden, worauf abermals das arithmetische Mittel zwischen $(L_x)_1$ und $(L_x)_2$ sowie zwischen $(w_x)_1$ und $(w_x)_2$ dargestellt wird, welcher Process solange wiederholt wird, bis die vollständige Ausgleichung aus dem Schwinden jeglicher Differenzen zwischen den Werthen identischer Functionen wahrnehmbar ist. Aus dieser Tabelle ist auch zu entnehmen, dass die Feststellung der Anomalien durch die Werthe b und c für den Ausgleichungsprocess nicht unbedingt nothwendig ist und derselbe directe aus den gegebenen Ursprungszahlen eingeleitet werden kann.

Ermittelt man nähmlich aus den Zahlen der Lebenden L_x die Lebensdauerwahrscheinlichkeiten w_x und deren Differenzen w'_x, so ergibt sich hieraus unermittelt der Werth

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{w'_x + 1}{w_x} = \Delta\, lg\, (L_x)$$

welcher die Differenzen der briggischen Logarithmen der abgeleiteten Zahlen der Lebenden (L_x) darstellt, aus welchen sich diese ergeben, sobald man deren Logarithmen aus den entsprechenden Summen der Logarithmen-Differenzen feststellt. Der weitere Process entwickelt sich sodann in der oben dargestellten Weise.

Dieser Umstand zeigt offenbar, dass bei Ausscheidung der überflüssigen Elemente aus der Rechnung der Process auf das einfache Princip der Ausgleichung identischer Functionen sich reducirt und zugleich in seiner Consequenz direct auf die Erfüllung der Bedingungen, welche in den Regeln I und II zur Geltung gelangen, gerichtet ist.

Jene die Anomalien zum Ausdrucke bringenden Werthe b und c sind jedoch trotz ihrer Entbehrlickkeit im Ausgleichungsprocesse wichtig genug, um nicht übergangen zu werden, da sie als sichtbare Merkmale mangelnder Gesetzmässigkeit des Sterblichkeits-Verlaufes geeignet sind, der systematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln das nöthige Fundament zu gewähren. Dieselben repräsentiren in ihrem Wesen den Ausdruck einer mehr oder weniger vorhandenen Uebereinstimmung der Absterbeordnung mit dem mathematischen Wahrscheinlichkeits-Gesetze und bilden daher stets den Ausgangspunkt dieses Processes.

Mathematische Darstellung der Kapitals-Aufzinsungsform unter Voraussetzung eines veränderlichen Zinsfusses.

II.

In der vorigen Abhandlung über dieses Thema gelangten wir zu der interessanten Conclusion, dass bei jährlich gleichmässiger Veränderung des Zinsfusses das Aufzinsungsresultat annähernd demjenigen gleichkommt, welches sich bei Zugrundelegung des entsprechenden Durchschnittszinsfusses ergibt. Nun ist aber bekanntlich jenes Aufzinsungsresultat selbst blos eine Art Näherungswerth, da bei der bezüglichen mathematischen Form, deren Beschaffenheit sich in einer geometrischen Reihe präsentirt, blos die drei ersten Glieder in Betracht gezogen wurden, während die übrigen Glieder mit Rücksicht auf die besondere Convergenz dieser Reihe eine Vernachlässigung erführen. Desshalb erscheint es wohl fraglich, ob diese Rechnungsgrundlage auch für Kapitalssummen hinreichend sich erweist, die in ihrer Höhe jene Grenze übersteigen, welche durch die in der vorigen Abhandlung angeführten Beispiele gekennzeichnet ist. Je grösser nämlich der für die Aufzinsung in Betracht kommende Kapitalsbetrag sich gestaltet, auf desto mehr Decimalstellen muss die Genauigkeit des Aufzinsungsfactors sich erstrecken und desto mehr Glieder jener geometrischen Reihe müssen mit Rücksicht hierauf in Rechnung gelangen. Freilich dürfte für den gewöhnlichen praktischen Gebrauch, zufolge der ungemein wirksamen Convergenz dieser Reihe, das fünfte Glied derselben bereits hinreichen, um selbst für Kapitalssummen von Hunderten Millionen genügend zuverlässige Resultate zu liefern, immerhin bleibt jedoch die Frage offen, ob auch in dem Falle des Inbetrachtkommens dieser höheren Kapitalssummen der gleiche Umstand hinsichtlich obiger Wahrnehmung, betreffend des gleichen Aufzinsungsresultates mittelst Anwendung des Durchschnittszinsfusses, obwaltet.

Um in dieser Beziehung in geeigneter Weise sich Aufklärung zu verschaffen, erschiene es angezeigt, in der Rechnung weitere Glieder der Reihe zu berücksichtigen, sowie auch gleichzeitig die Untersuchung auf die nähere Beschaffenheit der zugehörigen Coëfficienten $C, D, E, \ldots$ auszudehnen. Wird jedoch erwogen, dass ein übereinstimmendes Ergebniss bei Inanspruchnahme blos eines nächsten Gliedes der Reihe schon einen Schluss für die analoge Beeinflussung weiterer berücksichtigter Glieder der Reihe zulässt, so dürfte ein Aufschluss in dieser Hinsicht bereits durch Mitheranziehung blos des nächsten, also vierten Gliedes, möglich sein. Von diesem Gesichtspunkte aus soll daher versucht werden, diese Frage zu lösen und zu diesem Zwecke der Coëfficient des vierten Gliedes der entsprechenden geometrischen Reihe in seiner allgemeinen Beschaffenheit näher bestimmt werden.

Die allgemeine Form für die Kapitalsaufzinsung bei **regelmässig veränderlichem** Zinsfusse lautet bekanntlich:

$K_n = K[(1+p)^n + A.\varsigma(1+p)^{n-1} + B.\varsigma^2(1+p)^{n-2} + C.\varsigma^3(1+p)^{n-3} + \ldots]$

worin die Coëfficienten A und B den Werthen

$$A = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{und } B = \frac{1}{2}\left[(n-1)^2(n-2) + (n-2)^2(n-3) + \ldots + (n-k)^2(n-k-1)\right]$$

$$= \sum_{k=n}^{k=1} \frac{(n-k)^2(n-k-1)}{2}$$

entsprechen. Der Coëfficient C wird nun gemäss der in der vorigen Abhandlung dargestellten Ableitung durch die Reihensumme

$$C = \frac{n-1}{2}\left[(n-2)^2(n-3) + (n-3)^2(n-4) + \ldots + (n-k)^2(n-k-1)\right] +$$

$$+ \frac{n-2}{2}\left[(n-3)^2(n-4) + (n-4)^2(n-5) + \ldots + (n-k)^2(n-k-1)\right] +$$

$$+ \frac{n-3}{2}\left[(n-4)^2(n-5) + (n-5)^2(n-6) + \ldots + (n-k)^2(n-k-1)\right] +$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{n-k+1}{2}\left[(n-k)^2(n-k-1)\right]$$

zum Ausdrucke gelangen und demnach in der Aufzinsungsform seinen Einfluss geltend machen. Mit Rücksicht auf die mathematische Beschaffenheit dieses Coëfficienten-Werthes lässt sich nun die Conclusion ziehen, dass ausser der Höhe der in Betracht kommenden Kapitalssumme auch die Länge der Aufzinsungsfrist für die Zuverlässigkeit des Calculs von hohem Einflusse sein dürfte, da n als der Ausdruck der letzteren bei steigendem Werthe einen rapiden Wachsthum des Coëfficienten C involvirt. Wohl verschwindet diese Grösse in dem Producte, dessen Factor jene zur dritten Potenz erhobene, jährliche Zinsfussveränderung ς ist, da selbst in dem Falle, wo der Zinsfuss innerhalb 25 Jahren die sehr bedeutende Veränderung um ein ganzes Percent erleidet, die Grösse ς in der dritten Potenz blos 64 Billiontel beträgt, doch dürfte dessenungeachtet bei Tilgungsfristen, welche sich über 50 Jahre erstrecken, schon für Kapitalssummen von Millionen, der Einfluss sich geltend machen, d. h. die Vernachlässigung dieses Coëfficienten könnte bereits auf die Genauigkeit des Resultates eine sehr nachtheilige Wirkung üben. Es ist daher die Beantwortung der Frage, ob das auf Grundlage des Durchschnittszinsfusses berechnete Resultat auch für höhere Kapitalssummen den Anforderungen zu entsprechen vermag, in dieser Beziehung von hohem Interesse, insbesondere als die ziffermässige Berechnung des Aufzinsungsfactors nach obiger Form sich offenbar als sehr mühsam erweist, wohingegen die Ermittlung

des Resultates auf jener Grundlage, sobald dieselbe für alle Fälle sich als zuverlässig erweisen würde, auf einfache Weise erfolgen könnte.

Setzen wir nun unsere Untersuchungen fort und führen wir zu diesem Zwecke unter Heranziehung des vierten Gliedes der geometrischen **Reihe eines unserer bekannten** Beispiele nochmals durch und zwar **derart, dass wir die aufzuzinsende Kapitalssumme** entsprechend höher annehmen.

Es sei also dementsprechend folgende Frage gestellt: Ein Kapital, welches während zwanzig Jahren derart verzinslich **angelegt war, dass der Zinsfuss im ersten Jahre 5·76 Percent, im zweiten Jahre 5·72 Percent, im dritten Jahre 5·68 Percent u. s. w. und schliesslich im zwanzigsten Jahre 5 Procent betrug, also in jedem nächsten Jahre sich um 0·04 Percent verminderte, beträgt gegenwärtig 5,400,000 Gulden, welcher Betrag wurde ursprünglich angelegt.**

Diesem Beispiele entsprechen nun die Werthe:

$$K_n = 5{,}400{,}000\ ,\ n = 20\ ,\ P = 100\,p = 5{\cdot}76\ ,\ \Phi = 100\,\varphi = -\,0{\cdot}04$$

und $K = ?$ **Mit Rücksicht hierauf lautet die bezügliche Form unter Heranziehung des vierten Reihengliedes**

$$5{,}400{,}000 = K\,[(1{\cdot}0576)^{20} - 190\,.\,(1{\cdot}0576)^{19}\,0{\cdot}0004 + \\ + 16.825\,.\,(1{\cdot}0576)^{18}\,0{\cdot}00000016 - 919{,}180\,.\,(1{\cdot}0576)^{17}\,0{\cdot}000000000064]$$

respective

$$5{,}400{,}000 = K\,[3{\cdot}064983 - 0{\cdot}220232 + 0{\cdot}007355 - 0{\cdot}000152] = K\,.\,2{\cdot}851954$$

daher

$$K = 1{,}893{,}439{\cdot}00$$

als Resultat. Auf Grundlage des Durchschnittszinsfusses von **5·38 Percent ergibt sich nun für** K der Werth

$$K_1 = 1{,}893{,}345{\cdot}85$$

so dass aus der Differenz zwischen diesen beiden Resultaten der **Grad der Uebereinstimmung derselben** beurtheilt werden kann. Zieht man nun **überdies den rechnungsmässig** vollständig genauen Werth von K in **Betracht, welcher durch**

$$K = 1{,}893{,}439{\cdot}30$$

zur Darstellung gelangt, so ist das Maass der Zuverlässigkeit **der beiden Rechnungs-Methoden** genügend gekennzeichnet.

Soweit es sich also um eine aproximative Berechnung handelt, **dürfte die Grundlage** des Durchschnittszinsfusses für ein oberflächliches **Calcul immerhin genügen,** insbesondere wird dasselbe praktisch zur **Anwendung gelangen können,** wo complicirtere Rentenberechnungen in Betracht **kommen und eine beiläufige** Calculation in Bezug auf die zukünftige **Zinsfussgestaltung in grossen Umrissen** sich als erforderlich erweist. Der **Fehler, welcher bei Berechnung auf Grundlage** des Durchschnittszinsfusses **in Betracht kommt,**

ist verhältnissmässig ein geringer und dürfte bei mässigen Kapitalssummen wenig in Betracht kommen gegenüber dem Vortheile, welcher sich durch die sehr bedeutende Vereinfachung der Rechnung besonders für die Durchführung zusammengesetzter Formen der Zinseszins- und Rentenrechnung ergibt. Uebrigens lässt sich für die Erreichung einer grösseren Genauigkeit eine angemessen verlässliche Correctur durchführen, und zwar ergibt sich auf Grund einer versuchsweise ermittelten Regel die Form für den Fehler

$$F = \frac{n.\Phi}{3.Q} + \frac{1}{9}\left(\frac{n.\Phi}{3.Q}\right)^2 - \ldots$$

in Permille des Kapitalsbetrages, in welcher n die Tilgungsfrist, Φ die jährliche regelmässige Zinsfussveränderung und Q den mit Rücksicht auf die Letztere resultirenden Durchschnittszinsfuss bedeutet.

Für unser Beispiel, in welchem $n = 20$, $\Phi = -0{\cdot}04$ und $Q = 5{\cdot}38$ bedeutet, ergibt sich für F der Werth

$$F = 0{\cdot}04934 \frac{K_1}{1000} = 93{\cdot}40 \text{ und somit } K_1 + F = 1{,}893{,}345{\cdot}85 + 93{\cdot}40 = 1{,}893{,}439{\cdot}25,$$

wodurch der Werth von K hinreichend genau festgestellt erscheint, ohne dass die Ermittlung desselben mit einer complicirten Rechnungsweise verbunden wäre.

Obige Formel, welche den jeweiligen Fehler des auf Grundlage des Durchschnittszinsfusses ermittelten Resultates darstellt, gibt am besten darüber Aufschluss, in welcher Weise die verschiedenen in der mathematischen Aufzinsungsform vertretenen Grössen ihren Einfluss auf denselben geltend machen. Der Zähler jener, eine geometrische Reihe bildender Brüche, stellt das Product zwischen der Tilgungsfrist n und der jeweiligen jährlich gleichmässigen Zinsfuss-Veränderung Φ dar, während der Nenner derselben den Durchschnittszinsfuss Q repräsentirt. Daraus folgt, dass der Fehler sich desto grösser gestalten wird, je grösser die Tilgungsfrist einerseits und die Zinsfussveränderung andererseits ist, respective je kleiner der Durchschnittszinsfuss sich ergibt, d. h. die Grösse des Fehlers steht im geraden Verhältnisse zum Ausmasse der Tilgungsfrist und der Zinsfussveränderung und im umgekehrten Verhältnisse zum Durchschnittszinsfusse. Da aber dieser Fehler zugleich in Permille des Kapitalsbetrages zum Ausdrucke gelangt, steht er auch gleichzeitig im geraden Verhältnisse zu diesem.

Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln.

VII.

Die bisherige Entwicklung dieses Processes deutet darauf hin, dass hinsichtlich der Ausgleichung der identischen Functionen noch manche Vereinfachung des Verfahrens möglich sein dürfte, und da es uns darum zu thun sein muss, den kürzesten Weg in dieser Beziehung einzuschlagen und zugleich auf die Einfacheit der Lösung dieser Frage möglichst Rücksicht zu nehmen, so dürfte es angezeigt sein, jene Umstände nach jeder Richtung hin in Erwägung zu ziehen, welche die Möglichkeit einer Vereinfachung des Ausgleichungs-Processes vermuthen lassen. Es erscheint dies, abgesehen von der praktischen Zweckmässigkeit der Sache, um so mehr geboten, als das Abgehen von der ursprünglichen rein exacten Methode, welche wir in der vorigen Lieferung dieses Werkes dargestellt haben, nur gerechtfertigt werden kann, wenn der Weg, welchen wir hinsichtlich der Ausgleichung der Sterbetafeln hier einschlagen, ein möglichst kurzer und sicherer ist. Die in den Abschnitten V und VI dieser Abhandlung dargestellte Methode führt auf dem Wege der Interpolation der Functionenwerthe zweifellos zur Ausgleichung der Sterbetafeln, doch scheint es, dass der hier in seinem Wesen gekennzeichnete Näherungs-Process der Anforderung der Kürze nicht zu entsprechen vermag. Derselbe fusst zwar auf der directen Entwicklung der Functionenwerthe aus den bekannten grundlegenden Bedingungen der mathematischen Ausgleichung der Sterbetafeln und vollzieht sich mittelst zweier, nach ein und derselben Richtung hin zur Geltung gelangenden Wirkungen, so dass sich bei der gegenseitigen Unterstützung derselben ein rascher Verlauf der Annäherung füglich voraussetzen liesse. Doch wird dieser Erwartung keinesfalls entsprochen, denn was hinsichtlich der systematischen Anordnung vortheilhaft zu sein scheint, erweist sich in rechnerischer Beziehung als mühsam und unzweckmässig. Die erste dieser Wirkungen, welche in der Ausgleichung der identischen Functionen besteht, wird nämlich durch die zweite, im arithmetischen Mittel der Interpolationswerthe basirende, ungünstig beeinflusst, so dass sich die beiden Wirkungen gegenseitig theilweise aufheben. Es dürfte daher geboten sein, sich hinsichtlich der systematischen Anordnung dieses Processes auf die Ausgleichung der identischen Functionen allein zu beschränken. Aber auch in dieser Beziehung ist eine Vereinfachung des Verfahrens zulässig, indem von der homogenen Form

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{(w_x)}{(w_x)} = \Delta lg(w_x)_1$$

ausgegangen wird, wie dies in nachfolgender Tabelle zur Darstellung gelangt.

Tabelle VI.

Alter Jahre	$\frac{w_x}{b} = (w_x)$	(w'_x)	$lg\ (w_x)$	$\triangle lg(w_x)$	$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{(w'_x)}{(w_x)} = \triangle lg(w_x)_1$
10	47·49502	— 0·64102	1·6766481	— 0·0059014	— 0·0058616
11	46·85400	— 0·63870	1 6707467	— 0·0059609	— 0·0059202
12	46·21530	— 0·65596	1·6647858	— 0·0062083	— 0·0061642
13	45·55934	— 0·67009	1·6585775	— 0·0064352	— 0·0063876
14	44·88925	— 0·66374	1·6521423	— 0·0064695	— 0·0064216
15	44·22551	— 0·67893	1·6456728	— 0·0067187	— 0·0066671
16	43·54658	— 0·67955	1·6389541	— 0·0068307	— 0·0067772
17	42·86703	— 0·68821	1·6321234	— 0·0070289	— 0·0069724
18	42·17882	— 0·70251	1·6250945	— 0·0072944	— 0·0072334
19	41·47631	— 0·69978	1·6178001	— 0·0073899	— 0·0073273
20	40·77653	— 0·69991	1·6104102	— 0·0075190	— 0·0074545
21	40·07662	— 0·70268	1·6028912	— 0·0076824	— 0·0076147
22	39·37394	— 0·70296	1·5952088	— 0·0078237	— 0·0077536
23	38·67098	— 0·70652	1·5873851	— 0·0080079	— 0·0079346
24	37·96446	— 0·70579	1·5793772	— 0·0081499	— 0·0080739
25	37·25867	— 0·70775	1·5712273	— 0·0083289	— 0·0082497
26	36·55092	— 0·71301	1·5628984	— 0·0085558	— 0·0084719
27	35·83791	— 0·70281	1·5543426	— 0·0086015	— 0·0085169
28	35·13510	— 0·71536	1·5457411	— 0·0089337	— 0·0088424
29	34·41974	— 0·70986	1·5368074	— 0·0090502	— 0·0089567
30	33·70988	— 0·71454	1·5277572	— 0·0093047	— 0·0092056
31	32·99534	— 0 71298	1·5184525	— 0·0094873	— 0·0093845
32	32·28236	— 0·71334	1·5089652	— 0·0097046	— 0·0095966
33	31·56902	— 0·71548	1·4992606	— 0·0099556	— 0·0098429
34	30·85354	— 0·64680	1·4893050	— 0·0092011	— 0·0091044
35	30·20674	— 0·66290	1·4801039	— 0·0096369	— 0·0095308
36	29·54384	— 0·73931	1·4704670	— 0·0110063	— 0·0108679
37	28·80453	— 0·75006	1·4594607	— 0·0114568	— 0·0113089
38	28·05447	— 0·74602	1·4480021	— 0·0118050	— 0·0115487
39	27·30845	— 0·74675	1·4362971	— 0 0120412	— 0·0118758
40	26·56170	— 0·72099	1·4242559	— 0 0119515	— 0·0117885
41	25·84071	— 0 72145	1·4123044	— 0·0122976	— 0·0121251
42	25·11926	— 0 71864	1·4000068	— 0·0126060	— 0·0124248
43	24·40062	— 0·71760	1·3874008	— 0·0129638	— 0·0127722
44	23·68302	— 0·71359	1·3744370	— 0·0132867	— 0·0130857
45	22·96943	— 0·70797	1·3611503	— 0·0135965	— 0·0133859
46	22·26146	— 0·70165	1·3475538	— 0·0139088	— 0·0136883
47	21·55981	— 0·69551	1·3336450	— 0·0142413	— 0·0140105
48	20 86430	— 0·68867	1·3194037	— 0·0145767	— 0·0143348
49	20·17563	— 0·68158	1·3048270	— 0·0149248	— 0·0146715
50	19·49405	— 0·66882	1·2899022	— 0·0151618	— 0·0149002
51	18·82523	— 0·67412	1·2747404	— 0·0158371	— 0·0155518
52	18·15111	— 0·65214	1·2589033	— 0·0158910	— 0·0156035
53	17·49897	— 0·64776	1·2430123	— 0·0163812	— 0·0160763
54	16·85121	— 0·65417	1·2266311	— 0·0171954	— 0 0168595

Alter Jahre	$\frac{w_x}{b} = (w_x)$	(w'_x)	$lg(w_x)$	$\triangle lg(w_x)$	$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{(w'_x)}{(w_x)} = \triangle lg(w_x)_1$
55	16·19704	— 0·61278	1·2094357	— 0·0167494	— 0·0164306
56	15·58426	— 0·61849	1·1926863	— 0·0175874	— 0,0172358
57	14·96577	— 0·61827	1·1750989	— 0·0183227	— 0·0179417
58	14·34750	— 0·57760	1·1567762	— 0·0178453	— 0·0174838
59	13·76990	— 0·59465	1·1389309	— 0·0191720	— 0·0187981
60	13·17525	— 0·57272	1·1197589	— 0·0193012	— 0·0188785
61	12·60253	— 0·55963	1·1004577	— 0·0197268	— 0·0192854
62	12·04290	— 0·54615	1·0807309	— 0·0201557	— 0·0196954
63	11·49675	— 0·53175	1·0605752	— 0·0205672	— 0·0200871
64	10·96500	— 0·51777	1·0400080	— 0·0210079	— 0·0205075
65	10·44723	— 0·50254	1·0190011	— 0·0214099	— 0·0208917
66	9·94469	— 0·48143	0·9975912	— 0·0215505	— 0·0210245
67	9·46326	— 0·48370	0·9760407	— 0·0227857	— 0·0221983
68	8·97956	— 0·45209	0·9532550	— 0·0224359	— 0·0218652
69	8·52747	— 0·44234	0·9308201	— 0·0231330	— 0·0225279
70	8·08513	— 0·42757	0·9076871	— 0·0235969	— 0·0229670
71	7·65756	— 0·40295	0·8840902	— 0·0234759	— 0·0228531
72	7·25461	— 0·37169	0·8606143	— 0·0228415	— 0·0222511
73	6·88292	— 0·43491	0·8377728	— 0·0283473	— 0·0274417
74	6·44801	— 0·34836	0·8094255	— 0·0241207	— 0·0234632
75	6·09965	— 0·35678	0·7853048	— 0·0261761	— 0·0253991
76	5·74287	— 0·34139	0·7591287	— 0·0266162	— 0·0258170
77	5·40148	— 0·32762	0·7325125	— 0·0271741	— 0·0263416
78	5·07386	— 0·31489	0·7053384	— 0·0278250	— 0·0269529
79	4·75897	— 0·30260	0·6775134	— 0·0285319	— 0·0276140
80	4·45637	— 0·29043	0·6489815	— 0·0292681	— 0·0283038
81	4·16594	— 0·28571	0·6197134	— 0·0308555	— 0·0297856
82	3·88023	— 0·27388	0·5888579	— 0·0317895	— 0·0306540
83	3·60635	— 0·26938	0·5570684	— 0·0337156	— 0·0324400
84	3·33697	— 0·26371	0·5233528	— 0·0357531	— 0·0343219
85	3·07326	— 0·25845	0·4875997	— 0·0381505	— 0,0365225
86	2·81481	— 0·25329	0·4494492	— 0·0409514	— 0·0390799
87	2·56152	— 0·24701	0·4084978	— 0·0440394	— 0·0418795
88	2·31451	— 0·24094	0·3644584	— 0·0477387	— 0·0452100
89	2·07357	— 0·23182	0·3167197	0·0514899	— 0·0485529
90	1·84175	— 0·22289	0·2652298	— 0·0560200	— 0·0525588
91	1·61886	— 0·21465	0·2092098	— 0·0617786	— 0·0575845
92	1·40421	— 0·18583	0·1474312	— 0·0616501	— 0·0574737
93	1·21838	— 0·17936	0·0857811	— 0·0691572	— 0·0639336
94	1·03902	— 0·14378	0·0166239	— 0·0646835	— 0·0600978
95	0·89524	— 0·11772	0·9519404 — 1	— 0·0612294	— 0·0571076
96	0·77752	— 0·15417	0·8907110 — 1	— 0·0959794	— 0·0861131
97	0·62335	— 0·18906	0·7947316 — 1	— 0·1569473	— 0·1317200
98	0·43429		0·6377843 — 1		
99					

Als Grundlage dieses Ausgleichungsprocesses dient nachfolgende Relation: Bekanntlich haben gemäss unserer Grundform die beiden Gleichungen:

$$\Delta lg L_x + \Delta lg w_x = -\frac{1}{\mu \cdot w_x}$$

$$-\frac{1}{\mu} \cdot \frac{w_x' + 1}{w_x} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{w_x'}{w_x} = -\frac{1}{\mu \cdot w_x}$$

für eine ausgeglichene Sterbetafel eine analoge Bedeutung, so dass hiefür die beiden homogenen Relationen

$$\Delta lg L_x = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{w_x' + 1}{w_x} \text{ und } \Delta lg w_x = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{w_x'}{w_x}$$

als Voraussetzung gelten. Für eine mit Anomalien behaftete Sterbetafel lautet nun bekanntlich diese Form

$$\Delta lg L_x + \Delta lg w_x = -\frac{b}{\mu \cdot w_x}$$

wobei der jeweilige Werth b die Anomalien in den einzelnen Altern kennzeichnet. Diese Form lässt sich aber auch in folgender Weise darstellen

$$\Delta lg L_x + \Delta lg w_x = \Delta lg (L_x)_1 + \Delta lg (w_x)_1 = -\frac{1}{\mu \cdot \frac{w_x}{b}}$$

so dass $\frac{w_x}{b}$ den ersten Näherungswerth für die auszugleichende wahrscheinliche Lebensdauer w_x bedeutet, d. h. diese Form übergeht in die folgende

$$\Delta lg (L_x)_1 + \Delta lg (w_x)_1 = -\frac{1}{\mu \cdot (w_x)}$$

mit welcher offenbar die Relation

$$-\frac{1}{\mu} \cdot \frac{(w_x') + 1}{(w_x)} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{(w_x')}{(w_x)} = -\frac{1}{\mu \cdot (w_x)}$$

nach obiger Darstellung correspondirt. Mit Rücksicht hierauf lassen sich aus dem Werthe $\frac{w_x}{b} = (w_x)$ die bezüglichen identischen Functionen

$$-\frac{1}{\mu} \cdot \frac{(w_x') + 1}{(w_x)} = \Delta lg (L_x)_1 \text{ und } \frac{1}{\mu} \cdot \frac{(w_x')}{(w_x)} = \Delta lg (w_x)_1$$

darstellen und durch die entsprechenden Ziffernwerthe ausdrücken, so dass die wiederholte Durchführung dieser Procedur unzweifelhaft zum Ziele zu führen vermag. Indem wir nun von der rechterhand dargestellten identischen Function ausgehen, vermeiden wir bei jeder wiederholten Procedur den rechnerisch complicirten Uebergang von den Zahlen der Lebenden zu den Zahlen der wahrscheinlichen Lebensdauer, wodurch der Process eine bedeutende Vereinfachung erfährt.

Die aus den Anomalien der ursprünglichen Tafel entspringenden Unregelmässigkeiten der abgeleiteten Werthe (w_x) fallen hier besonders auf, doch verschwinden dieselben meistens schon nach der zweiten Wiederholung der Procedur, solchermassen einem gesetzmässigen Verlaufe der Sterblichkeiten weichend.

Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln.

VIII.

In der vorigen Abhandlung haben wir in kurzen Umrissen den Gang einer Interpolationsmethode angedeutet, welche für den praktischen Gebrauch sich besser eignen dürfte, als die vorhergehende.

Um jedoch über das Wesen des hier anzuwendenden Processes näheren Aufschluss geben zu können, wollen wir die mathematische Bedeutung der sogenannten identischen Functionen einer näheren Untersuchung unterziehen und deren speciellen Einfluss auf den rechnungsmässigen Verlauf des Ausgleichungs-Calculs feststellen.

Das Princip, welches bei unserer von der exacten Methode abweichenden Lösungsart in Betracht kommt, besteht in dem durch die Grundform

$$\alpha) \qquad \frac{L'_x}{L_x} + \frac{w'_x}{w_x} = -\frac{1}{w_x}$$

ausgedrückten mathematischen Gesetze, durch welches die allgemeine Beziehung zwischen den Zahlen der Lebenden und den Zahlen der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit zur Darstellung gelangt. Diese Relation lässt sich jedoch auch folgendermassen ausdrücken

$$\beta) \qquad \frac{dlL_x}{dx} + \frac{dlw_x}{dx} = -\frac{1}{w_x}$$

wobei die vollständig identische Bedeutung dieser beiden Gleichungen nicht besonders hervorgehoben zu werden braucht, da selbe als selbstverständlich erscheint. Dieser Gesichtspunkt wird jedoch in dem Momente sich verändern, wo in obigen Gleichungen das Differentiale der Differenz weicht, d. h. sobald von den unendlich kleinen Zeitintervallen dx zu den endlichen Δx übergangen wird. In diesem Falle wird die differentielle Aenderung der Werthe in der Form α) sich in anderer Weise gestalten, als bei der Form β), wodurch die Identität der beiden Relationen, wie auch der in denselben vertretenen Functionen in Mitleidenschaft gezogen wird.

Während also unter Voraussetzung unendlich kleiner Intervalle die Identität dieser Functionen eine unzweifelhafte ist, schwindet dieselbe mit dem Wachsthum dieser Intervalle, auf diese Art eine stets grössere Ungleichheit dieser Functionen bewirkend. Dies lässt sich offenbar aus dem Umstande erklären, dass wohl die Differentiale

$$dlw_x = \frac{w'_x}{w_x} \text{ respective } dlL_x = \frac{L'_x}{L_x}$$

der Anforderung der Identität vollkommen entsprechen, doch beim Verlassen des mit denselben correspondirenden Gesichtspunktes unendlich kleiner

Intervalle, dem Principe der Infinitesimal-Rechnung nicht mehr Genüge leisten, so dass eine gleiche Identität der Werthe

$$\triangle l w_x \text{ und } \frac{\triangle w_x}{w_x} \text{ respective } \triangle l L_x \text{ und } \frac{\triangle L_x}{L_x}$$

folgerichtig nicht vorausgesetzt werden kann. Hierin liegt auch die Ursache, weshalb unsere bisherigen Bemühungen hinsichtlich der Ausgleichung mittelst Interpolation zu wenig befriedigendem Erfolge führten und in den diesbezüglichen Rechnungsprocessen sich eine auffallende Schwerfälligkeit äusserte.

In unserem Calcul, wo die Intervalle $\triangle x = 1$ als Voraussetzung gelten, wird dieser Umstand also eine besondere Bedeutung erlangen und sich in seinen Consequenzen dahin geltend machen, dass die in Betracht kommenden beiden Relationen

$$\gamma) \qquad \frac{\triangle L_x}{L_x} + \frac{\triangle w_x}{w_x} = -\frac{1}{w_x}$$

$$\delta) \qquad \triangle l L_x + \triangle l w_x = -\frac{1}{w_x}$$

verschiedene Resultate liefern werden, d. h. jede dieser beiden Gleichungen wird von vornherein eine gewisse natürliche Abweichung von dem zum Ausdrucke gelangenden Gesetze aufweisen, u. zw. derart, dass die natürlichen Abweichungen der ersteren Gleichung im entgegengesetzten Sinne zu denjenigen der letzteren Gleichung sich äussern werden, daher im Mittel dieser natürlichen Abweichungen die thatsächliche Ausgleichung stattfinden dürfte.

Wir haben bisher dieser natürlichen Abweichung dadurch Rechnung getragen, dass wir jede der beiden Relationen auf eine andere Sterbetafel zurückführten, so zwar, dass die erstere der ursprünglich gegebenen, die zweite einer aus derselben abgeleiteten Sterbetafel entsprach. Das Bestreben, im Mittel der beziehungsweisen Abweichungen dieser Relationen die Basis der durchzuführenden Ausgleichung zu schaffen, wurde bereits in der ziffermässigen Entwicklung der Tabelle V dargethan, indem der ganze Entwicklungsgang der hier dargestellten Methode auf diese Eigenschaft der Grundform begründet wurde. Allein der mit derselben verbundene, ungemein schwerfällige Process der Ausgleichung ist es gerade, der eine gründliche Untersuchung des Verhältnisses der beiden obigen Relationen zu einander nothwendig erscheinen lässt.

In welcher Weise diese merkwürdige Thatsache hinsichtlich der Beschaffenheit der sogenannten identischen Functionen sich geltend macht, zeigt sich deutlich aus den nummerischen Ergebnissen der in der vorigen Abhandlung dargestellten Relationen.

Die Vergleichung der eigentlich im Wesen analogen, jedoch nichts weniger als übereinstimmenden Schlussresultate der Tabellen VI und VII, deren Ableitung aus den identischen Functionen

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{(w'_x)}{(w_x)} = \triangle lg(w_x)_1 \text{ und } -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{(w'_x + 1)}{(w_x)} = \triangle lg(L_x)_1$$

hier ziffermässig durchgeführt ist, gibt hierüber einen möglichst klaren Aufschluss.

Tabelle VII.

Alter Jahre	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	–	0·0032827	5·0000000	100000	17·26066	[illegible]	[illegible]
11	–	0·0033189	4·9967175	99.247	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12		0·0032330	4·9933684	98.485	[illegible]	[illegible]	[illegible]
13	–	0·0031449	4·9901354	97.754	[illegible]	[illegible]	[illegible]
14	–	0·0032532	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
15	–	0·0031529	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
16	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
17	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
18	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
19		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
20	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
21	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
22	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
23		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
24	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
25		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
26		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
27		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
28	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
29		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
30		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
31	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
32		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
33	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
34	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
35	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
36		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
37	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
38		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
39	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
40	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
41	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
42	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
43		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
44	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
45	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
46	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
47	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
48	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
49		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
50		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
51	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
52	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
53	–	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
54		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Alter Jahre	$-\frac{1}{\mu}\cdot\frac{(w'_x)+1}{(w_x)}=\triangle lg(L_x)_1$	$lg(L_x)_1$	$(L_x)_1$	$(w_x)_1$	$lg(w_x)_1$	$-\triangle lg(w_x)_1$
55	— 0·0103826	4·7973959	62.719	15·91448	1·2017925	0·0171144
56	— 0,0106317	4·7870133	61.237	15·29953	1·1846781	0·0179908
57	— 0·0110775	4·7763816	59.756	14·67869	1·1666873	0·0187664
58	— 0·0127859	4·7653041	58.251	14·05792	1·1479209	0·0182972
59	— 0·0127413	4·7525182	56.561	13·47794	1·1296237	0·0197343
60	— 0·0140844	4·7397769	54.926	12·87922	1·1098894	0·0198522
61	— 0·0151755	4·7256925	53.173	12·30375	1·0900372	0·0203219
62	— 0·0163669	4·7105170	51.347	11·74128	1·0697153	0·0207996
63	— 0·0176883	4·6941501	49.448	11·19221	1·0489157	0·0212622
64	— 0·0190999	4·6764618	47.475	10·65745	1·0276535	0·0217602
65	— 0·0206786	4·6573619	45.432	10·13662	1·0058933	0·0222240
66	— 0·0226465	4·6366833	43.319	9·63095	0·9836693	0·0224143
67	— 0·0236944	4·6140368	41.118	9·14650	0·9612550	0·0237665
68	— 0·0264996	4·5903424	38.934	8·65941	0·9374885	0·0234506
69	— 0·0284010	4·5638428	36.631	8·20423	0·9140379	0·0242504
70	— 0·0307482	4·5354418	34.312	7·75867	0·8897875	0·0248070
71	— 0·0338614	4·5046936	31.966	7·32792	0·8649805	0·0247415
72	— 0·0376135	4·4708322	29.569	6·92212	0·8402390	0·0240977
73	— 0·0356557	4·4332187	27.116	6·54849	0·8161413	0·0201953
74	— 0·0438901	4·3975630	24.978	6·10866	0·7859460	0·0256521
75	— 0·0458008	4·3536729	22.577	5·75830	0·7602939	0·0280020
76	— 0·0498063	4·3078721	20.318	5·39873	0·7322919	0·0285903
77	— 0·0540613	4·2580658	18.116	5·05477	0·7037016	0·0293165
78	— 0·0586416	4·2040045	15.996	4·72482	0·6743851	0·0301532
79	— 0·0635600	4·1453629	13.975	4·40790	0·6442319	0·0311752
80	— 0·0691509	4·0818029	12.073	4·10258	0·6130567	0·0320572
81	— 0·0745432	4·0126520	10.296	3·81065	0·5809995	0·0339407
82	— 0·0812708	3·9381088	8.672	3·52419	0·5470588	0·0352567
83	— 0·0879848	3·8568380	7.192	3·24939	0·5118021	0·0378175
84	— 0·0958254	3·7688532	5.873	2·97910	0·4740856	0·0403787
85	— 0.1047913	3·6730278	4.710	2·71461	0·4337069	0·0435707
86	— 0·1152092	3·5682365	3.700	2·45548	0·3901362	0·0449273
87	— 0·1276661	3·4530273	2.838	2·21416	0·3452089	0·0543047
88	— 0·1424302	3·3253612	2.115	1·95391	0·2909042	0·0573611
89	— 0·1608895	3·1829310	1.524	1·71216	0·2335431	0·0632960
90	— 0·1832470	3·0220415	1.052	1·47995	0·1702471	0·0710776
91	— 0·2106870	2·8387945	690	1·25652	0·0991695	0·0821362
92	— 0·2518072	2·6281075	425	1·04000	0·0170333	0·0839815
93	— 0·2925202	2·3763003	238	0·85714	0·9330518—1	0·0968100
94	— 0·3578869	2·0837801	121	0·68587	0·8362418—1	0·0833947
95	— 0·4280065	1·7258932	53	0·56604	0·7528471—1	0·0538771
96	— 0·4724514	1·2978867	20	0·50000	0·6989700—1	0·0665285
97	— 0·4649911	0·8254353	6·7	0·49254	0·6924415—1	0·0546572
98	— 0·3604442	0·3604442	2·3	0·43429	0·6377843—1	
99		0·0000000	1			

Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln.

IX.

Hinsichtlich der Beschaffenheit der sogenannten identischen **Functionen** lässt sich also für endliche Intervalle eine mit diesen im geraden **Verhältnisse** wachsende Divergenz der homogenen Werthe constatiren, welche **den Ausgleichungs**-Process insoferne zu erschweren geeignet ist, als **man es hier nicht** wie bei unendlich kleinen Intervallen mit einer einzigen Flucht **von Punkten** der Absterbecurve zu thun hat, sondern mit einer Reihe **doppelter Grenzwerthe**, zwischen denen die eigentlichen, diese Flucht **kennzeichnenden Werthe** sich befinden.

Mit Rücksicht auf die in den vorigen Abhandlungen **dargestellten Formen** ergeben sich daher zwei Relationen, welche diejenigen **Grenzen bezeichnen**, innerhalb welcher jene sogenannte Identität der **Functionen sich bewegt**, auf deren Grundlage der Ausgleichungs-Process sich **vollzieht**.

Diese Relationen lauten folgendermassen:

$$\varepsilon) \qquad \Delta l w_x + \Delta l L_x = -\frac{b}{w_x} = -\frac{1}{(w_x)}$$

$$\xi) \qquad \frac{\Delta w_x}{w_x} + \frac{\Delta L_x}{L_x} = -\frac{b_1}{w_x} = -\frac{1}{(w_x)_1}$$

in denen also $\frac{w_x}{b} = (w_x)$ und $\frac{w_x}{b_1} = (w_x)_1$ bedeutet, wobei in b und b_1 die Anomalien der auszugleichenden Tafel zum Ausdrucke gelangen.

Setzt man nun obigen Ausführungen gemäss voraus, dass im **Mittel der** entsprechenden Grenzwerthe jene die Ausgleichung bedingenden **Werthe** enthalten sind, so gelangt man zu folgender Relation

$$\varphi) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta w_x}{w_x} + \Delta l w_x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta L_x}{L_x} + \Delta l L_x\right) = -\frac{1}{w_x}$$

woraus die Bedingung

$$\vartheta) \qquad \frac{1}{2(w_x)} + \frac{1}{2(w_x)_1} = \frac{1}{w_x}$$

hervorgeht. Diese Formen liefern nun die Handhabe, um der durch **grössere Intervalle** hervorgebrachten Divergenz zwischen den Werthen der **sogenannten identischen Functionen** in geeigneter Weise Rechnung zu tragen. Um **jedoch von diesen Formen** rechnungsmässigen Gebrauch machen zu können, **bedürfen wir der Feststellung** jener Beziehung, welche zwischen den **sogenannten identischen Functionen** bei beliebig grossen Intervallen besteht, da nur **auf Grundlage** dieser Beziehung der Relation φ) Genüge geleistet zu werden **vermag**. **Die Frage**, in welcher Weise derselben durch eine allgemein giltige **Function entsprochen werden** solle, erscheint aber umso wichtiger, als der **Uebergang von den Zahlen** der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten **zu den Zahlen**

der Lebenden nur auf diesem Wege bewerkstelligt werden kann, so dass von der Ermittlung einer solchen functionellen Beziehung das Wesen der Ausgleichung der Sterbetafeln in dieser einfacheren Form überhaupt abhängt. Treten wir daher der Lösung dieser Frage näher und untersuchen wir jene Umstände, welche diesbezüglich in Betracht zu ziehen sind.

Die unendliche Kleinheit der Differential-Intervalle wird — sobald dieselben in das Stadium von Differenz-Intervallen treten — offenbar einer endlichen Beschaffenheit derselben weichen, doch kann das Ausmaass der in Betracht kommenden Differenz-Werthe auch dann blos von besonderer Geringfügigkeit sein, da eine ansehnliche Grössenbeschaffenheit derselben die Continuität des Verlaufes der in Betracht kommenden Wahrscheinlichkeiten gefährden würde. Dies ist aus dem immerhin sehr geringen Unterschiede ersichtlich, welcher thatsächlich zwischen den beziehungsweisen homogenen Werthen bei Altersintervallen von ganzen Jahren besteht.

Bei der Ausgleichung üben jedoch diese, wenn auch geringfügigen Werthunterschiede einen nennenswerthen Einfluss aus, da sie in unserer Rechnung Theile von Integrations-Elementen bilden, deren Empfindlichkeit mit Rücksicht auf ihr Wesen ausser Frage steht. Wenn also von einer solchen allgemein giltigen Beziehung die Rede ist, so handelt es sich darum, zwei in ihrem Werthe nur wenig abweichende Functionen durch eine allen Umständen Genüge leistende Relation zu verbinden, d. h. den Unterschied der beziehungsweisen Werthe in eine äusserst genau construirte functionelle Form zu kleiden.

Diesem Zwecke wird nun auf folgende Weise entsprochen werden können: Es besteht nämlich eine von uns construirte mathematische Form, deren wir uns zu gleichem Zwecke bei einer anderen Gelegenheit bedienten*) und die in ihrem Wesen als identische Gleichung gelten kann, sobald die in derselben in Rechnung gelangenden Werthe die Zahl 1 nur um Geringes übersteigen. Diese Form lautet:

$$\alpha = e^{\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)} \quad \text{worin } \alpha = 1 + \delta$$

anzunehmen ist. Dieselbe ist geeignet, auch bezüglich unserer Frage zum Ziele zu führen, sobald für α der entsprechende functionelle Begriff, welcher der gegebenen Anforderung Genüge leistet, substituirt wird.

Setzen wir also in diese Form den die Zahl 1 nur wenig übersteigenden Werth

$$\alpha = \left(\frac{w_x}{w_{x+1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

so erhalten wir

$$\left(\frac{w_x}{w_{x+1}}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{w_x}{w_{x+1}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{w_{x+1}}{w_x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

*) Siehe VIII. Lieferung dieses Werkes, Seite 18.

und demzufolge

$$\frac{lw_x - lw_{x+1}}{w_x - w_{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{w_x \,.\, w_{x+1}}}$$

und schliesslich

$$\frac{lw_x - lw_{x+1}}{w_x - w_{x+1}} = \frac{1}{w_x} \,.\, \left(\frac{w_x}{w_{x+1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Setzt man nun hierin $lw_x - lw_{x+1} = \Delta lw_x$ und $w_x - w_{x+1} = \Delta w_x$, so ergibt sich die Relation

$$\frac{\Delta lw_x}{\Delta w_x} = \frac{1}{w_x} \,.\, e^{\frac{1}{2}(lw_x - lw_{x+1})}$$

welche endgiltig die Form

$$e^{\frac{1}{2}\Delta lw_x} \,.\, \Delta lw_x = \frac{\Delta w_x}{w_x}$$

annimmt. In der Weise gelangt auch jene die Zahlen der Lebenden betreffende Form zur Darstellung, u. zw.

$$e^{\frac{1}{2}\Delta lL_x} \,.\, \Delta lL_x = \frac{\Delta L_x}{L_x}$$

Für die hohen Altersclassen, wo die Differenzen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Werthen von L_x, beziehungsweise von w_x sich grösser gestalten, dürfte auch der Quotient derselben die Zahl 1 in bedeutenderem Masse übersteigen, so dass diese Formen eine entsprechende Modification erheischen werden, sobald dieselben der Anforderung Genüge leisten sollen.

Diese functionelle Beziehung lässt sich übrigens ganz präcis darstellen, sobald die sogenannten identischen Functionen auf ihren eigentlichen Ursprung zurückgeführt werden. Es ist nämlich

$$\frac{\Delta w_x}{w_x} = \frac{w_{x+1} - w_x}{w_x} \text{ gleichwie } \Delta lw_x = lw_{x+1} - lw_x$$

demgemäss ergibt sich also

$$1 + \frac{\Delta w_x}{w_x} = \frac{w_{x+1}}{w_x} \text{ und } \Delta lw_x = l\,\frac{w_{x+1}}{w_x}$$

und schliesslich die zwischen den sogenannten identischen Functionen allgemein giltigen Beziehungen

$$\text{x)} \quad \Delta lw_x = l\left(1 + \frac{\Delta w_x}{w_x}\right) \text{ und analog } \lambda) \quad \Delta lL_x = l\left(1 + \frac{\Delta L_x}{L_x}\right)$$

durch deren Zusammenziehung sich nun die interessante Form

$$e^{\Delta lw_x + \Delta lL_x} = \left(1 + \frac{\Delta w_x}{w_x}\right)\left(1 + \frac{\Delta L_x}{L_x}\right)$$

ergibt, welche für alle Alter den gegebenen Anforderungen entspricht und

mit Rücksicht auf die Formen ε) und ζ) die beziehungsweisen Relationen

$$e^{-\frac{1}{(w_x)}} = \left(1 + \frac{\triangle w_x}{w_x}\right)\left(1 - \frac{1}{(w_x)_1} - \frac{\triangle w_x}{w_x}\right)$$

$$e^{-\frac{1}{(w_x)}} = \left(1 - \frac{1}{(w_x)_1} - \frac{\triangle L_x}{L_x}\right)\left(1 + \frac{\triangle L_x}{L_x}\right)$$

liefert. Hieraus ergeben sich nun zwei Gleichungen zweiten Grades, deren Wurzeln gegenseitig miteinander correspondiren und in ihrem Producte die Gleichung

$$\nu)\qquad \frac{\triangle L_x}{L_x} \cdot \frac{\triangle w_x}{w_x} = e^{-\frac{1}{(w_x)}} + \frac{1}{(w_x)_1} - 1$$

ergeben, während deren Summe den der Relation ζ) entsprechenden Ausdruck

$$\xi)\qquad \frac{\triangle L_x}{L_x} + \frac{\triangle w_x}{w_x} = -\frac{1}{(w_x)_1}$$

liefert. Es ergibt sich nämlich

$$\varsigma)\quad \frac{\triangle w_x}{w_x} = e^{\triangle l w_x} - 1 = -\frac{1}{2(w_x)_1} + \sqrt{\left[1 - \frac{1}{2(w_x)_1}\right]^2 - e^{-\frac{1}{(w_x)}}}$$

$$\text{und}\quad \frac{\triangle L_x}{L_x} = e^{\triangle l L_x} - 1 = -\frac{1}{2(w_x)_1} - \sqrt{\left[1 - \frac{1}{2(w_x)_1}\right]^2 - e^{-\frac{1}{(w_x)}}}$$

woraus sich unter Bezugnahme auf die Relation ε) als Conclusion die Gleichung

$$\sigma)\qquad \tfrac{1}{4}\left(\frac{\triangle w_x}{w_x} - \frac{\triangle L_x}{L_x}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{2(w_x)_1}\right)^2 - e^{-\frac{1}{(w_x)}}$$

darstellen lässt. Diese Form liefert nun die Handhabe, um die Gesetzmässigkeit in der Anordnung der Sterbetafel entsprechend bewerkstelligen zu können, denn es lässt sich aus der Beschaffenheit derselben der indirecte Schluss ziehen, dass (w_x) und $(w_x)_1$ in einem mathematisch bedingten Verhältnisse zu einander stehen müssen, was mit Rücksicht auf die Gleichung ϑ)

$$\frac{1}{2(w_x)} + \frac{1}{2(w_x)_1} = \frac{1}{w_x}$$

von besonderer Bedeutung für die Lösung unserer Aufgabe sich erweist.

Auf diesem Wege gelangen wir nämlich zu einer Gleichung, die den Anforderungen unserer Rechnung vollständig Genüge zu leisten vermag, nachdem durch dieselbe sowohl der Regel I, als auch der Regel II, welche unter Zugrundelegung des hier angewendeten Principes in den Ausdrücken

$$\text{I.}\ \left(\frac{\triangle w_x}{w_x} + \triangle l\, w_x + \frac{\triangle L_x}{L_x} + \triangle l\, L_x\right)\frac{w_x}{2} = 1$$

$$\text{und II.}\ \left[\frac{\frac{\triangle w_x}{w_x} + \triangle l\, w_x}{\frac{\triangle L_x}{L_x} + \triangle l\, L_x} + 1\right]\left(\frac{\triangle w_x + w_x \cdot \triangle l\, w_x}{2} + 1\right) = 1$$

zur Darstellung gelangen, nach jeder Richtung hin entsprochen wird.

Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln.

X.

Mit Rücksicht auf jene in der vorigen Abhandlung gemachten Ausführungen hängt die Lösung unserer Aufgabe nur noch von der Frage ab, in welcher Weise der Bedingung ϑ) allgemein Genüge geleistet werden könne, weshalb wir nunmehr diesem Umstande unsere Aufmerksamkeit zuwenden werden. Behufs näherer Untersuchung des Wesens dieser Bedingung wollen wir die Werthe

$$\frac{1}{(w_x)} = \frac{b}{w_x} \text{ und } \frac{1}{(w_x)_1} = \frac{b_1}{w_x}$$

in Betracht ziehen und erhalten durch Summirung derselben

$$\frac{1}{(w_x)} + \frac{1}{(w_x)_1} = \frac{b}{w_x} + \frac{b_1}{w_x} = \frac{b + b_1}{w_x}$$

und demzufolge

$$\rho) \qquad \frac{b}{(b + b_1)\,w_x} + \frac{b_1}{(b + b_1)\,w_x} = \frac{1}{w_x}$$

als eine mit unserer Bedingung correspondirende Relation, sobald in dieser

$$\sigma) \qquad \frac{2\,b}{b + b_1} = b \text{ resp. } \frac{2\,b_1}{b + b_1} = b_1$$

gesetzt wird, wobei gleichzeitig der Werth von w_x eine dem neuen Verhältnisse entsprechende allgemeine Beschaffenheit annimmt.

In Consequenz dessen wird die Bedingung ϑ) entsprechend den Anforderungen der mathematischen Ausgleichung der bezüglichen Werthe die Form

$$\frac{b}{2\,w_x} + \frac{b_1}{2\,w_x} = \frac{1}{w_x}$$

annehmen, worin also $b + b_1 = 2$ ist, während w_x den bereits ausgeglichenen Werth der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit darstellt, so dass die bekannte grundlegende Bedingung ρ) sich ebenfalls in diesem Sinne verändern wird, indem selbe dem ausgeglichenen Werthe w_x Rechnung trägt und sich daher folgendermassen gestaltet:

$$\lambda) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta w_x}{w_x} + \Delta l\,w_x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta L_x}{L_x} + \Delta l\,L_x\right) = -\frac{1}{w_x}$$

Der neue ausgeglichene Werth der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten wird also in seiner Beschaffenheit sich derart gestalten, dass jene Relationen, aus denen diese grundlegende Bedingung zusammengesetzt ist, nämlich

$$\psi) \qquad \frac{\Delta w_x}{w_x} + \frac{\Delta L_x}{L_x} = -\frac{b_1}{w_x} \text{ und } \Delta l\,w_x + \Delta l\,L_x = -\frac{b}{w_x}$$

in gleicher Weise der rechnungsmässigen Anforderung Genüge leisten müssen, so dass thatsächlich nach dieser Richtung hin den Ansprüchen einer vollständigen Lösung dieser Frage genügt wird.

Nachdem nun auf diese Weise der Bedingung ϑ) Genüge geleistet worden ist, so werden die Relationen ς) entsprechend zur Anwendung gelangen können, und zwar werden mit Hilfe derselben die einzelnen Functionen der ausgeglichenen Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten sich feststellen lassen.

Entsprechend den Relationen ψ) ergeben sich nämlich die Werthe

$$\frac{b}{w_x} = \frac{1}{(w_x)} \text{ und } \frac{b_1}{w_x} = \frac{1}{(w_x)_1}$$

welche in die Relationen ς) eingesetzt, die Functionen der ausgeglichenen Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten, sowie jene der Zahlen der Lebenden

$$\frac{\Delta w_x}{w_x}, \quad \frac{\Delta L_x}{L_x}, \quad \Delta l\, w_x \text{ und } \Delta l\, L_x$$

liefern, aus denen sodann die eigentlichen gesuchten Werthe w_x und L_x ermittelt werden. Demgemäss werden die Relationen ς) mit Rücksicht auf die veränderte Beschaffenheit der Werthe der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten folgende Form annehmen:*)

$$\text{x)} \quad \begin{aligned} \frac{\Delta w_x}{w_x} &= e^{\Delta l w_x} - 1 = -\frac{1}{2(w_x)_1} - \sqrt{\left[1 - \frac{1}{2(w_x)_1}\right]^2 - e^{-\frac{1}{(w_x)}}} \\ \frac{\Delta L_x}{L_x} &= e^{\Delta l L_x} - 1 = -\frac{1}{2(w_x)_1} + \sqrt{\left[1 - \frac{1}{2(w_x)_1}\right]^2 - e^{-\frac{1}{(w_x)}}} \end{aligned}$$

Wir erhalten auf diese Weise für die einzelnen Alter die Functionen der ausgeglichenen Werthe von w_x und L_x; u. zw. aus $\Delta l L_x$ die Werthe $l L_x$ und schliesslich diejenigen von L_x, sowie aus $\Delta l w_x$ die Werthe $l w_x$ und w_x als Resultat.

Der Process der Ausgleichung vollzieht sich also in folgender einfacher Weise: Aus den ursprünglichen Zahlen der Lebenden und der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten werden die erforderlichen Functionen derselben ermittelt und entsprechend den Relationen ε) und ξ) mathematisch combinirt, so dass die ursprünglichen Werthe von b und b_1 resultiren. Aus diesen Werthen werden sodann gemäss den Relationen τ) die neuen Werthe von b und b_1 dargestellt und obigen Ausführungen gemäss in Rechnung gebracht. Um jedoch zu einem den Anforderungen der Rechnung entsprechenden Resultate zu gelangen, muss auch der Umstand berücksichtigt werden, dass der Substitutionswerth für w_x, dessen Functionen (w_x), und (w_x) in den Relationen x) in Rechnung gelangen, dem wahren Werthe möglichst nahe komme, was für die Beschaffenheit des Resultates von besonderer Wichtigkeit ist.

Um nun diesen Substitutionswerth zu ermitteln, wird neben dem hier in Betracht kommenden arithmetischen Mittel der sogenannten identischen Functionen auch das geometrische Mittel derselben herangezogen und auf diese Weise eine neue Relation für die genaue Feststellung des hier obwaltenden mathematischen Verhältnisses geschaffen werden.

Nachfolgende Tabelle stellt die rechnungsmässige Ableitung der Werthe b und b_1 dar, auf deren Grundlage die Entwicklung der ferneren in diesem Calcul in Betracht kommenden Werthe erfolgt.

*) In der vorigen Abhandlung sind irrthümlich die Zeichen vor der Wurzelgrösse verwechselt.

Tabelle VIII.

Alter Jahre	$\frac{\Delta w_x}{w_x}$	$\frac{\Delta L_x}{L_x}$	$\frac{\Delta w_x}{w_x} + \frac{\Delta L_x}{L_x} = -\frac{b_1}{w_x}$ $\frac{b_1}{w_x} = \frac{1}{(w_x)_1}$	b_1	$\Delta l w_x + \Delta l L_x = -\frac{b}{w_x}$ *) $\frac{b}{w_x} = \frac{1}{(w_x)}$	b **)
10	—0·0141705	—0·0067600	0·0209305	1·001784	0·0210548	1·007735
11	—0·0144290	—0·0067859	0·0212149	1·001008	0·0213429	1·007047
12	—0·0146936	—0·0068120	0·0215056	1·000083	0·0216379	1·006233
13	—0·0149643	—0·0068485	0·0218128	0·999464	0·0219494	1·005723
14	—0·0152400	—0·0068957	0·0221357	0·999082	0·0222771	1·005461
15	—0·0155220	—0·0069436	0·0224656	0·998519	0·0226114	1·005000
16	—0·0158106	—0·0070026	0·0228132	0·998230	0·0229640	1·004825
17	—0·0161090	—0·0070624	0·0231714	0·997873	0·0233280	1·004615
18	—0·0164132	—0·0071338	0·0235470	0·997713	0·0237086	1·004559
19	—0·0167361	—0·0072063	0·0239424	0·997815	0·0241102	1·004807
20	—0·0170588	—0·0072908	0·0243496	0·997802	0·0245239	1·004888
21	—0·0173951	—0·0073768	0·0247719	0·997791	0·0249522	1·005052
22	—0·0177460	—0·0074642	0·0252102	0·997781	0·0253975	1·005194
23	—0·0181006	—0·0075642	0·0256648	0·997748	0·0258592	1·005346
24	—0·0184720	—0·0076660	0·0261380	0·997752	0·0263404	1·005478
25	—0·0188591	—0·0077698	0·0266289	0·997713	0·0268394	1·005600
26	—0·0192537	—0·0078867	0·0271404	0·997700	0·0273591	1·005740
27	—0·0196666	—0·0080060	0·0276326	0·997679	0·0279011	1·005917
28	—0·0200872	—0·0081390	0·0282262	0·997624	0·0284639	1·006024
29	—0·0205299	—0·0082747	0·0288046	0·997617	0·0290531	1·006223
30	—0·0209817	—0·0084249	0·0294066	0·997557	0·0296649	1·006320
31	—0·0214582	—0·0085783	0·0300365	0·997547	0·0303073	1·006540
32	—0·0219469	—0·0087468	0·0306937	0·997499	0·0309767	1·006695
33	—0·0224617	—0·0089191	0·0313808	0·997446	0·0316767	1·006850
34	—0·0230051	—0·0090954	0·0321005	0·997405	0·0324112	1·007058
35	—0·0234938	—0·0092879	0·0327817	0·995139	0·0331052	1·004958
36	—0·0240243	—0·0094850	0·0335093	0·993327	0·0338480	1·005415
37	—0·0246734	—0·0096868	0·0343602	0·994080	0·0347168	1·004396
38	—0·0253621	—0·0099062	0·0352683	0·995177	0·0356449	1·006268
39	—0·0260897	—0·0101311	0·0362208	0·996133	0·0366187	1·007075
40	—0·0268651	—0·0103620	0·0372271	0·997097	0·0376482	1·008375
41	—0·0276405	—0·0106118	0·0382523	0·997032	0·0386986	1·008665
42	—0·0284436	—0·0108944	0·0393380	0·996989	0·0398101	1·008954
43	—0·0292321	—0·0112507	0·0404828	0·996820	0·0409826	1·009126
44	—0·0399990	—0·0116974	0·0416964	0·996690	0·0422244	1·009310
45	—0·0307659	—0·0122120	0·0429779	0·996504	0·0435361	1·009446
46	—0·0314919	—0·0128390	0·0443309	0·996252	0·0449207	1·009506
47	—0·0322435	—0·0135157	0·0457592	0·995965	0·0463824	1·009533
48	—0·0330096	—0·0142596	0·0472692	0·995658	0·0479288	1·009550
49	—0·0338046	—0·0150609	0·0488655	0·995305	0·0495648	1·009548
50	—0·0346174	—0·0159386	0·0505560	0·994928	0·0512977	1·009524
51	—0·0354344	—0·0168984	0·0523328	0·994243	0·0531202	1·009202
52	—0·0363073	—0·0179472	0·0542545	0·994228	0·0550930	1·009594
53	—0·0371610	—0·0190928	0·0562538	0·993438	0·0571462	1·009198
54	—0·0380765	—0·0203133	0·0583898	0·992840	0·0593429	1·009047

*) **) Laut Tabelle VI resp. IV.

Alter Jahre	$\frac{\triangle w_x}{w_x}$	$\frac{\triangle L_x}{L_x}$	$\frac{\triangle w_x}{w_x}+\frac{\triangle L_x}{L_x}=-\frac{b}{w_x}$ $\frac{b_1}{w_x}=\frac{1}{(w_x)_1}$	b_1	$\triangle l w_x+\triangle l L_x=-\frac{b}{w_x}$ $\frac{b}{w_x}=\frac{1}{(w_x)}$	b
55	—0·0390543	—0·0216641	0·0607184	0·993124	0·0617397	1·009827
56	—0·0399499	—0·0231262	0·0630761	0·991395	0·0641673	1·008543
57	—0·0409668	—0·0246793	0·0656461	0·990569	0·0668192	1·008270
58	—0·0420493	—0·0263856	0·0684349	0·990346	0·0696986	1·008633
59	—0·0430164	—0·0282465	0·0712629	0·987907	0·0726222	1·006750
60	—0·0440922	—0·0303361	0·0744283	0·987405	0·0758999	1·006928
61	—0·0451435	—0·0326117	0·0777552	0·986058	0·0793491	1·006271
62	—0·0461844	—0·0351204	0·0813048	0·984526	0·0830365	1·005496
63	—0·0472535	—0·0378398	0·0850933	0·982814	0·0869811	1·004617
64	—0·0483113	—0·0408256	0·0891369	0·980868	0·0911994	1·003563
65	—0·0493753	—0·0440818	0·0934571	0·978724	0·0957192	1·002413
66	—0·0504542	—0·0476137	0·0980679	0·976302	0·1005561	1·001073
67	—0·0514542	—0·0514742	0·1029284	0·972990	0·1056718	0·998923
68	—0·0526885	—0·0556299	0·1083184	0·971255	0·1113640	0·998541
69	—0·0537989	—0·0600871	0·1138860	0·967374	0·1172681	0·996103
70	—0·0549778	—0·0649329	0·1199107	0·963752	0·1236838	0·994078
71	—0·0562078	—0·0701582	0·1263660	0·959798	0·1305900	0·991881
72	—0·0573038	—0·0758048	0·1331086	0·954184	0·1378433	0·988125
73	—0·0584906	—0·0818836	0·1403742	0·948604	0·1457016	0·984605
74	—0·0601579	—0·0884678	0·1486257	0·945619	0·1546723	0·984090
75	—0·0615302	—0·0955602	0·1570904	0·939348	0·1639439	0·980330
76	—0·0631480	—0·1031793	0·1663273	0·933386	0·1741291	0·977167
77	—0·0647567	—0·1114692	0·1762259	0·926485	0·1851346	0·973321
78	—0·0664400	—0·1204445	0·1868845	0·918896	0·1970886	0·969069
79	—0·0683450	—0·1300648	0·1984098	0·910749	0·2101293	0·964544
80	—0·0704942	—0·1404063	0·2109005	0·901920	0·2243977	0·959642
81	—0·0730280	—0·1514356	0·2244636	0·892254	0·2400406	0·954171
82	—0·0764718	—0·1631938	0·2396656	0·883110	0·2577164	0·949623
83	—0·0803942	—0·1759122	0·2563064	0·872206	0·2772883	0·943605
84	—0·0854733	—0·1896785	0·2751518	0·861060	0·2996727	0·937770
85	—0·0914037	—0·2050951	0·2964988	0·848556	0·3253870	0·931232
86	—0·0984298	—0·2224803	0·3209101	0·834472	0·3552637	0·923803
87	—0·1068812	—0·2422343	0·3491155	0·818459	0·3904162	0·915284
88	—0·1164432	0·2652740	0·3817172	0·799244	0·4320576	0·904647
89	—0·1275135	—0·2923820	0·4198955	0·776807	0·4822590	0·892179
90	—0·1408401	—0·3237302	0·4645703	0·749863	0·5429630	0·876396
91	—0·1562408	—0·3609866	0·5172274	0·717275	0·6177180	0·856633
92	—0·1751133	—0·4052632	0·5803765	0·679099	0·7121455	0·833283
93	—0·1891732	—0·4572272	0·6464004	0·623907	0·8207651	0·792205
94	—0·2103346	0·5163043	0·7266389	0·568675	0·9624452	0·753221
95	—0·2127993	—0·5842696	0·7970689	0·492589	1·1170165	0·690300
96	—0·2135090	—0·6486488	0·8621578	0·419431	1·2861422	0·624256
97	—0·3466102	—0·6923076	1·0389178	0·397534	1·6042364	0·613818
98	—0·6000000	—0·7500000	1·3500000	0·337500	2·3025851	0·575646

Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln.

XI.

Die Ermittlung des geometrischen Mittels zum Zwecke der Feststellung der ersten Näherungswerthe wird sich jedoch nur dann als nothwendig erweisen, wenn die Ausgleichung auf Grundlage von ganz unzureichenden Ursprungszahlen durchzuführen ist. In unserem Falle, wo wir es mit einer durch die gegebene Tafel zumindest geregelten Zahlenabstufung zu thun haben, darf die Anwendung der vorhandenen Werthe dem Zwecke der Näherung als vollständig entsprechend betrachtet werden. Insbesondere jene Werthe, welche den Altersclassen bis etwa zum 70. Lebensjahre entsprechen, tragen dieser Anforderung mehr als hinreichend Rechnung, da selbe blos mässige Anomalien aufweisen. Jedenfalls werden mit Rücksicht auf die gegebene mathematische Beschaffenheit der Resultatsform auch die übrigen Werthe diesem Zwecke Genüge zu leisten vermögen.

Die Beschaffenheit der Resultatsform lässt es aber auch zu, selbst im Falle einer grösseren Unregelmässigkeit der Abstufung jenes Hilfsmittels sich zu entschlagen, indem jener dem jüngsten Alter entsprechende Werth der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit zur Ermittlung der übrigen Werthe die Handhabe zu bieten geeignet ist.

Durch Anwendung der bekannten Relation

$$\pi)\qquad w_{x+1} = w_x\left(1 + \frac{\Delta w_x}{w_x}\right)$$

ist man nämlich in der Lage, alle Werthe der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten aus den vorhergehenden Werthen derselben zu bestimmen, so dass der dem jüngsten Alter entsprechende Werth allein hinreicht, um die weiteren Werthe festzustellen.

Wird also für das jüngste Alter, welches hier das 10. Lebensjahr ist, der gleiche Werth $w_{10} = w_{10}$ für die Rechnung als grundlegend angenommen, so ergibt sich aus der ersten der beiden Formen*)

$$\varkappa)\qquad \begin{aligned} \frac{\Delta w_x}{w_x} &= e^{-l w_x} - 1 = -\frac{1}{2(w_x)_1} + \sqrt{\left[1 - \frac{1}{2(w_x)_1}\right]^2 - e^{-\frac{1}{(w_x)}}} \\ \frac{\Delta L_x}{L_x} &= e^{-l L_x} - 1 = -\frac{1}{2(w_x)_1} - \sqrt{\left[1 - \frac{1}{2(w_x)_1}\right]^2 - e^{-\frac{1}{(w_x)}}} \end{aligned}$$

der Werth $\frac{\Delta w_{10}}{w_{10}}$, welcher in die obige Form π) substituirt, den Werth w_{11} liefert, durch dessen weitere Anwendung wieder der Werth $\frac{\Delta w_{11}}{w_{11}}$ und w_{12} ermittelt wird u. s. f. Auf diese Weise ist es möglich, nach obigen Formen

*) Der Wurzelwerth wird in einem bestimmten Alter gleich Null und wechselt in Folge dessen beim Passiren dieses Werthes sein Zeichen, womit die Bedeutung des Doppelzeichens ihre Erklärung findet.

sämmtliche ausgeglichene Zahlen der gegebenen Tafel darzustellen. Zur Controle für die Richtigkeit der ermittelten Werthe kann die zweite dieser beiden Formen angewendet werden, indem auf Grundlage der Relation

$$\chi) \qquad L_{x+1} = L_x\left(1 + \frac{\triangle L_x}{L_x}\right)$$

gleichfalls sämmtliche Werthe der Lebenden L_x dargestellt und in der bekannten Weise die Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten hieraus ermittelt werden, welche durch Vergleichung mit jenen aus der ersteren Form berechneten, analogen Werthen die Beurtheilung hinsichtlich der erforderlichen Uebereinstimmung ermöglichen.

Diese Methode ist eine vollständig exacte und führt, soweit es die Genauigkeit der Rechnung zulässt, zu möglichst verlässlichen Resultaten. Die Geringfügigkeit der Zahlen, mit deren Functionen man es hier zu thun hat, bildet nämlich hinsichtlich einer vollständig genauen Berechnung Schwierigkeiten. Es erweist sich daher als zweckmässig, die den beiden Formen $\varkappa$) entsprechenden Werthe gleichzeitig zu berechnen, um durch eine in besagter Weise zu bewirkende, gegenseitige Vergleichung derselben, die noch bestehenden kleinen Unregelmässigkeiten zu beheben.

Es handelt sich übrigens auch darum, jene der facultativen Entwicklung entsprechenden, wahren Werthe der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten festzustellen, um auf dieser Grundlage deren Functionen zu ermitteln. Diesbezüglich bildet nun eine besondere Eigenschaft der Gleichungen $\varkappa$) die nöthige Handhabe. Diese Handhabe besteht in der besonderen Empfindlichkeit der Wurzelfunction dieser Gleichungen, welche sich darin äussert, dass bereits eine geringe Abweichung vom wahren Werthe der ausgeglichenen Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten hinreicht, um diese Wurzelfunction imaginär zu gestalten. Auf diese Eigenschaft sei nun die Ermittlung der ausgeglichenen Werthe der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten basirt. In dieser Beziehung ist aber noch ein anderer Umstand von Bedeutung, welcher es gestattet, die äusserste Genauigkeit der Rechnung im Auge zu behalten. Es ist dies die Geringfügigkeit des Werthes dieser Wurzelfunction, welche die eigentliche Ursache der besonderen Empfindlichkeit derselben bildend, hinsichtlich der Bestimmung der ausgeglichenen Werthe der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten von Belang ist.

Wir wollen daher versuchen, diese Frage in einer möglichst einfachen Weise zu lösen, und zwar, indem wir die besondere Empfindlichkeit der Wurzelfunction und deren äusserst geringfügigen Werth zur Grundlage unserer mathematischen Reflexionen annehmen.

Mit Rücksicht auf die Form σ) (siehe Abhandlung IX) besteht die Relation

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\triangle w_x}{w_x} - \frac{\triangle L_x}{L_x}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{2(w_x)_1}\right)^2 - e^{-\frac{1}{(w_x)}}$$

welche mit Hinblick auf die bereits erwähnte besondere Geringfügigkeit

des Werthes dieser zu einander in Beziehung stehenden Functionen es gestattet, diesen Umstand in folgender Form auszudrücken:

$$\omega)\qquad \left(1-\frac{1}{2(w_x)_1}\right)^2 - e^{-\frac{1}{(w_x)}} > 0$$

Daraus ergibt sich nun unter Bezugnahme auf die bekannte Gleichung

$$o)\qquad \frac{1}{2(w_x)} + \frac{1}{2(w_x)_1} = \frac{1}{w_x}$$

die Relation

$$1+\frac{1}{2(w_x)} - \frac{1}{w_x} > e^{-\frac{1}{2(w_x)}} \text{ respective } \frac{1}{w_x} > 1 + \frac{1}{2(w_x)} - e^{-\frac{1}{2(w_x)}}$$

welche schliesslich zu derjenigen von der Form

$$\frac{1}{w_x} > \frac{1}{(w_x)} - \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2(w_x)}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2(w_x)}\right)^3 - \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2(w_x)}\right)^4 + \cdots$$

führt. Unter den gleichen Umständen ergibt sich durch Substitution des anderen Werthes die aus obiger Form ω) entspringende Relation

$$1-\frac{1}{2(w_x)_1} > e^{-\frac{1}{2(w_x)}} \text{ respective } 1 - \frac{1}{2(w_x)_1} > e^{\frac{1}{2(w_x)_1} - \frac{1}{w_x}}$$

aus welcher folgerichtig

$$\frac{1}{2(w_x)_1} - \frac{1}{w_x} < l\left[1-\frac{1}{2(w_x)_1}\right] \text{ und schliesslich } \frac{1}{w_x} < \frac{1}{2(w_x)_1} - l\left[1-\frac{1}{2(w_x)_1}\right]$$

hervorgeht. Der Werth von w_x ist also durch bestimmte Grenzen gekennzeichnet und da diese Grenzen ungemein nahe sind, so lässt sich dieser Werth durch Anwendung des arithmetischen Mittels bestimmen.

Mit Rücksicht auf den Umstand nun, dass mittelst der Formel π) aus jenen dem jüngsten Alter entsprechenden Werthen der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit die folgenden Werthe derselben bestimmt werden, wobei deren in die Grenzwerthe zu substituirenden Functionen

$$\frac{1}{(w_x)} = \frac{b}{w_x} \text{ und } \frac{1}{(w_x)_1} = \frac{b_1}{w_x}$$

zur Feststellung der ausgeglichenen Werthe von $\frac{w_x}{w}$ und $\frac{L_x}{L_x}$ dienen, bildet die Form

$$\Omega)\qquad \frac{1}{2(w_x)_1} - l\left(1-\frac{1}{2(w_x)_1}\right) > \frac{1}{w_x} > \frac{1}{(w_x)} - \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2(w_x)}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2(w_x)}\right)^3 - \cdots$$

im allgemeinen Sinne diejenige Handhabe, welche nothwendig ist, um bei den Formen $\varkappa$) für den ganzen Verlauf der Sterbetafel einen imaginären Werth der Wurzelfunction zu vermeiden, d. i. mit anderen Worten, um eine mit der mathematischen Ausgleichung in Widerspruch stehende Gestaltung des Sterblichkeitsverlaufes unmöglich zu machen.

Indem wir nun zwischen den beiden Grenzwerthen des zu bestimmenden Werthes das arithmetische Mittel als das der Rechnung am nächsten entsprechende annehmen, bewirken wir, dass dieser Werth gleich weit von jenen Grenzen entfernt ist, welche den reelen Theil der Rechnung vom imaginären trennen.

Dieser gleich grosse Abstand der ermittelten Werthe von den beiden Grenzwerthen hat aber auch noch eine andere sehr wichtige Bedeutung. Innerhalb dieser Grenzen nämlich wird jeder Werth ein reelles Resultat für die Rechnung ergeben, doch wird dasselbe naturgemäss mit Rücksicht auf die Verschiedenheit der sich zwischen diesem und den bezüglichen Grenzen ergebenden Intervalle, unregelmässigen Wandlungen zwischen diesen jeweiligen Grenzen ausgesetzt sein, in welchem Umstande eigentlich jene Anomalien ihren Ursprung haben, welche den meisten Sterbetafeln anhaften. Solange nämlich diese Grenzen keine grossen Abstände von einander aufweisen, wie dies etwa bis zum 70. Lebensjahre der Fall ist, sind blos kleine Abweichungen möglich; in den späteren Lebensaltern jedoch nehmen diese Abstände zwischen den beiden Grenzwerthen immer grössere Dimensionen an, so dass auch die Möglichkeit für grössere Anomalien vorhanden ist, deren Beschaffenheit das ganze Wesen der Sterbetafel zu beeinflussen geeignet ist.

Durch die hier aufgestellten mathematischen Wahrscheinlichkeitsgesetze jedoch wird die Flucht, welche der Sterblichkeitsverlauf innerhalb der begrenzten Sphäre zieht, eine bestimmte, da jene unregelmässigen Wandlungen innerhalb derselben vollständig vermieden werden.

Dieses arithmetische Mittel zwischen jenen Grenzwerthen lässt sich nun merkwürdigerweise allgemein darstellen, und zwar gelangt dasselbe durch den einfachen Ausdruck

$$\frac{b + b_1}{2 w_x}$$

zur Darstellung, wodurch auch dieser Anforderung der Rechnung im allgemeinen Sinne Genüge geleistet zu werden vermag. Was das Wesen des allgemeinen Werthes für das arithmetische Mittel der beiden Grenzwerthe betrifft, so entspricht dasselbe einer als Function der Grenzwerthe sich ergebenden combinirten mathematischen Reihe, worin auch der Umstand der allgemeinen Beschaffenheit dieses Werthes seine Erklärung findet.

Auf Grundlage der bisherigen Ergebnisse gelangen wir nun zu folgenden Conclusionen: Die als arithmetisches Mittel der Grenzwerthe sich ergebenden ausgeglichenen Werthe der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten entsprechen vollständig auch der in diesem Falle geltenden Bedingungsgleichung

$$\Sigma) \qquad \frac{b_1}{2 w_x} + \frac{b}{2 w_x} = \frac{1}{w_x}$$

so dass der Lösung unserer Aufgabe nichts mehr im Wege steht, indem nach jeder Richtung hin eine Uebereinstimmung jener Functionen, von deren Wesen der Ausgleichungsprocess abhängt, hergestellt ist.

Wir übergehen daher zur Construction der eigentlichen Resultatsgleichung, deren Beschaffenheit es gestattet, in geschlossener algebraischer Form die Beziehung zwischen je zweien aufeinanderfolgenden Werthen der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit allgemein auszudrücken.

Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln.

XII.

In der vorigen Abhandlung haben wir jene Umstände in Betracht gezogen, welche die Voraussetzung für die Befriedigung der hier geltenden mathematischen Gesetze bilden.

Mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung Σ), beziehungsweise auf jene sich durch die Grenzwerthe ergebende Werthbeschaffenheit der ausgeglichenen Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten erhalten wir nun aus der ersteren der Gleichungen ϰ) die Relation

$$\Delta w_x = -\frac{b}{b+b_1} + \sqrt{\left(\frac{2w_x}{b+b_1} - \frac{b_1}{b+b_1}\right)^2 - \left(\frac{2w_x}{b+b_1}\right)^2 \cdot e^{-\frac{b}{w_x}}}$$

worin die für b und b_1 geltenden Functionen der ursprünglichen Werthe b und b_1 zur Anwendung gelangen und jener als arithmetisches Mittel der Grenzwerthe von w_x sich ergebende, die reelle Beschaffenheit der Gleichung bedingende, allgemeine Werth $\frac{2w_x}{b+b_1}$ berücksichtigt ist.

Dieser Gleichung entspricht nun diejenige von der Form*)

$$\Gamma)\qquad \Delta w_x = \frac{-b_1 \mp \sqrt{(2w_x - b_1)^2 - 4w_x^2 e^{-\frac{b}{w_x}}}}{b+b_1}$$

welche in ihrem Wesen der Anforderung unserer Rechnung vollständig Genüge leistet, da selbe in präciser Weise das Gesetz kennzeichnet, nach welchem sich der Verlauf der Sterblichkeiten gemäss der mathematischen Wahrscheinlichkeit regelt. Zieht man nun in Betracht, dass der Werth der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit im jüngsten Alter gegeben ist und jener dem nächstfolgenden Alter entsprechende stets durch die Relation

$$w_{x+1} = w_x + \Delta w_x$$

allgemein zum Ausdrucke gelangt, so kommt man durch Combination derselben mit der Vorigen zu folgendem Resultate

$$\Xi)\qquad w_{x+1} = w_x + \frac{-b_1 \mp \sqrt{(2w_x - b_1)^2 - 4w_x^2 e^{-\frac{b}{w_x}}}}{b+b_1}$$

welches zu dem interessanten Schlusse führt, dass für eine vollständig ausgeglichene Tafel die allgemeine Bedingung

$$\Psi)\qquad \underline{w_{x+1}^2 - (2w_x - b_1)\, w_{x+1} + w_x^2\, e^{-\frac{b}{w_x}} = 0}, \qquad \underline{b + b_1 = 2}$$

Geltung besitzt.

---

*) Zwischen dem negativen und positiven Zeichen passirt die Wurzelfunction den Werth Null.

Die Voraussetzung $b + b_1 = 2$ für diese Bedingung wird bekanntlich durch die in der Abhandlung X dargestellten Relationen τ) erfüllt und es ist daher in dieser Form die Handhabe geboten, die Ausgleichung einer Sterbetafel auch auf Grund ganz unregelmässiger, statistischer Ursprungszahlen in vollständig verlässlicher Art durchzuführen, sobald die Werthe $b = \frac{2b}{b + b_1}$ und $b_1 = \frac{2b_1}{b + b_1}$ festgestellt werden können. Die Geringfügigkeit des Exponenten im letzten Gliede dieses Ausdruckes, welche sich mit Ausnahme der hohen Alter hier kundgibt, involvirt jedoch eine besondere Empfindlichkeit der Rechnung, so dass es opportun erscheint, in möglichst genauer Weise dieselbe durchzuführen.

Diesbezüglich bildet nun die zweite der Gleichungen ϰ) eine willkommene Handhabe, da in derselben die erforderliche Controle des Calculs sich darbietet Und zwar lässt sich auf Grundlage der bekannten allgemein, geltenden Relation

$$\frac{\triangle w_x}{w_x} + \frac{\triangle L_x}{L_x} = -\frac{b_1}{w_x}$$

auch diejenige Function feststellen, welche den Verlauf der Zahlen der Lebenden kennzeichnet, so dass es möglich wird, auf Grund derselben gleichfalls die Werthe der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln. Diese Werthe müssen nun mit jenen auf Grund der ersteren Form dargestellten vollständig übereinstimmen, wenn die Ausgleichung als durchgeführt betrachtet werden soll.

* * *

Das Vorhandensein einer solchen Controle gestattet es aber, diesen Process der Ausgleichung noch mehr zu vereinfachen, indem vorauszusetzen ist, dass ein auf dem Wege der Näherung dargestelltes Doppelresultat gleichfalls zum Ziele führen dürfte, insbesondere als die sich darbietende Controle gleichzeitig auch jene durch den Näherungsprocess entstandenen kleinen Ungenauigkeiten zu beheben geeignet ist. Diesbezüglich bildet die Geringfügigkeit des Werthes der Wurzelfunction die Grundlage, da angenommen werden darf, dass jene unter dem Wurzelzeichen vorhandene Differenz zweier, mit der Variablen im gleichen Sinne sich ändernden Functionen, in ihrem Werthe durch eine geringe Veränderung dieser Variablen w_x nur wenig beeinflusst werden dürfte, sobald als Grundlage der Rechnung eine, wenn auch dem mathematischen Absterbegesetze nicht entsprechende, doch zum mindesten regelmässig verlaufende Sterbetafel zur Verfügung steht. In diesem Falle gelten nun die einfachen Näherungsformen

$$\triangle w_x = \frac{\triangle w_x}{w_x} \cdot \frac{2 w_x}{b + b_1} \quad \text{und} \quad \triangle L_x = \frac{\triangle L_x}{L_x} \cdot \frac{2 L_x}{b + b_1}$$

welche im Sinne der Rechnung angewendet, gleichfalls zum Ziele zu führen geeignet sind, zugleich aber den Vorzug besonderer Einfachheit aufweisen. Nachfolgende Tafel zeigt das Resultat dieses Näherungsprocesses im Stadium der ersten Ausgleichung, im Vergleiche zu den Ursprungszahlen.

Tabelle IX.

Alter Jahre	Gegebene Werthe (Tafel der 17 englischen Ges.)		Den gegebenen Werthen entsprechende Summen $b + b_1$	Näherungsweise ausgeglichene Werthe bei $(b + b_1 = 2)$	
	w_x	$\triangle w_x$		w_x	$\triangle w_x$
10	47·86241	— 0·67822	2·009519	47·86241	— 0·67501
11	47·18419	— 0·68082	2·008055	47·18740	— 0·67814
12	46·50337	— 0·68330	2·006316	46·50926	— 0·68123
13	45·82007	— 0·68565	2·005187	45·82803	— 0·68399
14	45·13442	— 0·68785	2·004543	45·14404	— 0·68644
15	44·44657	— 0·68990	2·003519	44·45760	— 0·68886
16	43·75667	— 0·69182	2·003055	43·76874	— 0·69096
17	43·06485	— 0·69373	2·002488	43·07778	— 0·69308
18	42·37112	— 0·69545	2·002272	42·38470	— 0·69488
19	41·67567	— 0·69749	2·002622	41·68982	— 0·69681
20	40·97818	— 0·69904	2·002690	40·99301	— 0·69835
21	40·27914	— 0·70066	2·002843	40·29466	— 0·69993
22	39·57848	— 0·70236	2·002975	39·59473	— 0·70161
23	38·87612	— 0·70368	2·003094	38·89312	— 0·70290
24	38·17244	— 0·70512	2·003230	38·19022	— 0·70431
25	37·46732	— 0·70660	2·003313	37·48591	— 0·70578
26	36·76072	— 0·70778	2·003440	36·78013	— 0·70694
27	36·05294	— 0·70904	2·003596	36·07319	— 0·70816
28	35·34390	— 0·70996	2·003648	35·36503	— 0·70909
29	34·63394	— 0·71103	2·003840	34·65594	— 0·71012
30	33·92291	— 0·71176	2·003877	33·94582	— 0·71086
31	33·21115	— 0·71265	2·004087	33·23496	— 0·71172
32	32·49850	— 0·71324	2·004194	32·52324	— 0·71229
33	31·78526	— 0·71395	2·004296	31·81095	— 0·71280
34	31·07131	— 0·71480	2·004463	31·09815	— 0·71342
35	30·35651	— 0·71319	2·000097	30·38473	— 0·71390
36	29·64332	— 0·71216	1·998742	29·67083	— 0·71446
37	28·93116	— 0·71383	1·998476	28·95637	— 0·71516
38	28·21733	— 0·71565	2·001445	28·24121	— 0·71596
39	27·50168	— 0·71751	2·003208	27·52525	— 0·71700
40	26·78417	— 0·71956	2·005472	26·80825	— 0·71804
41	26·06461	— 0·72044	2·005697	26·09021	— 0·71893
42	25·34417	— 0·72088	2·005943	25·37128	— 0·71951
43	24·62329	— 0·71979	2·005946	24·65177	— 0·71849
44	23·90350	— 0·71708	2·006000	23·93328	— 0·71583
45	23·18642	— 0·71335	2·005950	23·21745	— 0·71219
46	22·47307	— 0·70772	2·005758	22·50526	— 0·70670
47	21·76535	— 0·70179	2·005498	21·79856	— 0·70093
48	21·06356	— 0·69530	2·005208	21·09763	— 0·69462
49	20·36826	— 0·68854	2·004853	20·40301	— 0·68804
50	19·67972	— 0·68126	2·004552	19·71497	— 0·68096
51	18·99846	— 0·67320	2·003445	19·03401	— 0·67330
52	18·32526	— 0·66534	2·003822	18·36071	— 0·66536
53	17·65992	— 0·65626	2·002636	17·69535	— 0·65671
54	17·00366	— 0·64744	2·001817	17·03864	— 0·64816

Alter Jahre	Gegebene Werthe (Tafel der 17 englischen Ges.)		Den gegebenen Werthen entsprechende Summen	Näherungsweise ausgeglichene Werthe bei ($b + b_1 = 2$)	
	w_x	$\triangle w_x$	$b + b_1$	w_x	$\triangle w_x$
55	16·35622	— 0·63878	2·002951	16·39048	— 0·63917
56	15·71744	— 0·62791	1·999938	15·75131	— 0·62928
57	15·08953	— 0·61817	1·998839	15·12203	— 0·61986
58	14·47136	— 0·60851	1·998979	14·50217	— 0·61012
59	13·86285	— 0·59633	1·994657	13·89205	— 0·59919
60	13·26652	— 0·58495	1·994333	13·29286	— 0·58779
61	12·68157	— 0·57249	1·992329	12·70507	— 0·57576
62	12·10908	— 0·55925	1·990022	12·12931	— 0·56299
63	11·54983	— 0·54577	1·987431	11·56632	— 0·55001
64	11·00406	— 0·53162	1·984431	11·01631	— 0·53639
65	10·47244	— 0·51708	1·981137	10·47992	— 0·52238
66	9·95536	— 0·50229	1·977375	9·95754	— 0·50815
67	9·45307	— 0·48640	1·971913	9·44939	— 0·49314
68	8·96667	— 0·47244	1·969796	8·95625	— 0·47913
69	8·49423	— 0·45698	1·963477	8·47712	— 0·46454
70	8·03725	— 0·44187	1·957830	8·01258	— 0·45000
71	7·59538	— 0·42692	1·951679	7·56258	— 0·43560
72	7·16846	— 0·41078	1·942309	7·12698	— 0·42053
73	6·75768	— 0·39526	1·933209	6·70645	— 0·40582
74	6·36242	— 0·38275	1·929709	6·30063	— 0·39284
75	5·97967	— 0·36793	1·919678	5·90779	— 0·37872
76	5·61174	— 0·35437	1·910553	5·52907	— 0·36549
77	5·25737	— 0·34045	1·899806	5·16358	— 0·35201
78	4·91692	— 0·32668	1·887965	4·81157	— 0·33865
79	4·59024	— 0·31372	1·875293	4·47292	— 0·32603
80	4·27652	— 0·30147	1·861562	4·14689	— 0·31407
81	3·97505	— 0·29029	1·846425	3·83282	— 0·30318
82	3·68476	— 0·28178	1·832733	3·52964	— 0·29455
83	3·40298	— 0·27358	1·815811	3·23509	— 0·28646
84	3·12940	— 0·26748	1·798830	2·94863	— 0·28021
85	2·86192	— 0·26159	1·779788	2·66842	— 0·27408
86	2·60033	— 0·25595	1·758275	2·39434	— 0·26807
87	2·34438	— 0·25057	1·733743	2·12627	— 0·26216
88	2·09381	— 0·24381	1·703891	1·86411	— 0·25478
89	1·85000	— 0·23590	1·668986	1·60933	— 0·24591
90	1·61410	— 0·22733	1·626259	1·36342	— 0·23615
91	1·38677	— 0·21667	1·573908	1·12727	— 0·22381
92	1·17010	— 0·20490	1·512312	0·90346	— 0·20922
93	0·96520	— 0·18259	1·416112	0·69424	— 0·18548
94	0·78261	— 0·16461	1·321896	0·50876	— 0·16190
95	0·61800	— 0·13151	1·182889	0·34686	— 0·12480
96	0·48649	— 0·10387	1·043687	0·22206	— 0·09086
97	0·38262	— 0·13262	1·011347	0·13120	— 0·06080
98	0·25000	— 0·15000	0·913146	0·07040	— 0·04469
99	0·10000	— 0·10000		0·02571	

Reflexionen über unsere Formel, betreffend die exacte Ausgleichung der Sterbetafeln.

In der Abhandlung „Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln“ XII haben wir zum erstenmale eine allgemeine algebraische Bedingung für die exacte Ausgleichung der Sterbetafeln zur Darstellung gebracht, welche bei Erfüllung einer bestimmten Voraussetzung allen diesbezüglichen Anforderungen im weitgehendsten Sinne zu entsprechen vermag.

Die Beschaffenheit der grundlegenden Functionen dieser algebraischen Form bot jedoch die Handhabe, unter gewissen, günstigen Umständen eine weitere Vereinfachung des Ausgleichungsprocesses zu bewirken, indem an Stelle des rechnungsmässigen Verfahrens eine facultative Annäherung sich als zulässig erwies, welche bei Beobachtung der nöthigen Reihenfolge der Proceduren gleichfalls zum Ziele zu führen geeignet ist. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes wurden in der Tabelle IX der genannten Abhandlung die im ersten Stadium annäherungsweise ausgeglichenen Werthe der Tafel der 17 englischen Gesellschaften auf Grundlage einer Form dargestellt, welche den Anforderungen wohl nur theilweise Rechnung trägt, wie dies dem Wesen derselben gemäss nicht anders zu erwarten ist, doch ist aus diesem beiläufigen Ergebnisse immerhin der Charakter der durch den Ausgleichungsprocess sich vollziehenden Veränderung wahrzunehmen. Dessenungeachtet wird mittelst dieser Form der Weg angedeutet, auf welchem man, sobald als Grundlage der Rechnung eine, wenn auch dem mathematischen Absterbegesetze nicht entsprechende, doch zum mindesten regelmässig verlaufende Sterbetafel zur Verfügung steht, ohne Anwendung der vollständig exacten Formel 4') nach einigen Proceduren zu ganz zuverlässigen Resultaten gelangen kann. Wir haben bereits in der genannten Abhandlung hervorgeboben, dass eine zweite Näherungsform, welche sich auf die Zahlen der Lebenden bezieht, eine Art Controle für das Resultat bildet, nachdem durch dieselbe die Handhabe geboten ist, mittelst eines weiteren einfachen Processes gleichfalls die Zahlen der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit abzuleiten, welche durch Vergleichung mit jenen auf ersterem Wege hergestellten die Beurtheilung der Zuverlässigkeit des Resultates ermöglichen. Auf diese Art ist man in der Lage, ein entsprechende Correctur in der Beschaffenheit der sich ergebenden Werthe vorzunehmen und falls erforderlich, dieselben zur Grundlage eines weiteren Näherungsprocesses zu gebrauchen, so dass man schliesslich zu Resultaten gelangt, welche den Anforderungen in der gleichen Weise Rechnung tragen, wie jene auf Grund der exacten Form 4') hergestellten. Es ist hie-

bei nur erforderlich, stets die für die vollständige Ausgleichung in Betracht kommende Voraussetzung $b + b_1 = 2$ im Auge zu behalten.*)

Die vollständig exacte Art, in welcher die Ausgleichung der Sterbetafeln mittelst der von uns aufgestellten Bedingung Ψ) zur Durchführung gelangt, äussert sich nämlich besonders in dem Umstande, dass die nach den bisherigen unzureichenden Methoden construirten Sterbetafeln, sobald von der Voraussetzung $b + b_1 = 2$ abgesehen wird, dieser Bedingung zum grössten Theile bereits Genüge leisten. Es ist daher hierin die Thatsache documentirt, dass eine Sterbetafel die allgemeine Bedingung

$$\Psi)\qquad w_{x+1}^2 - (2w_x - b_1)\, w_{x+1} + w_x^2\, e^{-\frac{b_x}{w_x}} = 0$$

vollständig erfüllen kann, ohne deshalb dem mathematischen Wahrscheinlichkeits-Gesetze zu entsprechen. Nur dann, wenn dieselbe gleichzeitig auch der Voraussetzung $b + b_1 = 2$ Rechnung trägt, vermag sie die Anforderung der Ausgleichung in jeder Hinsicht zu befriedigen.

Das eigentliche Gesetz der mathematischen Wahrscheinlichkeit ist nämlich gekennzeichnet durch die Relation

$$\left(\frac{\triangle w_x}{w_x} + \triangle l w_x + \frac{\triangle L_x}{L_x} + \triangle l L_x\right) \frac{w_x}{2} = -\frac{b + b_1}{2} = -1$$

welche aus der Differentialgleichung

$$\frac{d w_x}{w_x} + \frac{d L_x}{L_x} = -\frac{1}{w_x}$$

entspringend, im arithmetischen Mittel der sogenannten identischen Functionen, welche dem Differenzencalcul entsprechen, ihre Begründung findet.

In dieser Relation äussert sich also das Wesen der factischen Uebereinstimmung des Sterblichkeitsverlaufes mit dem der mathematischen Wahrscheinlichkeit entsprechenden Absterbegesetze, dessen Beschaffenheit in jener Differentialgleichung zu Ausdrucke gelangt.

Hierüber liefert unsere in der IV. Lieferung dieses Werkes**) dargestellte Ableitung der mathematischen Beziehung zwischen den Zahlen der Lebenden und den Zahlen der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten den nöthigen Aufschluss, indem jene dieses Gesetz zum Ausdruck bringende Differentialgleichung hier in ihrer grundlegenden Form

$$w_x \cdot L_x = e^{-\int \frac{dx}{w_x}}$$

*) Die Vereinfachung des Rechnungsprocesses durch Vernachlässigung der geringfügigen Veränderung des Wurzelwerthes kann jedoch nur insolange stattfinden, als diese Veränderung thatsächlich nur eine geringfügige bleibt. In dem Momente, wo die Abweichungen zwischen b und b_1 erkennen lassen, dass jene aus der Division dieser Werthe durch deren arithmetisches Mittel hervorgehenden neuen Werthe einen bereits merklichen Einfluss auf die Gestaltung des Wurzelwerthes nehmen, muss auf die normale Berechnung mittelst der exacten Form Ψ) zurückgegriffen werden. Es ist dies umsomehr geboten, als grössere Fehler, welche durch etwa allzu oberflächliche Rechnung hervorgerufen werden könnten, eine nicht unerhebliche Beeinflussung des richtigen Verlaufes der Zahlenwerthe zu bewirken geeignet sind.

**) Untersuchungen über das Wesen der Invalidität vom Standpunkte des Absterbegesetzes, IV. Lieferung, Seite 3 und 4.

gekennzeichnet wird.*) Das Geheimniss der vollständigen Ausgleichung der Sterbetafeln liegt also ausschliesslich im Wesen der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, da dieselben das Gesetz der eigentlichen mathematischen Wahrscheinlichkeit hier zur Geltung bringen.

Was nun die Bedingung Ψ) betrifft, so entspricht dieselbe der ersten der beiden Gleichungen ϰ) in der Abhandlung „Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln" X und lässt sich auch auf dieselbe direct zurückführen, u. zw. unter Berücksichtigung der bekannten Relation

$$\frac{w_{x+1}}{w_x} = 1 + \frac{\triangle w_x}{w_x}$$

mittelst welcher man zu der betreffenden Gleichung

$$\frac{\triangle w_x}{w_x} = - \frac{b_1}{2 w_x} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{b_1}{2 w_x}\right)^2 - e^{-\frac{b}{w_x}}}$$

gelangt. Der umgehrte analoge Process führt nun naturgemäss unter Zugrundelegung der zweiten der Gleichungen ϰ) zu einer ähnlichen Bedingung zwischen den Zahlen der Lebenden, wie diejenige ist, welche durch Ψ) zwischen den Zahlen der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten zum Ausdrucke kommt. Unter Berücksichtigung der obigen Relation liefert nämlich die Gleichung

$$\frac{\triangle L_x}{L_x} = - \frac{b_1}{2 w_x} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{b_1}{2 w_x}\right)^2 - e^{-\frac{b}{w_x}}}$$

diejenige von der Form

$$\left(\frac{L_{x+1}}{L_x}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{b_1}{2 w_x}\right)\frac{L_{x+1}}{L_x} + e^{-\frac{b}{w_x}} = 0$$

aus welcher sodann die Bedingung

$$\text{II)} \qquad L_{x+1}^2 - (2 w_x - b_1)\frac{L_x}{w_x} \cdot L_{x+1} + L_x^2 \cdot e^{-\frac{b}{w_x}} = 0$$

resultirt, welche in ihrem Wesen eine nahezu analoge Beschaffenheit wie die Bedingung Ψ) aufweist. Natürlich ist auch hier die Voraussetzung $b + b_1 = 2$ massgebend für die exacte Ausgleichung der bezüglichen Werthe, wie auch rechnungsgemäss die gleichen Umstände für die mathematische Bedeutung dieser Bedingung sprechen.

Was die Beschaffenheit der Bedingung Ψ) vom analytischen Gesichtspunkte betrifft, so repräsentirt dieselbe die allgemeine Beziehung der Ordinaten zweier aufeinanderfolgender Punkte der Curve der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten, deren Abscissen um je ein Jahresintervall von einander differiren.

Eine analoge Bedeutung hat nun auch die Bedingung II), welche sich jedoch im Gegensatze zu der vorigen auf die Curve der Lebenden

*) Vergleiche Anhang der VI. Lieferung, Seite 22 und 23, bezw. Seite 18, Formel 109.

bezieht, wobei die Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit als vermittelnde Variable fungirt.

Die für die exacte Ausgleichung der Sterbetafeln auf Grundlage der Bedingung I') allgemein geltende Voraussetzung $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}_1 = 2$ involvirt mit Rücksicht auf die constante Beschaffenheit dieser Summe für sämmtliche Alter, thatsächlich blos das Vorhandensein einer einzigen variablen Constante in dieser Rechnung, so dass auch in dieser Hinsicht die möglichste Vereinfachung des Rechnungsprocesses erzielt ist. Das ganze Wesen des Ausgleichungsverfahrens reducirt sich also auf die Ermittlung dieser Constante und es fällt daher der Umstand desto mehr ins Gewicht, dass jene für die Erfüllung dieser Voraussetzung rechnungsmässig dargestellten Werthe

$$\tau) \qquad \boldsymbol{b} = \frac{2b}{b + b_1} \text{ und } \boldsymbol{b}_1 = \frac{2b_1}{b + b_1}$$

auch der an sie gestellten Anforderung hinsichtlich ihrer Summe vollständig Rechnung tragen. Umso wichtiger erweist sich demnach die Gestaltung der Differenzen dieser beiden Werthe bezüglich der Continuität ihres Verlaufes; und thatsächlich stimmen diese unter gewissen Umständen blos annähernd mit den wahren Werthen überein, zumal sie in ihren Differenzen noch immer die Merkmale ihres Ursprunges an sich tragen und in denselben zum Theile den gleichen Mangel an Continuität des Verlaufes aufweisen, wie die ursprünglichen Werthe b und b_1, deren Functionen sie repräsentiren.

Wohl ist es mit Bezug auf die functionelle Beschaffenheit der Werthe $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{b}_1$ einleuchtend, dass die besagte, nicht ganz continuirliche Art der Veränderung dieser variablen Constante auch in einem minder günstigen Falle nur mit ganz unbedeutenden Abweichungen verbunden sein könnte, doch müsste selbst eine solche, mit Rücksicht auf die geringfügige Werthbeschaffenheit dieser Constante, einen merklichen Einfluss auf den Verlauf einer Sterbetafel ausüben.

Der Charakter einer Sterbetafel hängt also hauptsächlich von der Beschaffenheit der Veränderungen ab, welchen die in ihrem Werthe stets positive, variable Constante

$$\beta = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}_1$$

unterworfen ist, während andererseits die Grössenbeschaffenheit dieses Werthes, sowie die continuirliche Veränderung desselben mit dem Wesen der vollständigen mathematischen Ausgleichung zusammenhängt.

DIE MATHEMATIK

im

Dienste der Nationalökonomie

unter Rücksichtnahme auf die

praktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik

mit einigen, durch selbständige wissenschaftliche Errungenschaften auf dem Gebiete der reinen Mathematik begründeten, neuen Fundamenten der politischen Arithmetik

für Versicherungs- und Bank-Institute, sowie auch Lehrkräfte höherer Bildungsanstalten besonders geeignet.

Supplementband zum gleichnamigen Werke.

Verfasst

von

Dr. LUDWIG GROSSMANN

Inhaber des Ersten Wiener mathematischen Bureau und Herausgeber der Fachschrift „Controle".

Zehnte Lieferung.

WIEN 1898.

Im Selbstverlage des Verfassers.

III., Sofienbrückengasse Nr. 14.

Druck von Josef Bayer & Comp., Wien, I., Wollzeile 25.



VORREDE.

Das Gebiet, auf welchem sich meine Untersuchungen in diesem Werke bewegen, umfasst bekanntlich neben einer weiteren Ausgestaltung der theoretischen Grundlagen der Politischen Oekonomie vorherschend die Lösung neuer Probleme der praktischen Volkswirthschaft. Zwei Theoreme, nämlich die „Allgemeine Integration der linearen Differential-Gleichungen höherer Ordnung“ und die „Theorie und Lösung der irreductiblen transcendenten Gleichungen“ bilden jene selbstständig begründeten Fundamente der reinen Mathematik, welche nebst ihrer Anwendung auf die Disciplinen der Versicherungstechnik, Mathematischen Statistik und Finanzwissenschaft das Wesen dieser meiner wissenschaftlichen Forschungsergebnisse ausmachen.

In der vorliegenden Lieferung gelangt nun des Bestreben zur Geltung, die Bedeutung dieser Theoreme für die weitere Forschung insoferne zu kennzeichnen, als dies der mathematisch-technische Gesichtspunkt erfordert, von welchem aus zum erstenmale daselbst das gesammte System dieser Disciplinen in seiner geometrisch-analytischen Beschaffenheit in Betracht gezogen und solchermassen die wichtige Frage der originären Einheitlichkeit der mathematisch statistischen Gesetze aufgeworfen wird.

Ich bin mir dessen bewusst, dass der hier angestrebte wissenschaftliche Zweck nicht leichterdings zu erreichen ist, doch wächst meine Zuversicht, nachdem es mir gelungen, durch Lösung jener beiden Theoreme für diese Untersuchungen eine sichere Basis zu schaffen. Umsomehr ist es aber nothwendig auch weiterhin jeden Schritt zu erwägen, welcher auf der Bahn wissenschaftlicher Erkenntniss unternommen wird. Jedes Ergebniss der Forschung muss der berufenen Kritik Stand halten können, wenn die Förderung des ferneren wissenschaftlichen Fortschrittes hiedurch bewirkt werden soll. Desshalb bin ich bestrebt, vorerst den Bedingungen einer klaren wissenschaftlichen Entwicklung der einzelnen Fragen Genüge zu leisten, bevor ich zu weiteren Conclusionen ausgreife.

Nur eine auf wissenschaftlich präciser Feststellung der bezüglichen mathematischen Principien und generellen Gesetze beruhende Grundlage kann alle weiteren auf deductivem Wege erzielten Resultate verbürgen.

Wien, den 1. Jänner 1898.

Der Verfasser.

INHALT.

Versicherungstechnik.

Finanztechnik.

Druckfehler und Correcturen:

Auf Seite 38 in der Mitte soll die Formel:

$$\frac{s'_x + 1}{s_x} - = \frac{dl - \frac{dl\,(C - L_x\,dx)}{dx}}{dx}$$

richtig lauten:

$$\frac{dl - \frac{dl\,(C - L_x\,dx)}{dx}}{dx}$$

Auf Seite 52, sechste Zeile von unten soll es anstatt:
aufzuweissen, richtig heissen: aufzuweisen;

Auf Seite 62 in der Mitte soll es heissen anstatt:
Alternation, richtig: Alternative;

Auf Seite 64, dritte Zeile von unten soll es heissen anstatt:
auf dem graphischen Gebiete, richtig: auf dem graphisch-statistischen Gebiete.

Die Analogie im Wesen der mathematischen Beziehung zwischen den discontirten Zahlen der Lebenden und den Leibrenten-Misen mit jenem der grundlegenden Relation des allgemeinen Absterbegesetzes.

I.

Unsere bisherigen, das allgemeine Absterbegesetz betreffenden Untersuchungen basiren auf dem wichtigen Umstande, dass die mathematische Reihe der den einzelnen Altern entsprechenden Lebenswahrscheinlichkeiten, in geschlossener Form zur Darstellung gebracht, das Wesen dieses Gesetzes derart kennzeichnet, dass eine zwischen den Zahlen der Lebenden und den Lebensdauerwahrscheinlichkeiten sich ergebende Relation die Interpretation desselben ermöglicht. Diese Grundform, welche gleichzeitig das Element der allgemeinen Form der reducirten linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bildet, drückt also implicite die Beziehung zwischen der natürlichen Absterbeordnung und jener mit derselben correspondirenden facultativen Absterbenswahrscheinlichkeit unter Vermittlung der das Lebensalter bezeichnenden Variablen aus. Um also diese in Relation zu einander stehenden Gesetzmässigkeiten von einander abgesondert zu ermitteln, war es nothwendig, unter Betonung der Abhängigkeit derselben von den gemeinsamen Variablen des Alters den analytischen Begriff dieser Gesetzmässigkeiten festzustellen, was durch die allgemeine Lösung jener Form von Differentialgleichungen ermöglicht wurde.

Nun besteht aber bekanntlich zwischen den discontirten Zahlen der Lebenden und den Misen der lebenslänglichen Leibrenten die gleiche Beziehung, wie zwischen den Zahlen der Lebenden und den respectiven Lebensdauerwahrscheinlichkeiten, so dass der Gedanke naheliegt, in derselben Weise den analytischen Begriff der Gesetzmässigkeit sowohl der discontirten Zahlen der Lebenden als auch der Leibrenten-Misen festzustellen, da eine solche, insbesondere was die Letzteren betrifft, für das Wesen der Vereinfachung der wichtigsten versicherungstechnischen Formen von grosser Bedeutung ist.

Jene diesen Gegenstand betreffenden Ausführungen in der Abhandlung „Zur Theorie und näherungsweisen Berechnung der Prämienreserven eines Versicherungsstockes" geben hierüber vollständigen Aufschluss und zeigen, dass die Grundformen

1) $$L_x = \frac{e^{-\int \frac{dx}{w_x}}}{w_x}$$ und 2) $$D_x = \frac{e^{-\int \frac{dx}{M_x}}}{M_x}$$

im Wesen von gleicher mathematischer Bedeutung sind, so dass ein analoges Resultat auch in Bezug auf die analytische Beschaffenheit dieser Formen

vorauszusetzen ist. Zieht man nämlich in Betracht, dass die allgemeine Form für die Mise einer lebenslänglichen Leibrente in dem Ausdrucke

$$M_x = \frac{\Sigma \frac{L_x}{r^x}}{\frac{L_x}{r^x}} = \frac{\Sigma D_x}{D_x}$$

zur Darstellung gelangt, so lässt sich folgende Ableitung durchführen. Es ist füglich obiger Form gemäss

$$M_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \ldots = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x}\left(1 + \frac{D_{x+2}}{D_{x+1}} + \frac{D_{x+3}}{D_{x+1}} + \ldots\right)$$

ferner analog zu Diesem

$$M_{x+1} = 1 + \frac{D_{x+2}}{D_{x+1}} + \frac{D_{x+3}}{D_{x+1}} + \ldots$$

und ergibt sich also durch Substitution dieses letzteren Werthes in den ersteren die Relation

$$M_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} \cdot M_{x+1}$$

Diese Form entspricht offenbar ebenso wie die beziehungsweisen Bezeichnungen in derselben, Jahresintervallen, weshalb zum Zwecke der Continuität, d. h. zur Einführung unendlich kurzer Intervalle anstatt D_{x+1}, D_{x+2} . . . . die Bezeichnungen $D_{x+\Delta x}$, $D_{x+2\Delta x}$ . . . . zur Anwendung gelangen müssen, welcher Umstand auch bei den anderen in Rechnung kommenden Grössen zur Geltung kommt. Demgemäss erhalten wir also

$$M_x = \Delta x\left(1 + \frac{D_{x+\Delta x}}{D_x} + \frac{D_{x+2\Delta x}}{D_x} + \frac{D_{x+3\Delta x}}{D_x} + \ldots\right)$$

$$= \Delta x\left(1 + \frac{D_{x+\Delta x}}{D_x}\left[1 + \frac{D_{x+2\Delta x}}{D_{x+\Delta x}} + \frac{D_{x+3\Delta x}}{D_{x+\Delta x}} + \ldots\right]\right)$$

ferner $$M_{x+\Delta x} = \Delta x\left(1 + \frac{D_{x+2\Delta x}}{D_{x+\Delta x}} + \frac{D_{x+3\Delta x}}{D_{x+\Delta x}} \ldots\right)$$

und schliesslich durch Substitution die Gleichung

$$M_x = \Delta x + \frac{D_{x+\Delta x}}{D_x} \cdot M_{x+\Delta x}$$

welche auch folgendermassen geschrieben werden kann

$$M_x \cdot D_x = D_x \cdot \Delta x + D_{x+\Delta x} \cdot M_{x+\Delta x}$$

Lässt man nun hierin Δx gegen 0 verschwinden, so ergibt sich folgerichtig die Gleichung

$$M_x \cdot D_x = D_x \cdot dx + (D_x + dD_x)(M_x + dM_x)$$

und da das Product $dM_x \cdot dD_x$ ob seiner Kleinheit verschwindet, so liefer dies nach durchgeführter Rechnung den Ausdruck

$$\frac{dl\, M_x}{dx} + \frac{dl\, D_x}{dx} = -\frac{1}{M_x}$$

welcher die Relation zwischen den discontirten Zahlen der Lebenden D_x und der Mise M_x allgemein kennzeichnet, wobei das Alter x als vermittelnde Ver

Das börsenmässige Prämien- und Stellage-Geschäft in seiner Bedeutung vom assecuratorischen Gesichtspunkte.

I.

Das Wesen der Speculation bringt es mit sich, dass die Voraussetzungen, welche dem Speculanten bezüglich der voraussichtlichen Preisbildung zur Grundlage dienen, in Folge einer etwaigen plötzlichen Veränderung der Verhältnisse eine gegentheilige Wirkung herbeiführen können, so dass die auf eine bestimmte Richtung der Preisbildung berechnete Speculation durch das unvermuthete Eintreffen der entgegengesetzten Richtung zu erheblichen Verlusten führen kann, welche den Vermögensverhältnissen des Speculanten oft nicht angemessen, seinen gänzlichen Ruin herbeizuführen geeignet sind. Die Speculation ist daher mit grossen Gefahren verbunden und man sucht daher auf verschiedene Art der Eventualität grosser Verluste Schranken zu setzen. Dies geschieht mit Hilfe des Prämien- und Stellagegeschäftes, welches eine Art Assecuranz gegen erhebliche Verluste bildend, dieselben einer bestimmten Begrenzung unterwirft. Der Speculant schliesst nämlich, um seinen etwaigen Verlust zu limitiren, mit einem zweiten Speculanten einen Vertrag ab, laut dessen sich dieser verpflichtet, ihm die bei einem bestimmten Preise gekaufte Waare (Geldeffecten) gegen eine im Vorhinein zu entrichtende angemessene Prämie im gegebenen Falle zum selben, beziehungsweise zu einem anderen fix vereinbarten Preise abzunehmen, und zwar falls er dazu während eines bestimmten Termines aufgefordert wird. Indem also der Speculant bei Eintreffen seiner Voraussetzungen einen hohen Gewinn zu erzielen vermag, begrenzt er auf diese Weise den aus der Speculation etwa resultirenden Verlust.

Insofern nun beim Prämiengeschäfte eine Assecuranz gegen etwaigen Verlust in Frage kommt, kann in der Stellage eine weitere Entwicklung dieser Einrichtung erblickt werden, indem dieselbe eine aus der Assecuranz entspringende Speculation repräsentirt. Diese beruht auf dem Principe, den momentanen Preis zum Ausgangspunkte der Speculation hinsichtlich der Preisbildung sowohl im zunehmenden als auch im abnehmenden Sinne zu machen. Die Grenzen werden nämlich zwischen den beiden Contrahenten nach beiden Richtungen hin fixirt, wobei der eine derselben dem anderen das Recht einräumt und ihn gleichzeitig verpflichtet, eine Quantität Waare innerhalb eines bestimmten Termines entweder bei der tiefen Preisgrenze zu liefern oder bei der hohen zu beziehen. Die Stellage ist also ein Prämiengeschäft nach beiden Richtungen, und zwar sowohl hinsichtlich einer sinkenden als auch einer steigenden Preisbildung, wobei jedoch zu berücksichtigen ist, dass der Prämie bereits eine bestimmte Speculation zur Grundlage dient, während eine solche bei der Stellage sich erst aus der Art der Preisbildung selbst ergeben muss.

Die Vorsicht, dem etwaigen Verluste Schranken zu setzen, ist umsomehr geboten, als es zu geschehen pflegt, dass manches Mal gegen jede Berechtigung die Preisbildung gewaltsam beeinflusst und mit der Speculation Missbrauch getrieben wird. In einem solchen Falle ist jedes Calcul vergeblich und muss jede Art Voraussicht, mag deren Begründung noch so gerechtfertigt sein, ihre Wirkung verfehlen. Die Speculation, welche ihre Interessen einseitig vertritt, hat die Tendenz, abnormale Preise zu erzielen und sucht dies auf dem Wege der Verleugnung des thatsächlichen Bedürfnisses zu erreichen. Hier wird das wirthschaftliche Gesetz von Nachfrage und Angebot einer Fälschung preisgegeben, indem auf künstlichem Wege die Preisbildung im Interesse einzelner Speculanten beeinflusst wird. Eine solche Manipulation einzelner Speculanten ist geeignet, grosse Gefahren für das gesammte wirthschaftliche Getriebe heraufzubeschwören, da sie oft die übrige Speculation mitreisst, eine Art Ueberspeculation erzeugend, deren Opfer zumeist das Privatcapital wird. Das Engagement der Speculation nimmt in solchen Fällen Dimensionen an, welche die Mittel derselben weit übersteigen, so dass ein Zurückdämmen derselben in ihre legalen Grenzen grossen Capitalsaufwand erfordert. Die Mittel der Banken werden durch die übermässige Anschwellung des Reportgeschäftes in einer Weise in Anspruch genommen, dass oft ausserordentliche Massnahmen ergriffen werden müssen, um eine Krise zu verhüten.

In solchen Zeiten wird die Gefahr unverhältnissmässiger Verluste in bedeutendem Maasse erhöht, mit anderen Worten, das Risico der Speculation wird ein ungleich höheres, sobald übermässige Engagements eine grosse Anspannung der Mittel verursachen. Entsprechend dem veränderlichen Risico wird daher auch die Gegenleistung für die Uebernahme desselben sich grösser oder kleiner gestalten und bildet auch hier, wie bei allen anderen Geschäften, Angebot und Nachfrage die regulirende Handhabe für deren Bemessung.

Das Wesen des Prämien- und Stellagegeschäftes wie dasselbe im allgemeinen Börsenverkehre sich abwickelt, beruht auf folgenden Normen:

a) Für das einfache Prämiengeschäft: Der Zahler der Prämie erwirbt je nach Vereinbarung entweder das Recht, von dem anderen Contrahenten eine festgesetzte Quantität eines bestimmten Börsewerthes zu einem vereinbarten Course an einem bestimmten Tage nehmen zu können; oder er erwirbt das Recht, dem anderen eine festgesetzte Quantität eines bestimmten Börsewerthes zu einem vereinbarten Course an einem bestimmten Tage liefern zu können. Die Zahlung der bedungenen Prämie hat im Vorhinein zu geschehen.

b) Bei Vor- oder Rückprämie (Dontgeschäft) wird die bedungene Prämie im Course durch Zu- oder Abschlag ausgedrückt mit dem Rechte, dass der Käufer der Prämie gegen Baarzahlung des vereinbarten Reugeldes (Dontprämie) an einem bestimmten Tage von der Erfüllung des Geschäftes zurücktreten kann, in welchem Falle er verpflichtet ist, diese Prämie nach erfolgter Erklärung baar zu bezahlen.

c) Für das doppelte oder zweiseitige Prämiengeschäft (auf Geben und Nehmen): Der Zahler der Prämie erwirbt das Recht, an einem bestimmten

Tage eine festgesetzte Quantität eines bestimmten Börsewerthes dem anderen Contrahenten entweder zu dem vereinbarten Course liefern oder auch dieselbe Quantität zum gleichen vereinbarten Course von ihm nehmen zu können. Die Zahlung der bedungenen Prämie hat im Vorhinein zu geschehen.

d) Für Stellagegeschäfte: Ein Contrahent (Verkäufer der Stellage) räumt dem anderen (Käufer der Stellage) das Recht ein, nach des Letzteren Wahl an einem bestimmten Tage eine festgesetzte Quantität eines bestimmten Börsewerthes entweder ihm zu einem bedungenen niedrigeren Course zu liefern oder von ihm zu einem bedungenen höheren Course zu nehmen oder auch einen Theil zu liefern und den anderen Theil zu nehmen. In diesem letzteren Falle müssen die gegebenen und genommenen Stücke (Nominalbeträge) genau zusammen die Summe der gestellten Quantität betragen.

Der Stellagekäufer ist nicht blos berechtigt, sondern auch verpflichtet, das Geschäft in einer der angegebenen Arten zu erfüllen.

Der assecuratorische Begriff aller dieser Vertragsformen besteht also durchwegs in Vorkehrungen, deren Zweck die Einschränkung des eingegangenen oder einzugehenden Risicos ist. Hat Jemand eine Quantität eines bestimmten Börsewerthes zu einem bedeutend niedrigeren als dem gegenwärtig notirten Curse gekauft und hat die Absicht, in der Speculation weiter zu verbleiben, muss jedoch fürchten, den bereits erzielten Gewinn wieder preiszugeben, so zahlt er lieber einen bestimmten Betrag als Prämie für das Recht, diese Quantität zu dem gegenwärtig notirten Course innerhalb einer bestimmten Frist liefern zu können. Hiedurch sichert er sich einen Theil des erzielten Gewinnes, hat aber gleichzeitig die Chance, einen grösseren Gewinn zu erzielen, ohne in ein weiteres Risico einzugehen.

Besitzt Jemand die Meinung, dass eine nennenswerthe Coursvariation bevorsteht, ohne sich darüber im Klaren zu sein, ob dieselbe bei fallendem oder steigendem Course sich vollziehen wird, so kann er ein zweiseitiges Prämiengeschäft abschliessen, d. h. er zahlt eine Prämie für das Recht, mit dem gegenwärtig notirten Course eine Quantität eines bestimmten Börsewerthes beziehen oder liefern zu können. In diesem Falle verkauft er dann bei gestiegenen Coursen oder kauft bei gefallenen Coursen, je nachdem sich hiezu Gelegenheit bietet. Er kann auf die Weise die verschiedenen Positionen ausnützen, da er nach beiden Richtungen hin den Rücken gedeckt hat, indem das Risico der jeweiligen entgegengesetzten Coursrichtung auf den Prämienzieher überwälzt ist.

Wird bei einem doppelten Prämiengeschäfte die Prämie nicht gleich zu Anfang des Geschäftes entrichtet, sondern am Schlusse desselben, so wird ein solches Geschäft nicht mehr ein Prämiengeschäft auf Geben und Nehmen genannt, sondern eine Stellage. Derjenige Contrahent, welcher stellt, räumt dem anderen Contrahenten das Recht ein und verpflichtet ihn gleichzeitig, eine bestimmte Quantität an Börsewerthen nach einem bestimmten Termine zum gegenwärtig notirten Course entweder unter Zuschlag der vereinbarten

Prämie auf Geben und Nehmen zu beziehen oder unter Abzug der gleichen Prämie zu liefern.

Ist z. B. die zweiseitige Prämie auf Geben und Nehmen a und der zur Zeit des Stellage-Abschlusses notirte Cours des betreffenden Börsewerthes C, so besteht die Stellage zwischen den Coursen

$$C - a \qquad \text{und} \qquad C + a$$

d. h. der Contrahent, dem die Stellage gestellt wurde, besitzt das Recht und geht zugleich die Verpflichtung ein, entweder mit dem Course $C - a$ die vereinbarte Quantität an Börsewerthen zu einem bestimmten Termine zu liefern oder mit dem Course $C + a$ dieselbe zu beziehen.

Der Unterschied zwischen den vereinbarten Coursgrenzen der Stellage ist daher doppelt so gross wie die zweiseitige Prämie, so dass in der Mitte der beiden Coursgrenzen der zur Zeit des Stellage-Abschlusses notirte Cours liegt. Es kann jedoch auch eine Verschiebung dieser Coursgrenzen stattfinden, indem der Mittelcours höher oder tiefer als der notirte vereinbart wird, welche Form der Stellage eine Kunststellage genannt wird. In allen Fällen wird jedoch die Spannung zwischen den beiden Coursgrenzen der zweifachen zweiseitigen Prämie, d. i. $2\,a$ gleichkommen, wodurch der zur Zeit des Stellage-Abschlusses notirte Cours stets innerhalb der vereinbarten Coursgrenzen liegen muss.

Die Leistung für die zweiseitige Prämie gilt bekanntlich im Vorhinein, hingegen bei der Stellage im Nachhinein, sonst bleibt sich dieselbe in beiden Fällen gleich, da die Erklärung blos nach einer Richtung hin erfolgt, indem der Contrahent entweder die Stücke bezieht oder liefert, also bei der Stellage stets nur den der halben Spannung entsprechenden Coursunterschied leistet, welcher der zweiseitigen Prämie gleichkommt.

Auch die assecuratorische Bedeutung der Stellage ist die gleiche wie jene der zweiseitigen Prämie, nur ist bei der sogenannten Kunststellage, wo naturgemäss die eine Coursgrenze dem zur Zeit des Stellage-Abschlusses notirten Course näher kommt, das Risico nach dieser Seite um soviel grösser, als es durch die gleich weiter entfernte zweite Coursgrenze nach der anderen Seite kleiner wird.

Die einseitige Prämie, welche im Principe der halben zweiseitigen Prämie — gemäss dem getheilten Risico — gleichkommt, wird überdies noch durch den Umstand beeinflusst, welcher sich in dem vorhandenen Stückemangel oder Stückeüberfluss äussert, so dass in dem Falle, wo Kostgeld gezahlt wird, die Prämien auf Nehmen theuerer werden, als die halben Prämien auf Geben und Nehmen. Der umgekehrte Fall tritt ein, wenn Leihgeld gezahlt wird, was durch eine starke Contremine an der Börse bewirkt zu werden pflegt. In Folge dessen werden die Prämien auf Geben theuerer, als die halben Prämien auf Geben und Nehmen.

Die Analogie im Wesen der mathematischen Beziehung zwischen den discontirten Zahlen der Lebenden und den Leibrenten-Misen mit jenem der grundlegenden Relation des allgemeinen Absterbegesetzes.

II.

In der vorigen Abhandlung galten unsere Ausführungen der Uebereinstimmung der Beziehung zwischen der Curve der Lebenden und der Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten einerseits, mit jener zwischen der Curve der discontirten Zahlen der Lebenden und der Curve der Leibrenten-Misen andererseits. Es ergab sich jedoch auch die Conclusion, dass die hieraus entspringende Relation zwischen der Curve der Lebenden und der Curve der discontirten Zahlen der Lebenden anderer Beschaffenheit ist, als diejenige zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Leibrenten-Misen. Gegenüber dem in der Form 7) dargestellten Ausdrucke der ersteren Relation, gelangt nun die letztere durch den Ausdruck

$$8)\qquad \frac{w_x}{M_x} = \frac{a + b \,.\, C_1 \,.\, \mathcal{F}(t)}{a_1 + b_1 \,.\, (C_1)_1 \,.\, \mathcal{F}(t)}$$

zur Darstellung. Wenn auch im Wesen der beiden Formen, abgesehen von den bezüglichen Werthen der jeweiligen Constanten, kein nennenswerther Unterschied besteht, so ist derselbe destomehr in der Beschaffenheit der in Betracht kommenden Functionen vorhanden, welche zufolge ihrer mathematischen Bedeutung hier in verschiedener Weise ihren Einfluss geltend machen. Für unsere weiteren Untersuchungen dürfte dieser Umstand insoferne von Belang sein, als unter Berücksichtigung desselben jede Missdeutung der wirklich vorhandenen Analogien vermieden wird.

Die interessanten Folgerungen, welche aus den thatsächlich bestehenden Analogien entspringen, reichen vollständig hin, um eine eingehende Untersuchung dieses Gegenstandes zu lohnen.

Berücksichtigt man nämlich den durch die Mise allein ausgedrückten Werth der einmaligen Prämie für die Versicherung auf den Todesfall

$$9)\qquad P_x = S\left[1 + M_x\left(\frac{1}{r} - 1\right)\right]$$

dessen mathematische Ableitung in unserer Abhandlung „Zur Theorie und näherungsweisen Berechnung der Prämienreserve eines Versicherungsstockes“, V, durchgeführt ist, und basirt dieselbe auf den Versicherungsbetrag $S = 1$, so ergibt sich hieraus durch Differentiation

$$10)\qquad P'_x = \left(\frac{1}{r} - 1\right) M'_x$$

und dieses auf die Form 3) angewendet, ergibt die Differentialgleichung jener Curve, welche die einmalige Prämie P_x als Function des Alters x analytisch darstellt, d. h.

$$11)\qquad P'^2_x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r} - 1\right) P'_x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - 1\right)^2 = \left(\frac{P_x - 1}{x + 2\,C}\right)^2$$

worin neben dem Aufzinsungsfactor r und der Constante C noch jene durch die Integration dieser Gleichung bedingten Constanten in Betracht zu ziehen sind.

Wir haben es hier also zum ersten Male mit einer mathematischen Form zu thun, in welcher die einmalige Prämie als reine Function des Alters zum Ausdrucke gelangt und können aus deren Beschaffenheit ersehen, dass dieselbe gleichfalls auf einer Differentialgleichung zweiter Ordnung beruht, deren Wesen ein originäres ist. Es ergibt sich nämlich hieraus eine mit der Form 4) übereinstimmende Relation, welche folgendermassen lautet

$$12)\qquad P'_x = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{r}-1\right) \pm \sqrt{\frac{1}{16}\left(\frac{1}{r}-1\right)^2 + \left(\frac{P_x-1}{x+2C}\right)^2}$$

und unter Berücksichtigung der zugehörigen Constanten ebenso wie jene allen Anforderungen entspricht, welche die Integrabilität bedingen.*)

Hinsichtlich des Wesens und der Beschaffenheit dieser analytischen Beziehung, welche zwischen der einmaligen Prämie und dem Alter besteht, müssen offenbar auch alle jene Merkmale, welche dem Grundbegriffe der Differentialgleichungen zweiter Ordnung anhaften, sich ebenso geltend machen, wie bei allen Formen, welche dem gleichen oder ähnlichen mathematischen Begriffe unterliegen.

Die früheren Untersuchungen haben dargethan, dass das originäre Princip der Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf einer natürlichen Beziehung zwischen einer Geraden und einer gleichseitigen Hyperbel mit variablen Constanten beruht, welche in der Uebereinstimmung der sogenannten logarithmischen Differentialquotienten derselben und deren congruenter Variation ihren Ursprung hat.

Diese Function der logarithmischen Differentialquotienten, welche bisher in der mathematischen Wissenschaft nie in Betracht gezogen wurde und auch sonst keine Beachtung gefunden hat, dürfte in der Zukunft für die Lösung einer grossen Anzahl wichtiger wissenschaftlicher Probleme von grosser Bedeutung werden.

Jene natürliche Beziehung gelangt auch in unserem Falle zur Geltung und bildet hier das Merkmal der bereits erwähnten Analogie im Wesen der mathematischen Beschaffenheit dieser Formen.

Die Gleichung 9), in welcher die Beziehung zwischen der einmaligen Prämie und der Leibrenten-Mise analytisch zur Darstellung gelangt, stellt die Function einer Geraden dar, deren Neigungswinkel durch die Tangente $\frac{1}{r} - 1$ zum Ausdrucke gelangt und deren Schnittpunkt mit der Ordinatenaxe den Abstand 1 von der Abscissenaxe aufweist. Jene dieser Geraden entsprechende analytische Function

$$P_x = \left(\frac{1}{r} - 1\right) M_x + 1$$

mit deren Differentiation sich die Form

$$\frac{dP_x}{dM_x} = \frac{1}{r} - 1$$

*) Siehe die bezüglichen Untersuchungen in der VIII. Lieferung des Werkes.

als Ausdruck der dem Neigungswinkel dieser Geraden entsprechenden Tangente ergibt, correspondirt nämlich mit einer gleichseitigen Hyperbel, deren Gleichung durch den Ausdruck

$$\left(p_x - \frac{1}{r} + 1\right) M_x = 1$$

gegeben ist. Derselbe entspringt der bekannten Formel für die jährliche Prämie

13) $$p_x = S\left(\frac{1}{M_x} + \frac{1}{r} - 1\right)$$

in welcher die Versicherungssumme $S = 1$ gesetzt wurde. Wenn nun auch in der Entgegenstellung dieser beiden speciellen analytischen Functionen die Variation der Constanten ausser Betracht kommt, so ist hierin dennoch das Merkmal jener Elemente gegeben, welche das analytische Wesen des ganzen Problemes charakterisiren.

Ueber das Wesen dieser gleichseitigen Hyperbel, welche die Beziehung zwischen der Jahresprämie einer Todesfallversicherung und der Mise einer lebenslänglichen Leibrente analytisch darstellt, haben wir in der VI. Lieferung dieses Werkes (S. 17) uns näher ausgesprochen und gleichzeitig die verwandte Beschaffenheit der Leibrenten-Mise und der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer in ihrer functionellen Bedeutung dargethan.

Die Gerade und die gleichseitige Hyperbel bilden nun auch die Grundlage der analytischen Beziehungen zwischen der Curve der discontirten Zahlen der Lebenden und der Curve der Leibrenten-Misen, nur gelangt hier die Variation der Constanten ebenso zur Geltung, wie bei der Beziehung zwischen der Curve der Lebenden und der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer. Unseren diesbezüglichen Ausführungen in der VIII. Lieferung dieses Werkes*) gemäss, äussern sich jene diesen Umstand kennzeichnenden Functionen in den Formen

14) $$\frac{4\,(w_x - a)}{x + 2\,C} = b\,\frac{1 - t^2}{2\,t} \quad \text{und} \quad (L_x - A)\,(x + 2\,C) = 8\,C_1\,C_3\,\frac{t - 1}{t^{\frac{1}{3}}\,(t - 3)^{\frac{5}{3}}}\,,$$

deren Wesen offenbar dem analytischen Begriffe jener beiden Linien entspricht.

Darnach ergibt sich für die Curve der discontirten Zahlen der Lebenden und die Curve der Leibrenten-Misen die beziehungsweise analoge Beschaffenheit, indem die betreffenden Gleichungen sich folgendermassen gestalten:

15) $$\frac{4\,(M_x - a_1)}{x + 2\,C} = b_1\,\frac{1 - t^2}{2t} \quad \text{und} \quad (D_x - A_1)\,(x + 2\,C) = 8C_1 \,.\, C_3\,\frac{t - 1}{t^{\frac{1}{3}}(t - 3)^{\frac{5}{3}}}$$

Die allgemeine Form dieser Gleichungen gelangt daher durch die Ausdrücke

$$M_x = \nu \,.\, x + \lambda \qquad \text{und} \qquad (D_x - A_1)\,(x + 2\,C) = \varkappa$$

zur Darstellung, wobei ν, λ und $\varkappa$ variable Constanten bedeuten, so dass

---

*) Siehe die Formeln 4) und 19) der Abhandlung: „Die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden als Element einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und die hieraus entspringenden Conclusionen" (Seite 47 und 61).

offenbar die Function der Geraden und der gleichseitigen Hyperbel auch hier das charakterische Merkmal der Beschaffenheit der in Beziehung zu einander stehenden Curven bildet.

Die Wesenheit der Beziehung der genannten beiden Linien tritt also in allen Phasen dieses Problemes auf und bildet gewissermassen das Analogon des sich hier vollziehenden mathematischen Processes.

Als einfaches Beispiel einer solchen Gleichförmigkeit mag die in der Abhandlung: „Zur Theorie und näherungsweisen Berechnung der Prämienreserve eines Versicherungsstockes", V. (fünfte Lieferung) ermittelte allgemeine Form der Prämienreserve einer Todesfallversicherung in Betracht gezogen werden. Der Form 37) dieser Abhandlung gemäss, besteht die Relation

16) $${}^{a+m}Res\,(p_a) = S\left(1 - \frac{M_{a+m}}{M_a}\right)$$

welche für den Fall, als die Versicherungsumme $S = 1$ angenommen wird, durch Transformation in diejenige von

17) $$(1 - {}^{a+m}Res\,(p_a))\,M_a = M_{a+m}$$

übergeht. Wird nun hierin, dem eigentlichen Wesen dieser Form entsprechend, m als variable Constante angesehen, so hat man es hier wieder mit einer gleichseitigen Hyperbel mit variabler Constante zu thun, als deren Ordinate die Prämienreserve und als deren Abscisse die Leibrenten-Mise im Zeitpunkte des Versicherungsabschlusses fungirt, während die Leibrenten-Mise im Zeitpunkte der Reserve-Ermittlung, entsprechend der Variabilität der Versicherungsdauer m, die variable Constante bedeutet.

Anders stellt sich jedoch der Fall, wenn der reciproke Werth der Leibrenten-Mise im Zeitpunkte des Versicherungsabschlusses die Tangente des Neigungswinkels der Geraden darstellt, während die Mise im Zeitpunkte der Reserve-Ermittlung und die Prämienreserve die Coordinaten der Geraden bedeuten, so dass die bezügliche Function folgendermassen zur Darstellung gelangt:

18) $${}^{a+m}Res\,(p_a) = \left(-\frac{1}{M_a}\right) M_{a+m} + 1$$

Unter diesen Voraussetzungen haben wir es wieder mit der Gleichung einer Geraden mit variabler Constante zu thun, welche offenbar mit der zuvor dargestellten Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel mit variabler Constante correspondirt.

Unter Bezugnahme auf die unterschiedlichen Versicherungs-Combinationen, bei welchen die entsprechende Modification der Mise ausserdem noch in Betracht kommt, ist es natürlich, dass die Variation der Constanten noch grössere Bedeutung erlangt, als dies bei der einfachen Todesfallversicherung zu Tage tritt. Zufolge dieser Ausführungen muss es als unzweifelhaft gelten, dass für die discontirten Zahlen der Lebenden und die Leibrenten-Misen ebenfalls jene Voraussetzungen gelten, welche das System der originären Wahrscheinlichkeitscurven bedingt.

Das börsenmässige Prämien- und Stellage-Geschäft in seiner Bedeutung vom assecuratorischen Gesichtspunkte.

II.

Bisher wurde dieser Gegenstand stets vom Standpunkte desjenigen betrachtet, der die Prämie zahlt, der sich also assecuriren will gegen die Gefahren der Speculation. Anders stellt sich die Sache vom Standpunkte desjenigen, der sich die Prämie zahlen lässt, also das Risico übernimmt. Dieser setzt sich den Gefahren aus und glaubt sich hinlänglich entschädigt durch die bezahlte Prämie. Doch auch hier spielt das Princip der grossen Zahlen die gleiche Rolle wie bei anderen Versicherungsarten. Je grösser die Zahl der eingegangenen Versicherungen, desto kleiner wird das durchschnittliche Risico. Derjenige, welcher eine grosse Zahl der verschiedensten Assecuranzgeschäfte schliesst, wird bei gehöriger Wahl der Prämien höchst wahrscheinlich bedeutenden Gewinn aus solchen Geschäften ziehen.

Grosse Banken und Bankhäuser pflegen in jenen Papieren, die sie in grosser Menge besitzen, fortgesetzt Prämiengeschäfte und Stellagen abzuschliessen, sich hiedurch ausser den gewöhnlichen Zinsen und Dividenden, welche die Papiere an und für sich tragen, meistens sehr ergiebige Ertragsquellen schaffend.

Je geringer die Gefahr des Obligos ist, welches derjenige Contrahent, der sich die Prämie zahlen lässt, durch den mit der Prämie bedingten eventuellen Verzicht des anderen Contrahenten hinsichtlich der vereinbarten Verpflichtung übernimmt, desto kleiner ist natürlich das Risico, welches er eingeht. Nicht die eingegangene Verpflichtung diesem Contrahenten gegenüber, ihm zu einem gewissen Zeitpunkte die vereinbarten Stücke etwa zu liefern, bildet also die Gefahr, da eine solche Abmachung nichts anderes als ein einfaches Termingeschäft bedeuten würde, sondern die Möglichkeit, dass derselbe von diesem Rechte im gegebenen Falle keinen Gebrauch macht. Wenn daher die Abmachung getroffen wird, dass derjenige, der die Prämie zahlt, das Recht hat, nach acht Tagen mit dem gegenwärtig notirten Curse eine bestimmte Quantität von Börsenwerthen vom anderen Contrahenten eventuell zu beziehen, so liegt nicht in dem Rechte des Bezuges, sondern im Rechte, auf diesen Bezug eventuell zu verzichten, der Werth der Versicherung und die eingegangene Gefahr desjenigen Contrahenten, der sich die Prämie zahlen lässt, liegt in der allfälligen Bereithaltung der Stücke zur eventuellen Disposition des anderen Contrahenten. Bei der Stellage aber ist es die Alternative, welche in dem Belieben des anderen Contrahenten liegt, auf das eine Recht des Bezuges oder das andere Recht des Lieferns zu verzichten, deren Wesen das eingegangene Risico bedingt.

Derjenige Contrahent, der sich die Prämie zahlen lässt (der Versicherer), wird demzufolge eine desto geringere Gefahr eingehen, je leichter es ihm ankommt, eine solche Bereithaltung der Stücke zur Disposition des anderen Contrahenten zu bewirken, ohne desswegen auf eine unvortheilhafte Speculation

eingehen zu müssen. Ein solcher günstiger Umstand tritt nun ein, wenn eine grosse Anzahl derartiger Versicherungen gleichzeitig in Betracht kommt, u. zw. bei Cursen, die sich zwischen nahen Grenzen bewegen, so dass die Möglichkeit einer grösseren Anzahl entgegengesetzter Dispositionen vorhanden ist, welche sich in ihrer Wirkung, betreffend das eingegangene Risico, gegenseitig theilweise oder vollständig aufheben. Dies kann, wenn es sich um verschiedene Arten von Börsenwerthen handelt, sowohl hinsichtlich des qualitativen als auch des quantitativen Risicos der Fall sein, je nachdem gemäss der Verschiedenheit der eingegangenen Versicherungen, bei welchen das Risico des einen dasjenige des Anderen ausschliesst, günstige und ungünstige Fälle einander die Waage halten, oder nach der einen oder anderen Richtung hin überwiegen.

Ueber die Beschaffenheit der übernommenen Gefahren entscheiden wohl selbstverständlich die vorkommenden Cursveränderungen in steigendem oder fallendem Sinne, doch werden bei richtiger Wahl der Prämien und bei genügender Zahl von verschiedenen Engagements stets den ungünstigen Fällen die entsprechenden günstigen Fälle entgegenstehen, so dass immer nur ein Bruchtheil der eingegangenen Verpflichtungen das thatsächliche Obligo darstellen wird, welches unter allen Umständen in der Prämieneinnahme eine reichliche Deckung findet.

Im Allgemeinen bilden alle das börsenmässige Prämien- und Stellagegeschäft betreffenden Abmachungen eigentlich Termingeschäfte, bei welchen das Recht, im Zeitpunkte des abgelaufenen Termines nach Belieben zurückzutreten, durch ein zu zahlendes Reugeld erkauft wird; nur gilt dieses Belieben bei Doppelprämien sowohl für Geben als auch für Nehmen, während es bei Stellagen einfach in eine Alternative in diesem oder jenem Sinne übergeht.

Nehmen wir nun an, dass die eine der vereinbarten Grenzen einer Stellage entweder nach unten oder nach oben mit dem Curse im Zeitpunkte der Erklärung genau übereinstimmt, so wird weder der eine noch der andere Contrahent etwas gewinnen oder verlieren, da bei dem eintretenden Curse der eine geben und der andere nehmen wird oder umgekehrt, gleichzeitig aber beide sich wieder bei dem vorhandenen Curse decken können. Eine solche Stellage wird thatsächlich beide Contrahenten hinsichtlich der vereinbarten Grenzen befriedigen müssen, weil deren Wesen genau jenen Anforderungen entspricht, welche das Princip von Angebot und Nachfrage bedingt, insoferne in demselben die Ausgleichung der gegenseitigen Vortheile beider Contrahenten sich manifestirt. Sind daher die Grenzen der Stellage richtig gewählt, so ist mit Bestimmtheit vorauszusetzen, dass hiedurch das gegenseitige Interesse beider Contrahenten gleichmässig berücksichtigt wurde, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass Leistung und Gegenleistung der Beiden sich die Waage halten, ist in diesem Falle gleich der Einheit oder mit anderen Worten, dass Risico, welches derjenige Contrahent, der sich die Prämie zahlen lässt, mit der Bereithaltung der Stücke zur alternativen Disposition des anderen Contrahenten eingeht, entspricht allen Voraussetzungen gemäss der vereinbarten Gegenleistung. Ein solcher concreter Fall wird aber nur in seltenen Fällen eintreten, da die

Fixirung der Stellagegrenzen mehr auf der übereinstimmenden Meinung der beiden Contrahenten beruht, und insbesondere von der Beschaffenheit der auf Grund dieser Stellage einzugehenden Speculation desjenigen Contrahenten abhängt, welcher sich stellen lässt, daher das allgemeine Wesen der Stellage neben den Merkmalen der Versicherung auch jene der Speculation an sich trägt.

Der genannte concrete Fall lässt sich mit einer Feuerversicherung vergleichen, bei welcher der Schadenersatz für die durch einen thatsächlich eingetretenen Brand vernichteten Gegenstände der bezahlten Prämie gleichkommt. Da jedoch dieser Gesichtspunkt in der Versicherung nicht massgebend ist, im Gegentheile das Princip der Versicherungsinstitution auf der Association beruht, so wird nicht absolut das Risico für die einzelne Versicherung der einzelnen Prämie, sondern dasjenige sämmtlicher Versicherungen der Summe sämmtlicher Prämienleistungen entsprechen müssen, wenn Leistung und Gegenleistung einander die Waage halten sollen. Es ist also der speculativen Beschaffenheit der Stellage im Versicherungsprincipe insoferne vollends Raum gelassen, als Voraussetzung und Calcul die Grenzen derselben bedingen.

Immerhin ist der genannte Fall interessant genug, da durch denselben jene a priori bestimmten Umstände, deren Wesen die Grenzen der Stellage bedingt, mit den a posteriori eintretenden Ereignissen in Beziehung gebracht werden und auf diese Weise Schlüsse möglich sind, welche weiteren Combinationen dieser Versicherungsart als Grundlage dienen.

Nehmen wir also an, dass die auf Grund von Voraussetzung und Calcul bestimmten Grenzen bei einer grossen Anzahl von Stellagegeschäften im Durchschnitte jenen Anforderungen entsprechen, welche hinsichtlich der zu zahlenden Prämie als Leistung und bezüglich des übernommenen Risicos als Gegenleistung in Betracht kommen, dann kann auch jene Grundlage als richtig gelten, welche jenen concreten Fall zum Ausgangspunkte der hier zu berücksichtigenden Normen einer Versicherung im Allgemeinen macht, indem selbe auf dem Wesen einer Stellage mit einem bestimmten Termine jenes einer Stellage mit einem doppelt und mehrfach langen Termine bei sonst gleichen Voraussetzungen aufbaut, ebenso wie sie im gleichen Sinne einen entsprechend verlässlichen Schluss aus einer Stellage mit fixirten Grenzen auf eine solche mit weiter gezogenen Grenzen, welche unabhängig von der Prämiendisposition sind, zulässt.

Die Stellage hat bekanntlich eine desto grössere assecuratorische Berechtigung, je grösser die Wahrscheinlichkeit einer bevorstehenden Cursvariation ist und die Grenzen derselben werden eine desto grössere Spannung aufweisen, je bedeutendere Cursvariationen zu erwarten sind. Sind daher die Cursgrenzen weiter gezogen, als dies der wahrscheinlich zu erwartenden Cursvariation entspricht, so erleidet derjenige Contrahent, dem gestellt wurde, von vornherein einen effectiven Schaden, da dessen Leistung diejenige übersteigt, welche der andere Contrahent durch die Uebernahme des Risicos rechtfertigen kann. In diesem Falle wird sich also die berechtigte Leistung nicht mit der zwischen den Grenzen der Stellage und dem Mittelcurse vor-

handenen Cursspannung decken, sondern sie wird entsprechend den gegebenen Verhältnissen sich kleiner gestalten. Das Risico desjenigen Contrahenten, welcher stellt, besteht nämlich in der allfälligen Bereithaltung der Stücke zur alternativen Disposition des anderen Contrahenten. Je geringer daher die Wahrscheinlichkeit ist, dass die fixirten Grenzen der Stellage durch die Cursbewegung im vereinbarten Termine überschritten werden, desto geringer ist dieses Risico. Da nun durch die weiter gezogenen Grenzen der Stellage im gleichen Verhältnisse die Leistung des anderen Contrahenten wächst, weil dieselbe an diese Grenzen gebunden ist, so erleidet dieser hiedurch eine doppelte Benachtheiligung, indem die Leistung desselben im gleichen Verhältnisse steigt, als das Risico des anderen Contrahenten abnimmt.

Dieses auf die doppelte Prämie übertragen, bedeutet, dass die vom Zeitpunkte der Abmachung bis zum Eintreten des gestellten Termines sich vollziehende Cursvariation mindestens so gross sein müsste, als die doppelte Prämie und je geringer die aus den vorhandenen Voraussetzungen sich ergebende Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen dieses Umstandes ist, desto geringer wird das Risico, welches derjenige, der sich die Prämie zahlen lässt, eingeht. Er riskirt in diesem Falle nicht nur eine kleinere Cursdifferenz, sondern zieht einen ebenso grossen Betrag als Prämie mehr ein.

Diese Grenze, welche die Cursvariation vom Zeitpunkte der Abmachung bis zum Eintreten des gestellten Termines erreichen müsste, wenn das Interesse beider Contrahenten gleichmässig gewahrt sein soll, ist hinsichtlich der wesentlichen Beschaffenheit dieses Calculs geeignet, die Grundlage weiterer Conclusionen zu bilden.

Angenommen, es ist die Wahrscheinlichkeit der erforderlichen Cursvariation für eine gewöhnliche Stellage bekannt, so wird die jeweilige Wahrscheinlichkeit einer stets um die Einheit wachsenden Cursvariation immer um sovielmal kleiner sein, als das betreffende Ausmass der Cursvariation in dieser Einheit enthalten ist. Da jedoch die Wahrscheinlichkeit der Cursvariation im geraden Verhältnisse zum Risico sich befindet, so muss die Leistung desjenigen Contrahenten, dem gestellt wurde, in jenem Verhältnisse stets kleiner werden, als die Grenzen der Stellage um die supponirte Cursvariation weiter hinausrücken.

Hiedurch vollzieht sich offenbar eine Abstrahirung der Prämienleistung von den Grenzen der Stellage, so dass bei Aufrechterhaltung deren Charakters die Leistung der Prämie abgesondert im Vor- oder Nachhinein stipulirt werden kann. Aber auch die Bedingung, welche der Stellage anhaftet, dass jenes in derselben dem Contrahenten eingeräumte Recht entweder bei der hohen Grenze beziehen oder bei der tiefen liefern zu können, gleichzeitig eine Verpflichtung desselben nach einer oder der anderen Cursrichtung involvirt, fällt unter diesen Umständen hinweg, da diese Bedingung dem der Stellage eigenthümlichen Wesen der Prämienleistung entspringt, welches unter den gegebenen Umständen seine Bedeutung verliert.

Die Analogie im Wesen der mathematischen Beziehung zwischen den discontirten Zahlen der Lebenden und den Leibrenten-Misen mit jenem der grundlegenden Relation des allgemeinen Absterbegesetzes.

III.

Mit Rücksicht auf die bisherigen Ausführungen steht es ausser Frage, dass jene für das allgemeine Absterbegesetz geltenden Regeln im beziehungsweisen Sinne auch auf die Beziehung zwischen der Curve der discontirten Zahlen der Lebenden und jener der Leibrentenmisen anwendbar sein müssen. Wird nun der Umstand erwogen, dass diese Regeln in ihrer Definition vom versicherungstechnischen Gesichtspunkte werthvolle Aufschlüsse über das Wesen und den Zusammenhang der diesbezüglichen Functionen zu bieten vermögen, wie auch als Schlüssel für die Lösung mancher complicirten versicherungstechnischen Fragen sich eignen, so muss hieraus auf die besondere Bedeutung dieser unserer Untersuchungen geschlossen werden.

Wie bereits in der vorigen Abhandlung über dieses Thema hervorgehoben wurde, sind die analytischen Beziehungen zwischen der gleichseitigen Hyperbel und der Geraden für das gesammte versicherungstechnische System von besonderer Wesenheit, indem diese in allen Phasen desselben auftreten und demgemäss das Analogon des sich hier vollziehenden mathematischen Processes bilden. Diese Thatsache wurde in der vorigen Abhandlung bei der Reserveformel für die einfache Todesfallversicherung demonstrirt und hiedurch das Wesen einer unter Zugrundelegung veränderter Constellationen bestehenden homogenen Beziehung zwischen der Reserve und den Leibrentenmisen dargethan, so dass aus den resultirenden Ergebnissen auf ein ähnliches Gesetz geschlossen werden kann, wie wir es bei den originären Wahrscheinlichkeitscurven vorfinden. Wohl werden hier die Abhängigkeiten der einzelnen Variablen in anderer Weise mathematisch zur Geltung kommen und dürfte auch das Wesen der variablen Constanten gänzlich verschiedenen Bedingungen Rechnung tragen, als dies bei jenen das Absterbegesetz charakterisirenden Functionen der Fall ist, doch das Merkmal einer Beziehung zwischen den genannten beiden Linien wird bei allen versicherungstechnischen Combinationen stets deutlich wahrzunehmen sein.

In Bezug auf dieses Charakteristikon der versicherungstechnischen Functionen ist besonders die merkwürdige Beschaffenheit jener Beziehung hervorzuheben, welche zwischen der einmaligen Prämie und der Leibrentenmise bei veränderlichem Aufzinsungsfactor besteht*). Wir wollen hier nur das Beispiel der einfachen Todesfallversicherung anführen, wo diese Beschaffen-

*) Siehe die Beziehung zwischen der einmaligen Prämie und der Leibrenten-Mise mit Rücksicht auf den zu Grunde gelegten Zinsfuss. Lief. VIII.

heit besonders deutlich hervortritt. Den Formen 9) und 10) gemäss ist bekanntlich

$$\frac{P_x - 1}{M_x} = \frac{d P_x}{d M_x} = \frac{1}{r} - 1 \quad \text{worin } r = 1 + q$$

Dies repräsentirt offenbar die Gleichung einer Geraden, u. zw. mit variabler Constante, sobald der Aufzinsungsfactor r als veränderlich angesehen wird.

Nimmt man nun an, dass $\frac{P_x - 1}{M_x}$ eine einzige, vom Alter x und dem variablen Aufzinsungsfactor r abhängige Variable y bedeutet, so ergibt sich die Gleichung

19) $(y + 1)\, r = 1$ respective $(y + 1)\,(q + 1) = 1$

worin $Q = 100\,.\,q$ den veränderlichen Zinsfuss bedeutet. Dies stellt nun offenbar wieder die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel dar, deren Pol im Anfangspunkte des Axensystemes sich befindet und deren Halbaxe $\sqrt{2}$ ist.

Nun erhalten wir aber analog der bekannten dem Absterbegesetze entsprechenden Regel, welche in unserer Abhandlung „Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln" I (neunte Lieferung) zur Darstellung gelangt und folgendermassen lautet

20) $$\left(\frac{d\, l\, w_x}{d\, l\, L_x} + 1\right)\left(\frac{w'_x}{b} + 1\right) = 1$$

die entsprechende zwischen den discontirten Zahlen der Lebenden und den Leibrentenmisen bestehende Form

21) $$\left(\frac{d\, l\, M_x}{d\, l\, D_x} + 1\right)\left(\frac{M'_x}{b} + 1\right) = 1$$

welche aus der bezüglichen analogen Grundform

$$\frac{d\, l\, D_x}{dx} + \frac{d\, l\, M_x}{dx} = \frac{b}{M_x}$$

entspringt und den gleichen Voraussetzungen wie diese Rechnung trägt. Die in den Formen 20) und 21) dargestellten Regeln stellen nun Gleichungen einer vollkommen identischen gleichseitigen Hyperbel dar, wie die Gleichung 19), so dass aus dieser Uebereinstimmung interessante Schlüsse gezogen werden können. Wird nämlich in der Gleichung

$$(y + 1)\,(q + 1) = 0 \qquad \text{der Werth} \qquad y = \frac{d P_x}{d M_x}$$

im Sinne obiger Transformation in Anspruch genommen, so enspringt die Relation

22) $$\left(\frac{d P_x}{d M_x} + 1\right)\left(\frac{e^{P_x} . P'_x}{b} + 1\right) = 1$$

so das der variable Zinsfuss durch den Werth

23) $$q \quad \frac{e^{P_x} . P'_x}{b}$$

zur Darstellung gelangen würde, während die entsprechende Grundform dem Wesen der gegebenen Functionen gemäss

24) $$\frac{d P_x}{dx} + \frac{d M_x}{dx} \quad b . e^{-P_x}$$

zu lauten hätte. Vorausgesetzt nun, die correspondirenden Coordinaten der hier verglichenen gleichgearteten Hyperbeln entsprechen in ihren stellvertretenden Functionen übereinstimmenden Altern x, so könnten die Relationen 23) und 24) als Grundlage für die Berechnung der Prämien und Misen bei verändertem Zinsfusse dienen.

Unter Berücksichtigung der vorliegenden Resultate lässt sich jedoch auch noch eine andere Conclusion für die Beschaffenheit der Beziehung zwischen der Mise und der einmaligen Prämie ziehen. Die Form 24) repräsentirt offenbar die transformirte Grundform einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche sich folgendermassen ausdrücken lässt

25) $$e^{P_x} . e^{M_x} \quad e^{- b \int e^{-P_x} . dx}$$

so dass auch die Gleichung

26) $$P_x + M_x \quad - b \int e^{-P_x} . dx$$

Geltung besitzt. Aus dieser lässt sich nun M_x eliminiren, indem für dasselbe deren durch die Variablen P_x und r ausgedrückter Werth gesetzt wird. Man erhält daher durch Substitution der Form

$$M_x \quad \frac{P_x - 1}{\frac{1}{r} - 1} \quad \text{die Relation} \quad \frac{P_x - r}{1 - r} \quad b \int e^{-P_x} dx$$

respective, falls auf beiden Seiten der Gleichung der Werth 1 abgezogen wird,

27) $$\frac{P_x - 1}{r - 1} \quad 1 + b \int e^{-P_x} dx$$

Wir haben es hier also mit einer zwischen dreien Variablen bestehenden Relation zu thun, welche dem Principe der originären Wahrscheinlichkeitscurven in modificirter Form entspricht. Durch Heranziehung der in Form 11) ausgedrückten Differentialgleichung für die einmalige Prämie

$$P'^2_x + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{r} \quad 1\right) P'_x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \quad 1\right)^2 \quad \left(\frac{P_x - 1}{r + 2C}\right)^2$$

ist es möglich, falls auch hier der Aufzinsungsfactor r als variabel vorausgesetzt wird, eine der in Betracht kommenden Variablen aus der Rechnung zu eliminiren. Da es sich uns nun darum handelt, die Veränderung der Prämie eines bestimmten Alters bei verändertem Aufzinsungsfactor zu er-

mitteln, so ist es naheliegend, dass zu diesem Zwecke die Elimination der das Alter darstellenden Variablen x vorzunehmen ist. Mit Hilfe der Form 27) gelangt man nun, sobald aus derselben der Werth von x, respective von dx dargestellt wird, durch Substitution zu der gesuchten Relation zwischen der einmaligen Prämie und dem Aufzinsungsfactor: und zwar ist dieselbe durch eine quadratische Differentialgleichung dritter Ordnung ausgedrückt.

Es gelangt nämlich der Werth für dx und x durch die Formen

$$\frac{e^{P_x}}{b} \cdot \frac{d\left(\frac{P_x - 1}{r - 1}\right)}{dr} = \frac{dx}{dr} \quad \text{respective} \quad \int \frac{e^{P_x}}{b} \cdot d\left(\frac{P_x - 1}{r - 1}\right) = x + 2C$$

zum Ausdrucke, so dass in der Form 11) sowohl die Substitution von $x + 2C$, als auch die entsprechende Derivation nach der Variablen r vorgenommen werden kann. Es ergibt sich daher die Gleichung 28)

$$\left(\frac{dP_x}{dr}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r} - 1\right)\frac{dP_x}{dr} \cdot \frac{\frac{e^{P_x}}{b} \cdot d\left(\frac{P_x - 1}{r - 1}\right)}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - 1\right)^2 \left(\frac{\frac{e^{P_x}}{b} \cdot d\left(\frac{P_x - 1}{r - 1}\right)}{dr}\right) =$$

$$(P_x - 1)^2 \left(\frac{d \int \frac{e^{P_x}}{b} \cdot d\left(\frac{P_x - 1}{r - 1}\right)}{dr}\right)^2$$

mittelst welcher auf directem Wege das allgemeine Veränderlichkeits-Gesetz der einmaligen Prämie bei veränderter Zinsfussgrundlage festgestellt zu werden vermag, wie auch mit Hilfe der Beziehung zwischen dieser und der Leibrentenmise die entsprechende jährliche Prämie ermittelt werden kann.

Auf die mathematische Beschaffenheit und Lösung dieser Art von Differentialgleichungen werden wir in unserer Allgemeinen Theorie betreffend die allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung später zurückkommen und wollen nur noch bemerken, dass unter den gegebenen Umständen, welche das Vorhandensein bekannter Zwischenglieder und deren Abhängigkeits-Verhältnisse involviren, die Lösung einer solchen Differentialgleichung sich weit einfacher gestaltet, als dies bei allgemein gehaltenen Suppositionen, welche das blosse Abhängigkeits-Verhältniss der in Beziehung stehenden Variablen zu kennzeichnen vermögen, der Fall wäre.

Das börsenmässige Prämien- und Stellage-Geschäft in seiner Bedeutung vom assecuratorischen Gesichtspunkte.

III.

Die früheren Ausführungen über diesen Gegenstand haben dargethan, dass auf Grundlage concreter, a priori gegebener Fälle Schlüsse hinsichtlich der assecuratorischen Beschaffenheit der Stellage zulässig sind, welche unabhängig vom speculativen Wesen derselben, die Beziehung zwischen dem Risico einer solchen und der hiefür zu leistenden Prämie zu kennzeichnen vermögen.

In der durch Vereinbarung zweier Contrahenten zu Stande gekommenen gewöhnlichen Stellage ist die zur Zeit der getroffenen Abmachung bestehende Wahrscheinlichkeit der erwartungsmässigen Cursvariation durch die fixirten Cursgrenzen gegeben, in deren Spannung gleichzeitig das Risico des einen Contrahenten mit der entsprechenden Gegenleistung des anderen Contrahenten in Uebereinstimmung gebracht ist. Durch die geringste willkürliche Veränderung der Spannung zwischen diesen Grenzen würde nun beim Wachsthum des Risicos auf der einen Seite die Prämie hiefür auf der anderen Seite kleiner werden und umgekehrt bei abnehmendem Risico auf der einen Seite die Prämie hiefür auf der anderen Seite grösser werden. In der durch diese Grenzen fixirten Cursspannung deckt sich daher jenes mit der erwartungsmässigen Cursvariation übernommene Risico des einen Contrahenten genau mit der in dieser Cursspannung gekennzeichneten Gegenleistung des anderen Contrahenten.

Mathematisch gedacht, bedeutet dies also nichts anderes, als den geometrisch-analytischen Schnittpunkt zweier Linien, von denen die eine in ihren Ordinaten die Risken, die andere in gleicher Weise die Prämien bei verschiedenen, als Abscissen fungirenden Suppositionen darstellt. Während also in diesem gemeinsamen Punkte der beiden Linien deren Ordinaten Risico und Prämie der gleichen Cursspannung Genüge leisten, werden für alle anderen Punkte die correspondirenden Risken und Prämien unterschiedlichen Cursspannungen entsprechen, d. h. die Prämiendisposition wird wohl angemessen dem vorhandenen Risico, jedoch unabhängig von der Fixirung der Stellagegrenzen sich vollziehen. Das Wesen einer derartigen Abmachung besteht daher in der Stellage, welche derart modificirt erscheint, dass bei derselben das Recht auf Geben oder Nehmen nicht gleichzeitig eine Verpflichtung involvirt, nachdem die Prämie im Vorhinein geleistet wird und in Folge dessen die sonst bestehende Voraussetzung für diese Verpflichtung entfällt.

In gleichem Sinne kann eine solche Abmachung als modificirte doppelte Prämie betrachtet werden, bei welcher der Curs, von dem ausgegangen wird, nach beiden Richtungen hin verschoben erscheint, und zwar wird eine im Vorhinein zu leistende Prämie stipulirt für das Recht, nach einem festgesetzten Termine bei einem bestimmten höheren Curse beziehen oder bei

einem bestimmten tieferen Curse liefern zu können, ohne jedoch hiezu irgendwie verpflichtet zu sein.

Das eigentliche Wesen eines solchermassen modificirten Prämien-, resp. Stellage-Geschäftes gestaltet sich also folgendermassen: Ein Contrahent räumt dem anderen gegen Leistung einer entsprechenden Prämie das Recht ein, nach des Letzteren Wahl an einem bestimmten Tage eine festgesetzte Quantität eines bestimmten Börsewerthes entweder ihm zu einem bedungenen niedrigen Curse zu liefern oder von ihm zu einem bedungenen höheren Curse zu nehmen. Der Zahler der Prämie ist nur berechtigt aber nicht verpflichtet, das Geschäft in einer der angegebenen Arten zu erfüllen. Der Contrahent, der die Prämie zahlt, wird also in diesem Falle blos dann sein Recht geltend machen, wenn die Cursvariation die vereinbarte Grenze zu dem vorgesehenen Zeitpunkte nach der einen oder anderen Richtung überschritten hat; er ist daher bei einer missglückten Speculation, ohne aus derselben herausgehen zu müssen, dagegen gesichert, den Verlust einer grösseren Cursdifferenz zu tragen, als diese mittelst der vereinbarten Grenzen gekennzeichnet wird.

Der zuvor angedeutete Grundzug des hier zur Anwendung gelangenden Wahrscheinlichkeitsprincipes gestattet bei Abstrahirung vom exacten Wesen des Calculs die Annahme eines aproximativen Verhältnisses, welches unter Berücksichtigung einer gewöhnlichen Stellage, deren Risiko eine unbestimmte Wahrscheinlichkeit involvirt, eine einfache Lösung der Frage zulässt. Der Grundsatz, nach welchem die jeweilige Wahrscheinlichkeit einer stets um die Einheit wachsenden Cursvariation immer um so vielmal kleiner sich gestaltet, als das betreffende Ausmass der Cursvariation in dieser Einheit enthalten ist, bezeichnet nämlich im Allgemeinen blos eine interpretirende Umschreibung des wirklichen, hier geltenden mathematischen Gesetzes und kann also blos im annäherndem Sinne dasselbe charakterisiren. Bei aproximativer Berechnung wird jedoch diese umschriebene Interpretation eine werthvolle Handhabe für die Aufstellung einfacher Formen bilden, welche ohne Anspruch auf Genauigkeit zu machen, immerhin geeignet sind, für eine annähernde Lösung die erforderliche Grundlage zu bieten.

Nehmen wir z. B. an, dass an einem bestimmten Tage die gewöhnliche Stellage 6 Gulden für 8 Tage betragen würde, d. h. also, die Spannung beträgt 3 Gulden über und 3 Gulden unter dem notirten Curse. Es würde nun ein Contrahent mit dem Anderen die Vereinbarung treffen, dass ihm der Letztere gegen eine bestimmte Prämienleistung das Recht einräume, nach 8 Tagen entweder bei 10 Gulden über den gegenwärtig notirten Curs einen Börsenschluss beziehen oder bei 10 Gulden unter dem gegenwärtig notirten Curse denselben liefern zu können, ohne jedoch verpflichtet zu sein, von diesem Rechte Gebrauch zu machen; wie hoch würde sich die hiefür zu entrichtende Prämie stellen?

Ist also für jene gewöhnliche Stellage die Wahrscheinlichkeit der Cursvariation um 3 Gulden hinauf oder herunter durch w allgemein ausgedrückt,

so wird die Wahrscheinlichkeit der Cursvariation um 4 Gulden hinauf oder herunter $w\left(1-\frac{1}{4}\right)$ und die Wahrscheinlichkeit der Cursvariation um 5 Gulden hinauf oder herunter $w\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$ sein, etc. Es ergibt sich somit als Wahrscheinlichkeit für die Cursvariation um 10 Gulden hinauf oder herunter

$$w_{10} = w\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{8}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)$$

und die Prämie, welche für das betreffende eingeräumte Recht zu zahlen ist, wird demgemäss durch die bezügliche Wahrscheinlichkeit und die Leistung, welche obiger gewöhnlicher Stellage entspricht, zum Ausdrucke gelangen, wobei die Wahrscheinlichkeit w gleich oder kleiner als $\frac{1}{2}$ sein kann, während gleichzeitig auf Grund der hier in Betracht kommenden Relation die Form

$$3 \,.\, w = 10 \,.\, w_{10} = V$$

als Regel gilt, worin V eine unbestimmte Constante darstellt.

Es gilt daher die allgemeine Formel

$$w_n = w \,.\left(1-\frac{1}{a+1}\right)\left(1-\frac{1}{a+2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{n+a-1}\right)\left(1-\frac{1}{a+n}\right)$$

welche den Anforderungen in dieser Hinsicht annähernd Rechnung trägt. Besteht die Vereinbarung nur nach einer Richtung hin, d. h. auf Geben, respective auf Nehmen, so wird naturgemäss die hiefür zu entrichtende Leistung nur die Hälfte betragen.

Das Princip, auf dem diese Rechnung aufgebaut erscheint, besteht in dem Verhältniss der abnehmenden Wahrscheinlichkeit der erwartungsmässigen Cursvariation zu der im Wachsthum begriffenen Cursspannung der in Betracht gezogenen modificirten Stellage.

Bezeichnet daher t den Termin, a die Cursspannung und w die Wahrscheinlichkeit, so gestaltet sich unter constanten Prämissen und bei unverändertem Termine das Verhältniss der Wahrscheinlichkeit zur Cursspannung auf Grund der gewöhnlichen Stellage folgendermassen:

1) $$\frac{a+\Delta a}{a} = \frac{w}{w+\Delta w}$$

Hieraus ergibt sich

$$(a+\Delta a)(w+\Delta w) = a \,.\, w$$

d. h. die Producte der Cursspannungen und der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten der erwartungsmässigen Cursvariation sind bei constanten Prämissen und unverändertem Termine einander gleich.

In weiterer Folge liefert dies den Ausdruck

$$w \,.\, \Delta a + a \,.\, \Delta w + \Delta w \,.\, \Delta a = 0$$

Lässt man nun Δw und Δa gegen Null verschwinden, so kann man das Product $\Delta w \,.\, \Delta a$ vernachlässigen und erhält demzufolge

2) $w \,.\, da + a \,.\, dw = 0$ respective $w \,.\, a = C$

d. h. werden die Grössen w und a als Variable angesehen, so unterliegen bei unverändertem Termine die Producte der Cursspannungen und der beziehungsweisen Wahrscheinlichkeiten einer gesetzmässigen Relation, welche in

analytischen Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel ihren Ausdruck findet. Kommen dagegen veränderliche Prämissen bei unverändertem Termine in Betracht, so bildet C eine variable Constante, in welcher das von den Prämissen abhängige veränderliche Risico sich äussert; dann bildet thatsächlich die gleichseitige Hyperbel mit variabler Constante die analytische Grundlage dieser Gesetzmässigkeit.

Dieser Umstand gestattet nun weitere Conclusionen hinsichtlich der mathematischen Structur dieses Gegenstandes. Wird nämlich die Cursspannung als constant vorausgesetzt, so besteht unter Annahme constanter Prämissen zwischen der Wahrscheinlichkeit der erwartungsmässigen Cursvariation und dem Termine die Relation

3) $$\frac{w + \Delta w}{w} = \frac{t + \Delta t}{t}$$

welche auf der Grundlage des Verhältnisses beruht, welches bei zunehmendem Termine einen Wachsthum der Wahrscheinlichkeit der erwartungsmässigen Cursvariation bedingt. Dieses Resultat, mit dem obigen in Verbindung gebracht, liefert nun auch die Relation

4) $$\frac{a}{a + \Delta a} = \frac{t + \Delta t}{t}$$

d. h. mit anderen Worten die Producte der Cursspannungen und proportionalen Termine entsprechen gleichen Wahrscheinlichkeiten der erwartungsmässigen Cursvariation.

Die beiden Relationen 3) und 4) liefern nun auf Grund des gleichen Rechnungsprocesses wie oben die Ausdrücke

5) $$\frac{w}{t} = C_1 \quad \text{und} \quad a\,t = C_2$$

welche die Gleichungen einer Geraden und einer gleichseitigen Hyperbel darstellen. Werden nun gleichwie oben variable Prämissen vorausgesetzt, so übergehen C_1 und C_2 in variable Constanten von ähnlicher Beschaffenheit wie die obige.

Wir gelangen daher, falls der Termin t als gemeinsame Abscisse des beiden Linien angesehen wird, zu der bekannten Grundform der originären Wahrscheinlichkeits-Curven

6) $$w \,.\, a \quad e^{\pm\int\frac{dt}{w}}$$

welche das Gesetz zwischen Termin, Cursspannung und Wahrscheinlichk[illegible] der erwartungsmässigen Cursvariation mathematisch kennzeichnet.

Unser Beispiel, welches constante Prämissen bei unverändertem Term[illegible] zur Voraussetzung hat, stellt daher die partielle Integration dieser Grundf[illegible] dar, wobei die Differenzen durch Einheiten der Cursspannung zur D[illegible] stellung gelangen. Diese verhältnissmässig grossen Differenzen gestatten [illegible] blos eine halbwegs näherungsweise Berechnung der Resultate, welche jed[illegible] für den praktischen Bedarf zur Noth hinreichen dürften, was insoferne [illegible] Belang ist, als die hiedurch gegebene einfache Art ihrer Ermittlung gro[illegible]

Nähere Untersuchungen über das Wesen der Mortalitätscurven und deren mathematisch-analytische Beschaffenheit.

I.

Die Ergebnisse unserer bisherigen Forschung hinsichtlich der mathematisch-analytischen Beschaffenheit der Sterblichkeitscurven umfassen die functionelle Darstellung derselben als originäre Wahrscheinlichkeitscurven, deren Wesen durch die Differentialgleichungen zweiter Ordnung generell zum Ausdrucke gelangt. Diese functionelle Darstellung erfolgt gemäss dem transcendenten Wesen der bezüglichen Formen derart, dass die Coordinaten durch eine vermittelnde Variable zum Ausdrucke gelangen und auf diese Weise in ihrer mathematischen Beziehung zu einander gekennzeichnet werden. Hiedurch wird es möglich, nicht nur die Curve der Lebenden und diejenige der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten, sondern auch die Curven der Sterbenswahrscheinlichkeiten und der Verstorbenen, welche sämmtlich untereinander durch ihre gemeinsamen Abscissen correspondiren, analytisch zu bestimmen. Erwähnenswerth ist hiebei der merkwürdige Umstand, dass die Curven der Lebenden und Verstorbenen einerseits, sowie diejenigen der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten und Sterbenswahrscheinlichkeiten andererseits je gleichen Functionen der stets reciprok auftretenden, vermittelnden Variablen entsprechen, so dass bei Voraussetzung gleicher Abscissen jener der Curve der Lebenden und der Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten entsprechende Werth der vermittelnden Variablen mit dem der Curve der Verstorbenen und Sterbenswahrscheinlichkeiten entsprechenden Werthe stets die Zahl 1 als Product ergibt. Hieraus geht hervor, dass die Beziehung der Curve der Verstorbenen zur Curve der Sterbenswahrscheinlichkeiten dieselbe ist, wie jene der Curve der Lebenden zur Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten, wie auch, dass die der Curve der Lebenden zugehörige Function der vermittelnden Variablen t, mit jener der Curve der Verstorbenen zugehörigen Function der vermittelnden Variablen $\frac{1}{t}$ vollständig übereinstimmt ebenso wie jene der Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten zugehörige Function der vermittelnden Variablen t mit jener der Curve der Sterbenswahrscheinlichkeiten zugehörigen Function der vermittelnden Variablen $\frac{1}{t}$. Diese Eigenschaften der hier untereinander in Beziehung stehenden Curven führen nun weiter zu folgenden interessanten Conclusionen. Da sich bekanntlich die Beziehung der Curve der Lebenden zur Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeit als eine solche zwischen einer gleichseitigen Hyperbel mit variabler Constante und einer Geraden mit variabler Constante präsentirt, so ist es mit Rücksicht auf obengenannte Umstände naheliegend, dass auch hinsichtlich der Beziehung zwischen der Curve der Verstorbenen und der Curve der Sterbenswahrscheinlichkeiten dem gleichen analytischen Begriffe entsprochen wird.

Diese durch ihre analytische Beschaffenheit verwandten Functionen ergänzen sich aber auch sonst gegenseitig in einer Weise, dass hieraus auf einen engeren Zusammenhang derselben hinsichtlich ihres geometrischen Ursprunges geschlossen werden muss Die Curve der Lebenden hängt nämlich mit der Curve der Verstorbenen durch einen im Unendlichen (Unbestimmten) liegenden Wendepunkt zusammen, wie auch das Gleiche bezüglich der Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten und derjenigen der Sterbenswahrscheinlichkeiten der Fall ist.*)

Dieser Umstand dürfte einen genügenden Anhaltspunkt für die Annahme bilden, dass einerseits die Curve der Lebenden und die Curve der Verstorbenen Bestandtheile eines und desselben hyperbolischen Curvenflügels bilden, dessen Pol durch Einwirkung der Constantenvariation in's Unendliche zu liegen kommt, ebenso wie sich andererseits hinsichtlich der Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten und derjenigen der Sterbenswahrscheinlichkeiten annehmen lässt, dass dieselben Theile von Geraden mit variablen Constanten darstellen, deren gemeinsamer Schnittpunkt mit der Hyperbelaxe durch den Einfluss eben dieser Variabilität der Constanten in's Unendliche gelangt. Wird nun weiter der Umstand berücksichtigt, dass die einer Hyperbel mit variabler Constante entsprechende Curve der Lebenden und die einer Geraden mit variabler Constante entsprechende Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten in ihren Ausläufern sich asymptotisch einander nähern, wie auch das Gleiche hinsichtlich der Curve der Verstorbenen und der Curve der Sterbenswahrscheinlichkeiten der Fall ist, so dürfte wohl auch die Conclusion zulässig sein, dass jene mit der Hyperbel in Beziehung stehenden Geraden, welche zufolge der Variation der Constanten, von ihrem mit der Hyperbelaxe bedingten Schnittpunkte aus in die Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten beziehungsweise in die Curve der Sterbenswahrscheinlichkeiten übergehen, die Asymptoten dieser Hyperbel bilden, und zwar lässt sich gemäss der Constellation der bezüglichen Curven annehmen, dass der untere, vom Pol ausgehende Theil des Hyperbelflügels der Curve der Lebenden, hingegen der obere Theil desselben der Curve der Verstorbenen entspricht, geradeso wie die Asymptote zum unteren Theil des Hyperbelflügels zufolge der Variation der Constanten die Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten und die Asymptote zum oberen Theil desselben die Curve der Sterbenswahrscheinlichkeiten darstellt. Aehnlich verhält es sich mit dem symmetrischen Curvensystem in der negativen Sphäre, wo der correspondirende zweite Curvenflügel der Hyperbel mit den zugehörigen entgegengesetzten Asymptotenstrahlen in Betracht kommt, so dass thatsächlich hier eine einzige mathematische Function mit variablen Constanten die Grundlage bildet.

Dem Systeme der originären Wahrscheinlichkeitscurven liegt daher offenbar eine einzige gleichseitige Hyperbel mit variablen Constanten zugrunde, deren beide Flügel symmetrisch in der positiven und negativen Sphäre

*) Siehe graphische Darstellung VIII. Lieferung, Seite 80.

des Axensystemes sich befinden und deren Asymptotenpaar infolge der Variation der Constanten gleichfalls Curvengebilde liefert.

Von diesem Gesichtspunkte ausgegangen, müssen dem Systeme der originären Wahrscheinlichkeitscurven ähnliche Eigenschaften anhaften, wie der gleichseitigen Hyperbel in Beziehung zu deren Asymptotenpaar, wenn auch diesbezüglich eine durch die Variation der Constanten bedingte Modification derselben zu erwarten ist. Immerhin wird diese mathematisch wichtige und interessante, nach allen Richtungen hin ergründete Curve zweiten Grades reiches Materiale zur Ermittlung der Eigenschaften der originären Wahrscheinlichkeitscurven bieten, so dass sich in dieser Hinsicht ein weites Feld für eine dankbare Forschung auf dem Gebiete der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie erschliesst.

Zur näheren Begründung der hier erwähnten Eigenthümlichkeiten in der wechselseitigen Homogenität des Systemes der originären Wahrscheinlichkeitscurven mögen die bezüglichen Formen einer Untersuchung in diesem Sinne unterworfen werden.

Unter Berücksichtigung der ursprünglichen Lage der Curven im Axensysteme gelangt das Wesen dieses merkwürdigen Zusammenhanges folgendermassen zur Geltung. Aus der die Differentialgleichungen zweiter Ordnung charakterisirenden Grundform entspringt bekanntlich die zwischen der wahrscheinlichen Lebensdauer und dem Alter bestehende Relation

$$w'_x = -\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{w_x}{x+2C}\right)^2}$$

aus welcher durch Substitution der Werthe

$$\frac{w_x}{x+2C} = +\frac{1}{4}\,cotg\,u \qquad \text{und} \qquad tg\,\frac{u}{2} = t$$

die Gleichung

$$w'_x = +\frac{(1+t)^2}{8t} - 1$$

entspringt, so dass blos die entsprechende Anordnung der Zeichen die Lage der Curve im Systeme kennzeichnet. Im Allgemeinen werden daher die der Form entsprechenden Curven der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten und Sterbenswahrscheinlichkeiten, ob in der positiven oder negativen Sphäre des Axensystemes sich befindend, die gleichen analytischen Eigenschaften aufweisen müssen. Bezeichnend ist hier der Umstand, dass aus der einen speciellen Form

$$w'_x = \frac{(1+t)^2}{8t} - 1$$

durch Mutation der Werthe

$$t \quad , \quad -t \quad , \quad \frac{1}{t} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{t}$$

die Gleichungen aller vier Curvenarten hervorgehen, so dass die Homogenität dieser aus dem Asymptotenpaar entspringenden Curvengebilde nachgewiesen erscheint. Eine gleich merkwürdige Beschaffenheit weist die du

Transformation der Grundform sich ergebende Relation*)

$$-\frac{w'_x + 1}{w_x} = \frac{L'_x}{L_x} = \pm \frac{1 \pm t}{1 \mp t} \cdot \frac{1}{x + 2C}$$

auf, indem jene derselben entsprechenden vier Werthformen aus der einfachen Relation

$$-\frac{w'_x + 1}{w_x} = \frac{L'_x}{L_x} = \frac{1 + t}{1 - t} \cdot \frac{1}{x + 2C}$$

auf analoge Art wie zuvor durch Mutation der Werthe

$$t \quad , \quad -t \quad , \quad \frac{1}{t} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{t}$$

dargestellt werden können, demnach zwischen jenen aus den vier halben Hyperbelflügeln durch Variation der Constanten hervorgehenden symmetrisch in der positiven und negativen Sphäre des Axensystemes liegenden Curven der Lebenden und Verstorbenen die gleiche Homogenität besteht. Aber noch eine andere Eigenschaft dieser Relation weist ausdrücklich darauf hin, dass zwischen den auf Geraden mit variablen Constanten beruhenden Curven und jenen aus der Hyperbel mit variabler Constante hervorgehenden ein engeres Verhältniss besteht, als ein solches, das zwischen zwei sonst voneinander unabhängigen geometrischen Gebilden zu bestehen vermag. In der grundlegenden Relation

$$-\frac{w'_x + 1}{w_x} = \frac{L'_x}{L_x}$$

drückt sich geradezu, jeden Zweifel ausschliessend, die besondere analytische Verwandtschaft aus, welche zwischen den durch w_x einerseits und L_x andererseits charakterisirten Curvengebilden stattfindet. Bei näherer Untersuchung der hier in Beziehung zu einander stehenden Functionen muss der gemeinsame Ursprung derselben unbedingt wahrgenommen werden.

Die den beiden Curvenkategorien entsprechenden Gleichungen

$$L_x = c \cdot \frac{\sigma}{\tau} \quad \text{und} \quad w_x = b \cdot C_1 \cdot \frac{1-t^2}{t} \cdot \tau$$

deren gemeinsame Abscisse $x + 2C = \pm 8 C_1 \tau$

ist, repräsentiren den bisherigen Ausführungen gemäss nicht nur die Curve der Lebenden, beziehungsweise diejenige der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten, sondern drücken mit Rücksicht auf das genannte Princip der Mutation in ihrer Form auch die correspondirenden Curven der Verstorbenen und Sterbenswahrscheinlichkeiten aus. Wird nun erwogen, dass diese Gleichungen auch folgendermassen zum Ausdrucke gelangen können:

$$L_x (x + 2C) = \pm 8 C_1 \cdot c \cdot \sigma \quad \text{und} \quad w_x = \pm \frac{b}{8} \cdot \frac{1 - t^2}{t} \cdot (x + 2C)$$

so kann der Umstand nicht übersehen werden, dass man es hier thatsächlich mit einer gleichseitigen Hyperbel und zweien sich schneidenden, symmetrisch zu den Coordinatenaxen verlaufenden Geraden zu thun hat.

*) Die willkürliche Constante b wollen wir der Einfachheit halber hier unberücksichtigt lassen.

Das börsenmässige Prämien- und Stellage-Geschäft in seiner Bedeutung vom assecuratorischen Gesichtspunkte.

IV.

In unserer vorigen Abhandlung wurde der mathematische Begriff der Beziehung, welche unserer Wahrscheinlichkeitstheorie gemäss zwischen Termin, Cursspannung und der Wahrscheinlichkeit der erwartungsmässigen Cursvariation besteht, mathematisch festgestellt, u. zw. unter Voraussetzung variabler Prämissen, denen das Börsengeschäft naturgemäss unterworfen ist. Da nun die Variation der Prämissen in einem bestimmten Zeitpunkte, welcher dem Abschlusse einer Prämie oder Stellage entspricht, im Vorhinein nur nach menschlichem Ermessen in Betracht gezogen werden kann, also in der vereinbarten Leistung blos supponirt erscheint, so muss deren Wesen in Bezug auf die Bedingungen der Abmachung vom mathematischen Gesichtspunkte als willkürlich constant angesehen werden. Der Umstand der Variation der Prämissen kann also nur als Ausdruck von Voraussetzungen a priori in Rechnung gelangen; u. zw. als eine aus der übereinstimmenden Meinung der Contrahenten hervorgehende Grösse, welche mit Rücksicht auf die fixen Vereinbarungen betreff Leistung und Gegenleistung die Bezugnahme auf die ausserordentlichen a posteriori eintretenden Umstände ausschliesst.

Demnach muss von der Veränderlichkeit jener Prämissen, welche das Wesen der ausserordentlichen Cursfluctuationen während der vereinbarten Vertragszeit des Prämienabschlusses bedingen, in dem vorliegenden Calcül ganz abgesehen werden und es erübrigt nur die einfache functionelle Abhängigkeit der Prämie von Termin, Cursspannung und Wahrscheinlichkeit der erwartungsmässigen Cursvariation. In dieser Hinsicht lässt sich eine feststehende Relation zwischen denselben aufstellen, für welche die auf Nachfrage und Angebot beruhenden, beim Abschlusse der gewöhnlichen Prämie zwischen Leistung und Gegenleistung jeweilig vereinbarten Normen die Grundlage der Rechnung bilden.

Für diese functionelle Abhängigkeit besteht nun ebenso wie hinsichtlich des Verhältnisses zwischen der Cursspannung und der Wahrscheinlichkeit der erwartungsmässigen Cursvariation ein annähernd zutreffender Grundsatz betreffend die Relation zwischen dem Termin und der Wahrscheinlichkeit der erwartungsmässigen Cursvariation.

Sowie bei constantem Termine die jeweilige Wahrscheinlichkeit der erwartungsmässigen Cursvariation immer umsovielmal kleiner sich gestaltet, als das betreffende Ausmass der stets um die Einheit wachsenden Cursspannung in dieser Einheit enthalten ist, wird im Gegensatze hiezu die jeweilige Wahrscheinlichkeit der erwartungsmässigen Cursvariation bei constanter Cursspannung stets umsovielmal grösser sich gestalten, als das betreffende Ausmass des stets um die Einheit wachsenden Termines in dieser Einheit enthalten ist.

Die Endwahrscheinlichkeit wird naturgemäss schliesslich zur Gewissheit werden, wenn die Wahrscheinlichkeit der erwartungsmässigen Cursvariation w den Werth 1 erreicht; d. h. die Cursvariation der Cursspannung gleichkommt, beziehungsweise dieselbe überschreitet. Selbstverständlich muss die Variabilität von w mit dem Wachsthum des Termines ebenfalls zunehmen, demnach hier nicht von einer absoluten, sondern blos von einer mit dem Wachsthum des Termines relativ zunehmenden Wahrscheinlichkeit der erwartungsmässigen Cursvariation die Rede sein kann. In diesem Sinne wird hier die Wahrscheinlichkeit w eine objective Bedeutung besitzen und durch den Begriff der Möglichkeit zur Darstellung gelangen.*)

Die Grenze dieser Wahrscheinlichkeit, resp. Möglichkeit, welche in der Zahl 1 zum Ausdrucke kommt, wird daher mit der Verlängerung des Termines blos leichter erreichbar werden; doch kann hiedurch die Erreichbarkeit dieser Grenze bei einem kürzeren Termine durchaus nicht tangirt werden. Ein Verhältniss des Massstabes dieser Möglichkeiten ist rechnerisch uncontrolirbar, abgesehen von dem wichtigen Umstande der Unstetigkeit derselben, die sich in einer fortwährend wechselnden Fluctuation und Stagnation der Curse äussert. In der Intensität dieser Fluctuation der Curse liegt jedoch die Voraussetzung für einen mehr oder weniger hohen Grad der Möglichkeit einer bestimmten Cursentwicklung innerhalb eines gegebenen Termines und besteht daher auch bei weniger intensiver, aber stufenweiser Fluctuation innerhalb eines längeren Termines eine relativ grössere Chance für die Erreichung der erwartungsmässigen Cursgrenze. Im Wesen eines kürzeren oder längeren Termines ist also das Mass gewisser Bedingungen für die Erreichbarkeit dieser Grenze gegeben und in diesem Sinne ist auch die Beschaffenheit unserer hier aufgestellten Relationen aufzufassen.

Ist also w_n die Wahrscheinlichkeit der erwartungsmässigen Cursvariation im Zeitpunkte des Abschlusses eines Prämiengeschäftes auf die Dauer von n Tagen, so wird dieser Wahrscheinlichkeit eine solche für die Dauer von m Tagen im Verhältnisse von $n:m$ entsprechen, jedoch mit der Bedingung, dass dieses Verhältniss den Werth w_n als Quotient nicht überschreitet. Es wird also diesbezüglich die Limitgleichung

$$m \geqq n \qquad w_m \geqq w_n \qquad 1 \geqq w_n \geqq \frac{n}{m}$$

gelten, welche mit Rücksicht auf den Umstand, dass w_n gemäss den Intentionen der das Prämiengeschäft abschliessenden Contrahenten im Minimum den Werth $\frac{1}{2} \pm \vartheta$ besitzt (in welchem ϑ eine relativ geringe Abweichung repräsentirt), hingegen im Maximum den Werth 1 nicht überschreiten kann, zu der Conclusion führt, dass der Termin in seinem Wachsthum nur bis zu einer gewissen Grenze, welche vom Ausmasse der beziehungsweisen Curs-

*) Vergleiche unsere Abhandlung: „Ueber das Wesen des wahrscheinlichen Werthes ungewisser Güter und Anwartschaften", Lief. IX.

spannung abhängig ist, Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit der erwartungsmässigen Cursvariation übt. Das Ausmass der Cursspannung steht also zu demjenigen des Termines in einem bestimmten näheren Conex hinsichtlich der functionellen Beschaffenheit des Werthes, welcher die Wahrscheinlichkeit der erwartungsmässigen Cursvariation kennzeichnet.

Wenn wir also im Allgemeinen annäherungsweise die Regel aufstellen, dass die Wahrscheinlichkeiten der erwartungsmässigen Cursvariation im geraden Verhältnisse zu den Terminen und im umgekehrten Verhältnisse zu den Cursspannungen sich verhalten, so wird dieselbe mit Rücksicht auf das oben Gesagte blos zwischen gewissen Grenzen Geltung besitzen, und zwar wird dieses Verhältniss

$$w_n : w_m = a_m : a_n = t_n : t_m$$

in seinem Wesen die Grenzen zwischen $\frac{1}{2} \pm \vartheta$ und 1 stets einhalten müssen. Die Termine t_n und t_m, wie auch die beziehungsweisen Cursspannungen a_n und a_m werden in ihrer Beziehung innerhalb dieser Grenzen annähernd den Anforderungen entsprechen müssen, welche an diese Rechnung bezüglich der functionellen Beschaffenheit der Wahrscheinlichkeiten der erwartungsmässigen Cursvariation gestellt werden.

Aus obigem Verhältnisse geht nun weiter hervor, dass aus dem gegebenen Producte der Wahrscheinlichkeit der erwartungsmässigen Cursvariation und der Cursspannung auf dasjenige des Termines und der Cursspannung geschlossen werden kann, daher die Leistung und Gegenleistung eines auf Angebot und Nachfrage beruhenden Prämiengeschäftes die Grundlage für sonstige mögliche Combinationen zwischen Cursspannung und Termin bietet.

Obigem Verhältnisse entspringen nämlich die Gleichungen

$$w_n \,.\, a_n = w_m \,.\, a_m\,, \qquad w_n \,.\, t_m = w_m \,.\, t_n \quad \text{und} \quad a_n \,.\, t_n = a_m \,.\, t_m$$

deren Giltigkeit gleichfalls, und zwar im übertragenen Sinne obengenannten Grenzen unterordnet erscheint. Nehmen wir nun an, dass auf Grundlage eines zu einem bestimmten Zeitpunkte abgeschlossenen Prämiengeschäftes die Bedingungen für ein solches von anderer Form ermittelt werden sollen, dessen Abschluss zu gleichem Zeitpunkte gedacht ist, so wird die Deduction zulässig sein, dass die Wahrscheinlichkeiten der erwartungsmässigen Cursvariation für die beiden Abschlüsse, den Producten der wechselweisen Termine und Cursspannungen proportional sind, d. h.

$$\left.\begin{aligned} w_n : w_m &= a_m : a_n \\ &= t_n : t_m \end{aligned}\right\} \text{resp.} \qquad w_n : w_m = a_m \,.\, t_n : a_n \,.\, t_m$$

und hieraus die zwischen den genannten Grenzen giltige Relation

$$w_n \,.\, a_n \,.\, t_m = w_m \,.\, a_m \,.\, t_n \qquad \text{oder} \qquad \frac{w_n \,.\, a_n}{t_n} = \frac{w_m \,.\, a_m}{t_m}$$

Ist daher beispielsweise die Leistung für eine zum gegebenen Zeitpunkte abgeschlossene zweiseitige Prämie für einen Tag mit $^3/_4$ Gulden bemessen, so correspondirt dieselbe mit Rücksicht auf die in Betracht kommende, den Intentionen der Contrahenten entsprechende Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ r

einem Prämiengeschäfte, welches auf zwei Tage mit einer Cursspannung von 3 Gulden abgeschlossen erscheint und es gilt daher die Relation

$$\frac{w_n \,.\, a_n}{t_n} = \frac{w_m \,.\, a_m}{t_m} = \frac{3}{4}$$

worin $t_n = 1$ und $w_n \,.\, a_n = {}^3/_4$ ist, hingegen $w_m = \frac{1}{2}$, $a_m = 3$ und $t_m = 2$ bedeutet. Auf Grund derselben lässt sich nun eine Prämie von beliebiger Beschaffenheit hinsichtlich des Termines t und der Cursspannung a construiren.

Es soll beispielsweise die Leistung für ein zum selben Zeitpunkte abgeschlossenes Prämiengeschäft mit folgenden Bedingungen festgestellt werden. Ein Contrahent zahlt dem anderen im Vorhinein einen bestimmten Betrag für das Recht, innerhalb 8 Tagen bei einem um 10 fl. höheren als dem beim Geschäftsabschlusse notirten Curse eine bestimmte Quantität Papiere beziehen zu können, ohne jedoch hiezu verpflichtet zu sein; wie hoch stellt sich dieser Betrag mit Rücksicht auf die zur Zeit gehandelte gewöhnliche zweiseitige Prämie? Der einfachen Cursspannung von 10 Gulden entspricht die doppelte Cursspannung auf hinauf und herunter:

$a = 20$; ferner ist $t = 8$ und die Prämie P?

Unseren in den früheren Abhandlungen dargestellten Formen gemäss stellt sich das Verhältniss der beziehungsweisen Wahrscheinlichkeiten

$$\Big|_{\frac{1}{2}+\vartheta}^{+1} \frac{a}{t} \,.\, w = \frac{a_m}{t_m} \,.\, w_m \left[\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\cdot\left(1-\frac{1}{20}\right)\right]\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)\right]$$

worin $a_m = 3$ und $t_m = 2$ in ihrer Veränderung in $a = 20$ und $t = 8$ in Berücksichtigung gelangen, hieraus ergibt sich

$$\frac{w \,.\, a}{t} = \frac{9}{20} \,.\, \frac{w_m \,.\, a_m}{t_m} = \frac{27}{80}$$

als die unserem Beispiele entsprechende doppelte Prämie auf hinauf und herunter, daher die einfache Prämie

$$P = \frac{27}{160} = 0{\cdot}16875$$

Demnach liefert dies für obiges Beispiel eine Prämie von 17 Kreuzern per Stück der in Betracht kommenden Börsen-Effecten.

Uebernimmt nun ein Bankier commissionsweise den Börsenauftrag, Börseneffecten gegen eine Deckung von 10 Gulden per Stück in bianco zu verkaufen und will bei einer etwaigen missglückten Speculation auch weiter hinaus gegen die Folgen einer Cursavance gedeckt sein, so wird er gegen Zahlung der obengenannten Prämie eine Versicherung in dieser Hinsicht eingehen können. Es ist daher in obigem Beispiele die Grundlage für eine regelrechte Versicherung gegeben, welche gegen die ausserordentlichen Folgen missglückter Speculationen zu schützen vermag.

Nähere Untersuchungen über das Wesen der Mortalitätscurven und deren mathematisch-analytische Beschaffenheit.

II.

In der vorigen Abhandlung wurde unter Hinweis auf die Beschaffenheit der originären Wahrscheinlichkeitscurven die analytische Bedeutung der Mortalitätscurven, sowie jener mit denselben in Correlation stehenden geometrischen Gebilde mathematisch-statistischen Ursprunges in ihrer functionellen Wesenheit in Betracht gezogen und deren gemeinsame Abhängigkeit von jener in der transcendenten Form dieser Functionen bedingten vermittelnden Variablen t, in ihrer merkwürdigen Homogenität demonstrirt.

Es ergab sich nun die Conclusion, dass die Curve der Lebenden, sowie jene der Verstorbenen, wie auch die Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten, sowie diejenige der Sterbenswahrscheinlichkeiten, sobald diesen Allen eine gemeinsame Abscisse zu Grunde liegt, ein einziges Curvensystem bilden, welches auf einer gleichseitigen Hyperbel mit variablen Constanten und deren Asymptoten beruht.

Aber auch hinsichtlich der Variation der Constanten lässt sich der Schluss ziehen, dass dieselbe verschiedenen Deutungen unterworfen zu werden vermag, indem einerseits blos die Variabilität der Hyperbelaxe in Betracht kommen, andererseits aber auch deren Lage mit Hinblick auf das Axensystem bedingungsweise mit in Berücksichtigung gelangen kann, so dass, wie bereits erwähnt, die hier in Betracht kommende, grundlegende gleichseitige Hyperbel in ihrer normalen Lage, d. h. mit ihrer unter dem Winkel von 45° geneigten Axe verschoben erschiene, demnach unter Bezugnahme auf obige Form der Hyperbelgleichung der mathematische Begriff dieser Functionen auch die mit Rücksicht auf die Variation der Constanten mögliche Deutung zuliesse, dass diese Variation mit der Veränderung der Axenlänge der Hyperbel gleichzeitig die Veränderlichkeit des Neigungswinkels derselben verbindet, u. zw. derart, dass die betreffende, die Variation der Constanten kennzeichnende Function die Regelung des Veränderlichkeitsverhältnisses zwischen Axe und deren Neigungswinkel in beliebiger Weise gestattet, demnach auch einer willkürlich gegebenen Norm sich unterordnen lässt.

Die zweite, auf der Grundlage zweier sich kreuzenden Geraden mit variablen Constanten beruhende Gleichung dürfte nun einer ähnlichen, von der ersteren mehr oder weniger abhängigen, functionellen Bedingung entsprechen, u. zw. kann es sich hier um die Variation der Neigungswinkel der Geraden, sowie um die Veränderlichkeit der Positionen deren Schnittpunkte mit den Coordinatenaxen handeln, wobei wieder die Regelung des Veränderlichkeitsverhältnisses als beliebig, jedoch von demjenigen der hyperbolischen Curve abhängig angesehen werden muss.

Bezüglich der Beschaffenheit dieser Veränderlichkeitsverhältnisse entscheiden die hier in Rechnung kommenden willkürlichen und so

Constanten, hingegen entscheiden hinsichtlich der Abhängigkeit der Veränderlichkeitsverhältnisse der den beiden Curvenkategorien entsprechenden functionellen Bedingungen von einander, jene aus dem Wesen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung entspringenden mathematischen Gesetzmässigkeiten, welche in der Beziehung der Formen

$$\frac{L''_x}{L_x} = fx \qquad \text{und} \qquad \frac{w''_x}{w_x} = \beta$$

in genereller Weise zur Darstellung gelangen und in den Functionen $f(x)$ und β sich äussern.

Im Wesen selbst repräsentiren jedoch die durch die vermittelnde Variable t ausgedrückten Coordinaten der originären Wahrscheinlichkeitscurven selbstständige Functionen von Curvengebilden, bei denen die Coordinaten dieser Wahrscheinlichkeitscurven jeweilig als Ordinaten fungiren, während die gemeinsame vermittelnde Variable t wieder einer gemeinsamen Abscisse derselben entspricht.

In diesem Sinne kann die Gleichung der gemeinsamen Abscisse

$$x + 2C = \pm 8C_1 \,.\, \tau$$

als Gleichung zweier sich kreuzenden Geraden mit willkürlichen Constanten betrachtet werden, in welcher x als Ordinate und τ als Abscisse fungirt. Wird jedoch τ als Function der ursprünglichen vermittelnden Variablen t in Betracht gezogen, so ergibt sich

$$x + 2C = \pm 8C_1 \frac{t^{\frac{1}{18}}}{(t-3)^{\frac{5}{9}}} \cdot e^{-\frac{1}{6t}}$$

als Function einer logarithmischen Curve höherer Ordnung. Eine solche wird auch die Ordinate sowohl der Curve der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten als auch diejenige der Lebenden als Function der vermittelnden Variablen t darstellen, u. zw. wird für die beiden die logarithmische Curve jeweilig die der zugehörigen Function der vermittelnden Variablen t entsprechende Beschaffenheit besitzen. Das Gleiche gilt auch für die übrigen Curvengebilde mathematisch-statistischen Ursprunges.

Unter Bezugnahme hierauf lässt sich also auch ein weiterer Schluss hinsichtlich des Wesens dieser Curvengebilde ziehen; u. zw. geht aus der selbstständigen functionellen Beschaffenheit der Coordinaten dieser Curvengebilde hervor, dass mit Rücksicht auf die vermittelnde Variable, welche berufen ist, die Beziehung zwischen denselben herzustellen, eine beliebige Disposition hinsichtlich der functionellen Anordnung, soweit dieselbe den gegebenen Bedingungen entspricht, zulässig ist, d. h. es lässt sich auf Grundlage der vorhandenen Functionen der vermittelnden Variablen t, durch welche die Coordinaten jener Curvengebilde zum Ausdrucke gelangen, die Gleichung jeder beliebigen Curve, sobald für dieselbe variable Constanten supponirt werden, mathematisch construiren. Daraus geht hervor, dass die Be-

deutung der gleichseitigen Hyperbel mit variablen Constanten und deren Asymptoten als grundlegender Begriff der originären Wahrscheinlichkeitscurven nur insoferne in Anbetracht kommt, als in diesem Falle jene Functionen der vermittelnden Variablen t, durch welche die variablen Constanten zum Ausdrucke gelangen, sich algebraisch am einfachsten gestalten. Den bezüglichen Formen

$$L_x (x + 2\,C) = \pm\, 8\, C_1 \,.\, c \,.\, \sigma \qquad \text{und} \qquad w_x = \pm\, \frac{b}{8} \,.\, \frac{1 - t^2}{t} \,.\, (x + 2\,C)$$

gemäss ist nämlich die Variabilität der Axe der gleichseitigen Hyperbel durch σ zum Ausdrucke gebracht, dessen Werth

$$\sigma = \frac{t - 1}{t^{\frac{1}{3}}\,(t - 3)^{\frac{5}{3}}}$$

ist, so dass hier die möglichste, unter den gegebenen Umständen zulässige functionelle Einfachheit zur Geltung gelangt. Das Gleiche gilt von der variablen Constante, welche die zweite, die Gleichung zweier sich kreuzenden Geraden betreffende Form in sich schliesst. Hier ist die Variabilität der Constanten durch den ausserordentlich einfachen Ausdruck

$$\frac{1 - t^2}{t} = \frac{1}{t} - t$$

zur Geltung gebracht, in welchem gleichsam das Wesen der in der vorigen Abhandlung hervorgehobenen merkwürdigen Werthreciprocität der vermittelnden Variablen t charakterisirt erscheint.

Hinsichtlich der functionellen Anordnung bei der mathematischen Construction beliebiger Curven, bei denen variable Constanten supponirt werden, kommt ausschliesslich der Umstand in Betracht, dass die Uebereinstimmung des analytisch-geometrischen Begriffes der aufzustellenden Gleichung mit derjenigen, deren mathematische Construction beabsichtigt wird, aufrechterhalten werde.

Soll daher beispielsweise die Gleichung einer Parabel mit variablen Parameter construirt werden, so wird die Form der bekannten analytischen Gleichung derselben

$$z^2 = P \,.\, u$$

die Grundlage der bezüglichen Construction bilden, so dass unter Anwendung der gegebenen Functionen der vermittelnden Variablen t folgende Gleichung resultirt

$$L^2_x = \left[\frac{c^2 \,.\, \sigma}{8\, C_1} \cdot (t-1) \sqrt{\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t}} \right] (x + 2\, C)$$

in welcher also die Variabilität des Parameters durch die Form

$$P = \frac{c^2}{8 C_1} \cdot \sigma \,.\, (t - 1) \sqrt{\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t}}$$

zum Ausdrucke gelangt. Was das Wesen dieser Curve betrifft, so stellt die-

selbe thatsächlich wieder blos die gleiche originäre Wahrscheinlichkeitscurve dar, wie es diejenige ist, deren Wesen auf einer gleichseitigen Hyperbel mit variabler Axe beruht, nur besteht hier der Unterschied, dass die Function der vermittelnden Variablen, durch welche die variable Constante zum Ausdrucke gelangt, eine algebraisch complicirtere ist.

Werden die Coordinaten vertauscht, so dass die Axe der Parabel in der Richtung der Ordinatenaxe zu liegen kommt, so wird die Gleichung der Parabel

$$u^2 = P_1 \,.\, z$$

lauten und dementsprechend ergibt sich als Construction einer solchen mit variablem Parameter, der Ausdruck

$$(x + 2\,C)^2 = \left[\frac{64\,C^2_1}{c} \,.\, (t-1) \sqrt{\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t}}\right] \,.\, L_x$$

so dass die Variabilität des Parameters durch die Form

$$P_1 = \frac{64\,C^3_1}{c} \,.\, (t-1) \sqrt{\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t}}$$

zum Ausdrucke gelangt. Werden nun die Functionen der beziehungsweisen variablen Parameter miteinander verglichen, so ergibt sich der merkwürdige Umstand, dass jene die Variabilität derselben repräsentirenden Werthe sich von einander genau durch den Factor σ unterscheiden, so dass hier folgende Norm allgemein Geltung besitzt:

$$\frac{P}{P_1} = \left(\frac{c}{8\,C_1}\right)^3 \,.\, \sigma$$

und da hierin c und C_1 willkürliche Constanten bedeuten, welche auf die Variabilität der beziehungsweisen Parameter keinen Einfluss haben, so ist σ allein als jener die variable Axe der gleichseitigen Hyperbel darstellende Werth, gleichzeitig der Ausdruck des Quotienten der variablen Parameter zweier wechselweisen Coordinaten entsprechenden Parabeln.

Diese Eigenschaften der hier in Betracht kommenden Functionen der vermittelnden Variablen, durch welche die Coordinaten der originären Wahrscheinlichkeitscurven gekennzeichnet erscheinen, involviren hinsichtlich der allgemeinen Curventheorie eine besondere Bedeutung mit Rücksicht auf ihre Verwendbarkeit für diesbezügliche Untersuchungen, indem durch diese das gesammte, die Variation der Constanten und deren Theorie umfassende Gebiet einer deductiven Forschung eröffnet wird.

Wir können hier mit Rücksicht auf unsere Aufgabe, fachtechnische Untersuchungen über das Wesen der Mortalitätscurven anzustellen, von dieser Frage nur insofern abschweifen, als dies die Natur der diesbezüglichen theoretischen Grundlagen erfordert, doch behalten wir uns vor, uns mit diesem interessanten Thema späterhin noch zu befassen.

Nähere Untersuchungen über das Wesen der Mortalitätscurven und deren mathematisch-analytische Beschaffenheit.

III.

Neben den bisher festgestellten Eigenschaften der originären Wahrscheinlichkeitscurven und jenen dieselben kennzeichnenden functionellen Beziehungen, treten noch andere wichtige Umstände hinsichtlich der Beschaffenheit dieser geometrisch-analytischen Gebilde hervor, welche in ihrem Wesen von grosser Tragweite für die wissenschaftliche Entwicklung der mathematischen Statistik sein dürften.

Das System dieser Curven, dessen mathematisches Princip im Wesen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung liegt, erscheint durch jene in unserer graphischen Darstellung (siehe Lief. VIII, Seite 80) demonstrirten vier Curvenpaare durchaus nicht erschöpft, denn jedem derselben entspricht wieder eine unendliche Anzahl correspondirender Curvengebilde, deren Beschaffenheit ähnlicher Art ist und deren Wesen einem homogenen mathematischen Principe entspricht.

Ebenso wie die Beziehung zwischen der Curve der Lebenden und der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer sich durch Vermittlung der gemeinsamen Abscisse der Beiden in einer bestimmten mathematischen Form kundgibt, lässt sich auch bei Aufrechterhaltung der Norm hinsichtlich der Abscissen-Gemeinsamkeit, zwischen einer jeden dieser Curven und einer neuen Curve die gleiche Beziehung festhalten, welcher Process, fortgesetzt erneuert, eine unendliche Anzahl Curven liefert, von denen jede derselben mit der nächstfolgenden in gleicher Beziehung steht. Anderer Art werden jedoch die Beziehungen sein, in welchen diese Curven jeweilig zu ihren zweitnachfolgenden, ihren drittnachfolgenden etc. sich befinden. Wie bekannt, besteht zwischen der Curve der Lebenden und der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer eine bestimmte grundlegende Beziehung, welche durch den Ausdruck

$$L_x = \frac{e^{-\int \frac{dx}{w_x}}}{w_x}$$

zur Darstellung gelangt. Denken wir uns nun eine dritte Curve, deren Beziehung zu den beiden ersteren durch eine ähnliche functionelle Abhängigkeit der Coordinaten hergestellt wird, so würde sich der weitere Ausdruck

$$w_x = \frac{e^{-\int \frac{dx}{s_x}}}{s_x}$$

ergeben, wobei s_x die Ordinate der neuen Curve bezeichnet. Diese Abhängigkeit besteht nun in analoger Weise wie die erstere auf einer Relation, welche in der Gleichung

$$s_x = \Delta x \,.\, \left(\frac{w_x + \Delta x}{w_x} + \frac{w_x + 2\Delta x}{w_x} + \frac{w_x + 3\Delta x}{w_x} \dots . \right)$$

zum Ausdrucke gelangt und daher gleichwie die Vorhergehende einem bestimmten mathematischen Principe Rechnung trägt.

Es besteht also zwischen den Ordinaten s_x und w_x dieselbe Beziehung wie zwischen w_x und L_x, wobei die vermittelnde Variable x die gemeinsame Abscisse aller drei hier in Betracht kommenden Curven darstellt. Nun gilt die Frage, welcher Art die Beziehung ist, welche zwischen der ersten und dritten Curve, d. h. den Ordinaten derselben s_x und L_x unter der gegebenen Voraussetzung stattfindet. Zum Zwecke der Beantwortung dieser Frage mögen die oben angeführten, die functionelle Abhängigkeit der Ordinaten dieser Curven darstellenden Ausdrücke in ihren Differentialquotienten in Betracht gezogen werden. Demgemäss ergeben sich folgende zwei Relationen:

$$-\frac{w'_x+1}{w_x}=\frac{L'_x}{L_x} \quad \text{und} \quad -\frac{s'_x+1}{s_x}=\frac{w'_x}{w_x}$$

denen andererseits die durch Integration jener Ausdrücke ermittelten Gleichungen

$$w_x=\frac{C-\int L_x\,dx}{L_x} \quad \text{und} \quad s_x=\frac{C-\int w_x\,dx}{w_x}$$

entsprechen. Mit Rücksicht hierauf ergibt sich daher die Relation

$$-\frac{w'_x}{w_x}=\frac{1}{w_x}+\frac{L'_x}{L_x}=-\frac{-L_x}{C-\int L_x\,dx}+\frac{L'_x}{L_x}=-\frac{dl\,\frac{L_x}{C-\int L_x\,dx}}{dx}$$

und diese mit der anderen Relation in Verbindung gebracht, liefert die Form

$$\frac{s'_x+1}{s_x}=\frac{dl-\frac{dl(C-L_x\,dx)}{dx}}{dx}$$

als Beziehung zwischen den Ordinaten der ersten und dritten Curve unter Vermittlung der gemeinsamen Abscisse der Beiden.

Hieraus ist zu ersehen, dass wir es hier mit einer höheren Ordnung der linearen Differentialgleichungen zu thun haben und dass die Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer als Zwischenglied der Curve der Lebenden und der hier in Betracht gezogenen neuen Curve, die erforderliche Voraussetzung für diese anders geartete Beziehung bildet. Dieser Form entspricht nun jene, diese Kategorie von Differentialgleichungen kennzeichnende Grundform

$$L_x=s_x.\,e^{\int\frac{dx}{s_x}}.\,e^{-\int s_x.\,e^{\int\frac{dx}{s_x}}.\,dx}$$

und zwar bezeichnet dieselbe jene Bedingung, welche den linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung zu Grunde liegt.

Bestehen ferner zwischen zwei zu einander in Beziehung stehenden Curven zwei Curven als Zwischenglieder, so findet unter Vermittlung der gemeinsamen Abscisse zwischen den Ordinaten der Beiden eine Beziehung statt, welche als Bedingung des Wesens einer linearen Differentialgleichung vierter Ordnung gilt u. s. f., so dass man zu folgender allgemeinen Regel gelangt: der mathematische Begriff der functionellen Form, durch welche das Wesen zweier in diesem Sinne zu einander in Be-

ziehung stehender Curven dargestellt wird, ist abhängig von der Anzahl der als Zwischenglieder der Beiden jeweilig fungirender Curven, u. zw. insofern, als die jene Beziehung kennzeichnende lineare Differentialgleichung stets eine um zwei Grade höhere Ordnung aufweist, als Zwischenglieder vorhanden sind.

Dieser Umstand ist nun auch bezeichnend für die Beschaffenheit dieser Gleichungen, sowie für deren Lösung. Indem die Abhängigkeit der in Betracht kommenden gegebenen Beziehung zweier Curven von den gleichartigen Beziehungen der aufeinanderfolgenden Zwischenglieder in Berücksichtigung gezogen wird, lässt sich die bezügliche Differentialgleichung höherer Ordnung auf Grundlage der vorhandenen Normen in Differentialgleichungen zweiter Ordnung zerlegen, so dass die Lösung auf die ursprüngliche Integrationsmethode zurückgeführt werden kann.

Das Wesen der durch Zerlegung der gegebenen functionellen Formen resultirenden Differentialgleichungen lässt sich daher in folgender Weise definiren: Jede zwischen zweien aufeinanderfolgenden Curven des originären Systemes bestehende Beziehung weist den bisherigen Ausführungen gemäss eine bestimmte Abhängigkeit von jeder zwischen zweien beliebigen Curven des Systemes stattfindenden Beziehung auf, welche sich darin äussert, dass die functionelle Beschaffenheit der zu einander in Beziehung stehenden Ordinaten der in Betracht kommenden Curven einen homogenen Charakter in deren Veränderlichkeit involvirt, so dass einer bestimmten, im Principe einheitlichen Norm in dieser Hinsicht Rechnung getragen zu werden vermag.

Diese im Principe einheitliche Norm lässt sich durch folgenden Rechnungsprocess charakterisiren: Besteht zwischen zwei gegebenen Curven eine Relation, welcher durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung*)

$$z'' + \alpha z' + \beta z = 0$$

Genüge geleistet wird, so kann man durch Differentiation dieser Gleichung verbunden mit entsprechender Substitution zu einer neuen Differentialgleichung zweiter Ordnung gelangen, die einer analogen Relation mit der nächstfolgenden Curve Genüge leistet.

Es ergibt sich nämlich durch Differentiation obiger Gleichung

$$z''' + \alpha z'' + \alpha' z' + \beta z' + \beta' z = 0$$

und weiter durch Elimination der einfachen Variablen z mittelst Verbindung der beiden Gleichungen, die Differentialgleichung

$$z''' + (\alpha - \frac{\beta'}{\beta}) z'' + (\alpha' - \alpha \frac{\beta'}{\beta} + \beta) z' = 0$$

welche als eine solche zweiter Ordnung erkannt werden muss. Dieselbe stellt

*) Siehe „Allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und deren Bedeutung für die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie" Lief. IX, Formel 46 und 49.

nun mit Rücksicht auf die Beschaffenheit ihrer Coëfficienten das Analogon jener Differentialgleichung dar, welche der Beziehung der zwei nächsten Curven ohne Zwischenglied Genüge leistet. Die eigentliche Differentialgleichung dritter Ordnung, welche der Beziehung zwischen zweien durch ein Zwischenglied getrennten Curven Genüge leistet, resultirt aus obigen Gleichungen, sobald anstatt der einfachen Variablen z deren erster Differentialquotient z' aus der Rechnung eliminirt wird. Es ergibt sich sodann die Gleichung

$$z''' + \left(\alpha - \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\right) z'' + \left(\beta' - \beta\,\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha}\right) z = 0$$

so dass in z die Ordinate der ersten Curve und in den bezüglichen Coëficienten der functionelle Ausdruck der Ordinate der mit dieser in Beziehung stehenden zweitnächsten Curve erblickt werden kann.

Mit Rücksicht hierauf lässt sich die allgemeine reducirte lineare Differentialgleichung dritter Ordnung von der Form

$$z''' + \varphi(x)\, z'' + \psi(x)\, z = 0$$

näher bestimmen, indem die Coëficienten, den gegebenen Functionen von α und β gemäss, durch

$$\alpha - \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} = \varphi(x) \qquad \text{und} \qquad \beta' - \beta\,\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha} = \psi(x)$$

ausgedrückt werden. Durch Verbindung dieser beiden Relationen ergeben sich sodann die Gleichungen

$$\alpha - \varphi(x) = \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \qquad \text{und} \qquad \beta' - \beta\,[\alpha - \varphi(x)] - \psi(x) = 0$$

aus denen β als Function von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ resultirt, sobald α als bestimmte Function von x gegeben ist. Da nun bekanntlich schon die Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch den bestimmten Werth

$$\alpha = -\frac{2}{x + 2C}$$

bedingt ist, so werden die beiden obigen Gleichungen zur Feststellung der functionellen Beschaffenheit von β auf Grund der beliebigen Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ einerseits und zur nummerischen Bestimmung der Constante C andererseits dienen. Auf diese Weise gelangt man wieder zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form

$$z'' - \frac{2}{x + 2C}\, z' + \beta z = 0$$

deren Integration bekanntlich ohne weiters durchgeführt werden kann. Es ist naheliegend, dass auf gleiche Weise lineare Differentialgleichungen vierter, fünfter und $n$ter Ordnung gleichfalls auf eine oder mehrere Differentialgleichungen zweiter Ordnung von gemeinsamen Ursprunge zurückgeführt werden können, so dass hiedurch die allgemeine Frage der Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung erschöpft erscheint.

Reflexionen über die Veränderung des relativen Werthes und der couranten Kaufkraft des Geldes.

I.

Es ist eine bekannte Erscheinung im wirthschaftlichen Verkehre, dass der relative Werth des Geldcapitales sich in einer langsam fortschreitenden, fast stetigen Abnahme befindet und in Folge dessen die Kaufkraft desselben sich fortwährend verringert. Die Ursachen dieses Vorganges mit Sicherheit festzustellen und diesbezüglich zu bestimmten Ergebnissen zu gelangen, ist der Wissenschaft bisher noch nicht gelungen, jedoch sind genügende Anhaltspunkte vorhanden, um die allgemeinen Grundsätze, die eine einfache Beobachtung und Erwägung nahelegt, in ihrem Wesen zu kennzeichnen. Dies bedeutet angesichts der Unsicherheit des hier in Betracht kommenden wissenschaftlichen Forschungsgebietes immerhin einen Erfolg, da die Geschichte des Geldes und der Preise eine der schwierigsten und wichtigsten Disciplinen der Wirthschaftsgeschichte bildet. Dieselbe gewährt einen tiefen Einblick in das Getriebe der Volkswirthschaft und lässt, indem sie alle Phasen der ökonomischen Entwicklung berührt, den freiesten Spielraum für die umfassende Beobachtung. Gleichsam die ökonomischen Wirkungen in ihren Ursachen aufklärend, liefert diese Disciplin statistische Anhaltspunkte für einschneidende Veränderungen in den wirthschaftlichen Entwicklungsformen und lässt in deren Wandlungen erkennen, ob im Güterumlauf und in der Gütervertheilung der Werth der Arbeit oder der blosse Besitz oder die Speculation zur Geltung kommt, ob und inwiefern der allgemeine materielle Wohlstand in seiner Entwicklung wahrzunehmen ist.

Die Grundsätze, welche hinsichtlich der Einflussnahme der wirthschaftlichen Verhältnisse auf die Veränderungen des relativen Geldwerthes in erster Linie in Berücksichtigung zu ziehen sind, kommen nach mehrfacher Richtung hin in Betracht. Vor allen Dingen ist es eine feststehende Thatsache, dass seitdem Geldmünzen existiren, dieselben im Laufe der Jahrhunderte fortwährend in ihrem Werthgehalte verschlechtert wurden, ebenso wie die Kaufkraft des Geldes überhaupt sich im Laufe der Zeit fast stetig verringerte. Inwieweit sich dieser Process vollzog, darüber bestehen verschiedene Meinungen, doch gehen dieselben nicht allzusehr auseinander, so dass ein annähernd zuverlässiger Schluss immerhin gezogen werden kann. Auch der Zinsfuss befindet sich, so weit die Geschichte der Volkswirthschaft reicht, im stetigen Rückgange. Derselbe war im frühen Mittelalter ungemein hoch, und zwar bei beweglichen Gegenständen und beim Gelde bedeutend höher als beim Grundbesitze. Zur Zeit der Naturalwirthschaft war der Werth von Grundbesitz und Naturproducten ein viel geringerer als zur Zeit der Capitalwirthschaft, während welcher sich erst Handel und Industrie zu entwickeln begannen; und unter den Naturproducten stiegen die Fleischpreise oft viel stärker als

die Getreidepreise. Dies erklärt sich daraus, dass wohl eine Ueberproduction an Getreide und sonstigen Vegetabilien durch intensivere Wirthschaft möglich war, nicht aber hinsichtlich animalischer Nahrung. Von besonderer Wichtigkeit ist der Umstand der stetigen Zunahme der Bevölkerung im Laufe der Jahrhunderte, mit welcher wohl die Arbeitskraft zunahm, nicht aber auch das Quantum der Güter das auf den Kopf kam. Die Güter in ihrer Gesammtheit vermehrten sich wohl in einem gewissen Verhältnisse zur steigenden Arbeitskraft, doch nicht im Verhältnisse zur Bevölkerungszunahme. Aber auch der Zufluss an edlen Metallen machte sich in seiner Wirkung geltend, insbesondere da sich derselbe nicht gleichmässig vertheilen konnte angesichts der ungleichen wirthschaftlichen Entwicklung. Die socialen Einflüsse spielten in der Entwicklung des relativen Werthverhältnisses des Geldes gleichfalls eine bedeutende Rolle, indem Entvölkerung durch langjährige Kriege und deren Folgen das Arbeitsangebot erhöhten und günstigere Lebensbedingungen hervorriefen. Diesbezüglich war die Zeit zwischen dem 14. bis 17. Jahrhunderte eine der merkwürdigsten Perioden der Preisgeschichte, welche namentlich in letzterer Zeit die Aufmerksamkeit der nationalökonomischen Forschung in Anspruch nimmt. Die durch Pest und Hungersnoth hervorgebrachte Entvölkerung im 14. Jahrhunderte hatte ein unverhältnissmässiges Wachsthum der Löhne zur Folge, während gleichzeitig die Kaufkraft des Geldes zunahm, d. h., die Lebensmittel mit Einschluss der Kleidung wohlfeiler wurden. Von der Mitte des 15. Jahrhundertes verringerte sich wieder der Geldwerth und dieser Process beschleunigte sich im gleichen Verhältnisse, als die grosse Vermehrung der Edelmetallmassen in Folge der Entdeckung Westindiens Fortschritte machte und die Population wieder einen höheren Stand erreichte. Aber fast gleichen Schritt mit diesem Processe hielt derjenige einer stetig fortschreitenden Lohnverringerung, welche die Folge der mit der zunehmenden Population steigenden Arbeitsnachfrage war.

Die Edelmetall-Erzeugung nahm nach der wahrscheinlichen Berechnung Wiebe's*) von 1500—1544 jährlich etwa um 1 Percent, von 1545—1600 um 2·2 Percent zu und fiel dann bis zum Schlusse des 17. Jahrhunderts unter 1 Percent herab. Dadurch stieg die Geldmasse innerhalb dieser Zeit fast auf das Fünffache. Schwerer dagegen festzustellen ist die Volksvermehrung und noch schwieriger, von der Vertheilung des Edelmetallstromes eine Anschauung zu gewinnen. Fast mit Sicherheit lässt sich aber die Behauptung aufstellen, dass die Vermehrung der Geldmenge zu keiner Zeit ihre volle Wirkung im Sinne der Waarenvertheuerung geltend zu machen imstande war; und dass dieselbe stets ein nahezu doppeltes Wachsthum gegenüber der Erhöhung der Waarenpreise aufweisen musste. Dies erklärt sich aus dem Umstande, dass der Goldstrom angesichts der schwerfälligen Communicationen jener Zeit nur langsam fortschreiten konnte und überdies der geringste Theil desselben der Masse des Volkes zugute kam.

*) Siehe: Wiebe, Geschichte der Preisrevolution des 16. und 17. Jahrhunderts.

Die nachtheilige Wirkung, welche die Volksvermehrung auf die Lohnverhältnisse ausübte, konnte nur durch das aufstrebende wirthschaftliche Leben, das Aufblühen von Handel und Industrie und Erschliessung grosser Absatzgebiete, welche mit der Entwicklung der Seeschifffahrt gleichen Schritt hielt, behoben werden.

Den Folgen der wachsenden Population musste die erhöhte Arbeitsgelegenheit entgegenwirken, um der zunehmenden Ungunst der Lebensbedingungen theilweise abzuhelfen. Die intensivere wirthschaftliche Bethätigung der Menschen musste die überschüssige Arbeitskraft, welche sich aus der stetig wachsenden Population ergab, in neue Bahnen lenken und derselben immer weitere Gelegenheit für ihre Wirksamkeit bieten. Gleichzeitig konnten mit Hilfe der sich entwickelnden Communicationen neue Quellen für die Zufuhr billiger Lebensmittel geschaffen werden, welches Bestreben besonders durch die Entdeckung neuer Seewege gefördert wurde. Auf diese Weise war es möglich, nach und nach die ungünstige Wirkung abzuschwächen, welche die wachsende Population hinsichtlich der Löhne einerseits und die zunehmende Production des Edelmetalles bezüglich der Waarenpreise andererseits ausübte, wenn auch im Laufe der Jahrhunderte viele andere schädliche Einflüsse sich geltend machten, welche im entgegengesetzten Sinne wirkend, die Lebensbedingungen der Menschen noch mehr erschwerten, als dies die wirthschaftlichen Verhältnisse erheischten.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, wie wichtig die Preisgeschichte ist, obwohl ihr Ausgangspunkt höchst unsicher ist. Es gibt nämlich gar keinen sicheren Werthmaassstab, da nicht blos das Verhältniss des Metalles zu den Waaren, sondern auch das der Waarenwerthe gegenseitig sehr schwankend ist. Die alten Völker pflegten zur Zeit des Tauschhandels ein Stück Vieh als Wertheinheit zu betrachten (daher pecunia, fê), aber der Werth des Viehes pflegt mit dem Fortschritte des Ackerbaues stärker zu steigen, als das Getreide; ebenso wenig bleibt aber auch ein Quantum Getreide, das man schon zur Grundlage der Berechnung nahm, im Werthe gleich oder gleichmässig steigend. Man hat daher den durchschnittlichen Lebensunterhalt zugrunde gelegt und Einnahmen und Ausgaben berechnet. Diesen Weg schlägt der Franzose Vicomte G. d'Avenel in dem grossen Werke „Histoire économique de la propriété, de salaires, des denrées et de tous les prix en général depuis l'an 1200 jusqu'en l'an 1800" ein. Freilich zu absolut sicheren Ergebnissen gelangt auch d'Avenel nicht, aber es genügt im Allgemeinen eine relative Sicherheit und eine solche ist gewiss erreichbar. Es ist hier wie bei anderen wissenschaftlichen Hypothesen, die in ihrem letzten Grunde unbeweisbar sind, aber doch zur Erklärung des Thatbestandes hinreichen.

Zuerst ist natürlich der Geldwerth festzustellen. Zu diesem Zwecke verfolgt d'Avenel die Geschichte von 1000 Livres (Tournoises) durch die Jahrhunderte herab — er kann das leicht, da Frankreich und England in der Münzbezeichnung viel consequenter blieben als Deutschland — und stellt die nachstehende Tabelle zusammen.

Zeit	Absoluter (innerer) Werth Francs	Kaufkraft	Relativer Werth Francs	Zinsfuss Percent	Einkommen Francs
850	81.000	× 9	729.000	10	72.900
1200	21.770	× 4½	97.965	10	9.796
1300	16.000	× 4	64.000	10	6.400
1400	7.530	× 4½	33.880	10	3.388
1500	4.640	× 6	27.840	8·33	2.319
1600	2.570	× 2½	6.425	6·05	417
1700	1.480	× 3	4.440	5	222
1789	950	× 2	1.900	5	95
1893	950	× 1	950	4	38

Daraus erhellt, dass ein Gläubiger von 1000 Livres durch das Zusammenwirken verschiedener das Geldeinkommen bestimmender Umstände aus einem reichen Manne mit 72.900 Francs Jahreseinkommen zum einem armen Rentner mit 38 Francs im Verlaufe der Jahrhunderte herabsinken kann.

An dieser Tabelle ist vor allem der Werthcoëfficient, der den Wechsel der Kaufkraft des Geldes angibt, hervorzuheben, er sinkt von 9 ziemlich gleichmässig mit nur zweimaliger Rückwärtsbewegung auf 1 herab. Dass eine gleichbleibende Masse Edelmetalles in der karolingischen Zeit neunmal mehr gegolten habe, als heute, ist natürlich nicht sicher beweisbar, aber der Coëfficient ist sicher nicht zu hoch gegriffen, viele nehmen eine stärkere Werthverminderung an.

Es ist anzunehmen, dass ein analoger Process, wenn auch in anderer Form sich auch in den übrigen europäischen Culturstaaten vollzog, u. zw. umsomehr, als der relative Geldwerth jederzeit einer allgemeinen Ausgleichung, zumindest zwischen den handeltreibenden Völkern, unterworfen war.

Daher lässt sich aus diesen Beobachtungen annähernd ein Schluss auf den Grad der allgemeinen Abnahme des relativen Geldwerthes ziehen, sowie aus dem Verlaufe dieses Processes während einer mehr als tausendjährigen wirthschaftlichen Entwicklung der Menschheit annähernd zuverlässige Daten sich ergeben, welche von besonderem finanzwissenschaftlichen Interesse sein dürften. Durch Benützung der vorliegenden Tabelle gelangt man nämlich mittelst Rechnung zu folgenden Ergebnissen:

Der relative Werth des Geldcapitals hat im Durchschnitte abgenommen

Während der letzten 1000 Jahre um 0·651 Percent jährlich
" " " 500 " " 0·715 " " und
" " " 100 " " 0·702 " "

Aus diesen Durchschnitts-Percenten ist zu entnehmen, dass die Abnahme des relativen Geldwerthes eine ziemlich regelmässige ist und im Laufe der Jahrhunderte periodisch nur mässige Abweichungen aufweist.

Nähere Untersuchungen über das Wesen der Mortalitäts-curven und deren mathematische analytische Beschaffenheit.

IV.

Das Ergebniss der bisherigen Ausführungen betrifft die Aufrollung der bedeutsamen Frage der allgemeinen Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung in ihrer Anwendung auf die mathematische Statistik. Was in dieser Hinsicht bis nun auf dem Wege deductiver Forschung unter Beweis gestellt wurde, ist zwar nur eine in weiten Umrissen gegebene Darstellung des Wesens jener Formen, welche das System der originären Wahrscheinlichkeitscurven in seiner unendlichen Ausdehnung umfasst, doch vermag dieses allein schon zur Genüge anzudeuten, inwieweit das natürliche Absterbegesetz nicht nur an und für sich, sondern auch in seinen wesentlichen Elementen, der mathematischen Norm unterworfen ist.

Die Wahrnehmung eines direct bestehenden Zusammenhanges zwischen allen Curven des gesammten Systems lässt auf eine unendliche Anzahl elementarer Formen schliessen, von denen jede für sich irgend einen wesentlichen, auf das Absterbegesetz geübten natürlichen Einfluss von bestimmter Gesetzmässigkeit darstellt. Vom entgegengesetzten Gesichtspunkte aufgefasst, bedeutet dies nichts Anderes, als eine dem Absterbegesetze zugrunde liegende Summe unendlich vieler specieller Wesenheiten, deren Gesetzmässigkeit von derjenigen der Sterblichkeit abhängig ist oder umgekehrt, welche in ihrer Gesetzmässigkeit das Wesen des Absterbegesetzes bedingen.

Zum grössten Theile bilden diese Wesenheiten abstracte Begriffe, deren nähere Definition der weiteren Forschung vorbehalten bleibt, und nur jene in den bisherigen Ausführungen durch die hervorgehobenen beiden Curvenpaare gekennzeichneten, dürfen gemäss ihrer Beschaffenheit und mathematisch statistischen Bedeutung als bekannt vorausgesetzt werden. Es muss deshalb von besonderem Interesse sein, den Versuch zu machen, zumindest einzelne mit den die Sterblichkeit betreffenden bekannten Wahrscheinlichkeitscurven in unmittelbarem Zusammenhange stehenden Gesetzmässigkeiten in ihrer Bedeutung kennen zu lernen. Die in dieser Hinsicht vorzunehmenden Untersuchungen erweisen sich, mit Rücksicht auf ihre mathematisch statistische Bedeutung, insofern als wichtig, indem die Entwicklung des originären Curvensystems die exacte Beantwortung mancher bisher ungelöster Fragen ermöglicht. Deshalb muss es auch für die Forschung von grossem Werthe sein, facultativ die Bedeutung jener elementaren Formen festzustellen, in deren Wesenheit die Voraussetzung für die Gesetzmässigkeit der menschlichen Mortalität zu suchen ist.

Schon bei Berücksichtigung der nächsten, ausserhalb der bisherigen Untersuchungen stehenden Wahrscheinlichkeitscurven stossen wir auf einen neuen, vom mathematisch statistischen Gesichtspunkte bisher noch unbe-

kannten Begriff. Es ist dies die von uns so benannte Wahrscheinlichkeit der mittleren Lebensdisposition, welche durch die Quotienten der Werthe der wahrscheinlichen Lebensdauer in zwei Lebensjahren gegeben ist. Wir meinen das Verhältniss

$$v_1 = \frac{w_{x+1}}{w_x}$$

welches diese Wahrscheinlichkeit während des $x + 1$ten Lebensjahres darstellt. Aehnlich wird diese Wahrscheinlichkeit während des $x + 2$ten Lebensjahres für eine $x$jährige Person durch

$$v_2 = \frac{w_{x+2}}{w_x}$$

zur Darstellung gelangen, so dass die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten für alle nachfolgenden Lebensjahre einer $x$jährigen Person die wahrscheinliche Dauer der im $x$ten Lebensjahre vorhandenen ursprünglichen Lebensdisposition darstellt, demnach die Form

$$s_x = \frac{w_{x+1}}{w_x} + \frac{w_{x+2}}{w_x} + \frac{w_{x+3}}{w_x} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

hier Geltung besitzt. Dieselbe ist analog der Form für die wahrscheinliche Lebensdauer

$$w_x = \frac{L_{x+1}}{L_x} + \frac{L_{x+2}}{L_x} + \frac{L_{x+3}}{L_x} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

welche die Summe der Lebenswahrscheinlichkeiten einer $x$jährigen Person in den folgenden Jahren betrifft und durch die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten die wahrscheinlich zu erwartende fernere Lebensdauer zum Ausdrucke bringt. Es besteht also für die Bestimmung der wahrscheinlichen Dauer der im $x$ten Lebensjahre vorhandenen ursprünglichen Lebensdisposition das gleiche Rechnungsprincip wie für die wahrscheinliche fernere Lebensdauer, nur sind die in Rechnung kommenden Zahlenelemente verschiedenartiger Beschaffenheit. Nehmen wir nun an, dass die Werthe w_x, w_{x+1}, w_{x+2} etc. auf Grundlage ausgewählter Leben festgestellt wurden, so müsste offenbar s_x als Ausdruck der wahrscheinlichen Dauer der im $x$ten Lebensjahre vorhandenen ursprünglichen Lebensdisposition im Wesen mit dem Begriffe der wahrscheinlichen Selectionsdauer sich decken, so dass bei Berücksichtigung der Auswahl eigentlich diese letztere durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten der mittleren Lebensdisposition zur Darstellung gelangt. Berücksichtigt man weiter, dass auch die Auswahl selbst in ihrer qualitativen Beschaffenheit eine verschiedenartige sein kann und dieser Umstand rechnungsmässig zur Geltung gelangen muss, da von demselben die wahrscheinliche Selectionsdauer gleichfalls abhängig ist, so erscheint es als selbstverständlich, dass diese qualitative Beschaffenheit der Auswahl in der Rechnung als willkürliche Constante auftreten wird, deren Feststellung aus den gegebenen statisti-

schen Daten eines concreten Falles jeweilig erfolgen kann. Auf diese Weise ergibt sich nun das Wesen der wahrscheinlichen Selectionsdauer der einzelnen Altersclassen ausgedrückt durch eine geschlossene mathematische Function der wahrscheinlichen Lebensdauer derselben. Da jedoch diese letztere wieder als Function der Lebenden sich darstellen lässt, so folgt daraus, dass die wahrscheinliche Selectionsdauer auch direct als Function der Lebenden mathematisch bestimmt werden kann, mithin in ihrer geometrisch analytischen Darstellung einen Theil des originären Curvensystems bildet, und demzufolge auch in ihrer Gesetzmässigkeit gekennzeichnet erscheint.

Zieht man den hier hervorgehobenen Umstand, betreffend die functionelle Abhängigkeit der wahrscheinlichen Selectionsdauer von der wahrscheinlichen Lebensdauer und den mit dieser in Beziehung stehenden Zahlen der Lebenden näher in Betracht, so gelangt man zu dem Schlusse, dass die wahrscheinliche Lebensdauer thatsächlich als functionelles Zwischenglied der beiden anderen fungirt, da sich zwischen den Zahlen der Lebenden und der wahrscheinlichen Selectionsdauer eine directe Beziehung herstellen lässt, in welcher nach der Art dieser Beziehungen überhaupt, wieder das Alter x als vermittelnde Variable fungirt. In der vorigen Abhandlung über dieses Thema wurde nun darauf hingewiesen, dass alle dem originären Curvensysteme angehörenden Curven untereinander in Beziehung stehen; dass jedoch diese Beziehung mit der Reihenfolge der in Betracht kommenden Curven sich ändert, und zwar ist die Beziehung zweier unmittelbar aufeinander folgenden Curven eine andere, wie diejenige, welche zwischen zweien durch Zwischenglieder getrennten Curven besteht, wie auch die Anzahl der Zwischenglieder die Verschiedenheit dieser Beziehungen bedingt.

In diesem Falle hat man es zweifellos mit einer Beziehung zwischen zweien durch ein Zwischenglied getrennten Curven zu thun, da hier zwischen der Curve der Lebenden und der mit dieser in Beziehung stehenden Curve der wahrscheinlichen Selectionsdauer als Zwischenglied die Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer auftritt, zu welcher nebenbei bemerkt die Curve der wahrscheinlichen Selectionsdauer in gleicher Beziehung steht, wie diese zur Curve der Lebenden. Während also die Beziehungen zwischen den unmittelbar aufeinanderfolgenden Curven gleiche sind, wird die Beziehung der beiden äusseren, durch ein Zwischenglied getrennten Curven anderer Beschaffenheit sein.

Wird nämlich auf die Ausführungen in der vorigen Abhandlung Bezug genommen, so ergibt sich die interessante Wahrnehmung, dass die functionelle Beziehung zwischen der Curve der Lebenden und der Curve der wahrscheinlichen Selectionsdauer unter Vermittlung des Alters x mit der mathematischen Grundform einer linearen Differential-Gleichung dritter Ordnung übereinstimmt, daher es unzweifelhaft erscheint, dass der Beziehung dieser beiden Curven zu einander durch eine lineare Differential-Gleichung dritter Ordnung Genüge geleistet wird. Hingegen entspricht, wie bekannt, der Beziehung zweier unmittelbar aufeinanderfolgenden Curven eine func-

tionelle Form, welche mit der Grundform der linearen Differential-Gleichungen zweiter Ordnung sich deckt.

Mit Rücksicht auf die vorliegenden Ausführungen wird daher die functionelle Beziehung zwischen der Curve der Lebenden und der Curve der wahrscheinlichen Selectionsdauer sich unschwer mathematisch darstellen lassen, umsomehr als die functionelle Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und derjenigen der wahrscheinlichen Selectionsdauer nicht nur als übereinstimmend mit der functionellen Beziehung zwischen der Curve der Lebenden und der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer bekannt ist, sondern auch in ihrer geometrisch analytischen Bedeutung ausser Frage steht.

Auf Grundlage dieser Ergebnisse kann daher eine vollständige Analogie im Wesen der homogen auftretenden functionellen Beziehungen constatirwerden, doch nicht nur in den Beziehungen jener der Reihenfolge nach homogenen Curvenpaare des originären Systems besteht eine Uebereinstimmung, sondern dieselbe macht sich auch hinsichtlich der geometrisch analytischen Beschaffenheit aller in Betracht kommenden Curven selbst bemerkbar, indem allen diesen Curven ein bestimmter functioneller Begriff gemeinsam ist, welcher dieselben als Wahrscheinlichkeitscurven erkennen lässt. Dieser Analogie in den Beziehungen entspringt nun auch eine Uebereinstimmung in der geometrisch analytischen Beschaffenheit der Curven, so dass dieselben auch gleichen functionellen Beziehungen ihrer Coordinaten entsprechen, und in Folge dessen eine ausgesprochene Aehnlichkeit in ihrer Gestalt aufweisen. Dessenungeachtet äussert sich eine Unterschiedlichkeit derselben sowohl hinsichtlich ihrer Krümmungsverhältnisse, als auch in Betreff ihres Verlaufes, welche auf die Ungleichheit der in Betracht kommenden bestimmten, beziehungsweise willkürlichen Constanten zurückzuführen ist. Die Gemeinsamkeit der Abscisse aller dieser Curven bedingt es wohl, dass einzelne Constanten durch identische Werthe zum Ausdrucke kommen, doch reichen die übrigen Constanten vollständig hin, um das Curvengebilde in seinem Wesen zu beeinflussen.

Angesichts dessen gestaltet sich die Gleichung für die Curve der wahrscheinlichen Selectionsdauer gleichartig wie jene der wahrscheinlichen Lebensdauer, indem für dieselbe die Formen

$$s_x = B \, . \, C_1 \frac{1 - t^2}{t} \, . \, \tau \quad \text{und} \quad x + 2\,C = 8\,C_1 \, . \, \tau$$

Geltung besitzen, in welchen B als willkürliche und C und C_1 als bestimmte Constanten fungiren, hinsichtlich deren Feststellung auch die Constanten der correspondirenden Curven der wahrscheinlichen Lebensdauer maassgebend sind. Die willkürliche Constante B wird durch die qualitative Beschaffenheit der Auswahl bedingt und bildet gewissermaassen jenen Coëfficienten, welcher den Maassstab der allgemeinen Lebensdisposition des in Betracht kommenden Menschenmateriales kennzeichnet.

Reflexionen über die Veränderung des relativen Werthes und der couranten Kaufkraft des Geldes.

II.

In der vorigen Abhandlung über diesen Gegenstand gelangten wir auf Grund einer von G. d'Avenel aufgestellten Tabelle zu dem Schlusse, dass die durchschnittliche relative Werthabnahme des Geldcapitales etwa auf 0·7 Percent im Jahre sich beläuft. Dies ist in folgender Weise zu verstehen: Dadurch, dass der relative Werth des Geldcapitales jedes Jahr um 0·7 Percent desjenigen im vorhergehenden Jahre abnimmt, wird derselbe während 100 Jahren beiläufig auf die Hälfte reducirt, so dass im Verlaufe der Jahrhunderte eine runde Abnahme auf etwa

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024} \ldots$$

im Durchschnitte, und zwar von hundert zu hundert Jahren erfolgt. Auf diese Weise erklärt sich in der Tabelle das Zusammenschrumpfen des relativen Capitalswerthes von 729.000 auf 950 Francs während des Zeitraumes von etwa 1000 Jahren. Da nun gleichzeitig auch ein unaufhörliches Sinken des Zinsfusses im Laufe der Zeiten sich vollzog und dasselbe bis zum heutigen Tage noch im erhöhten Maasse sich geltend macht, so lässt sich annehmen, dass der Zinsfuss im Laufe weiterer Jahrhunderte zu einem minimalen sich gestalten wird. In diesem Falle ist jedoch zu erwarten, dass das Geldcapital zumindest seinen relativen Werth mit Hilfe des Zinses unverändert aufrecht zu erhalten suchen wird, und zwar umsomehr, als demselben stets die Mittel zu Gebote stehen werden, dieses Ziel durch dauernde Immobilisirung zu erreichen. Nach den 1000jährigen Erfahrungen bezüglich des jährlichen Percentsatzes der durchschnittlichen relativen Werthabnahme des Geldcapitales lässt sich daher annehmen, dass in dem gleichen Percentsatze sich auch das Minimum eines Capitalszinses birgt, welcher an und für sich mit dem Zinsengenusse im heutigen Sinne nichts mehr zu thun hätte, vielmehr ausschliesslich nur zum Zwecke der Erhaltung des relativen Capitalswerthes bestünde.

Zu allen Zeiten bildete die Immobilisirung des Geldcapitales jenes Mittel, den relativen Werth desselben aufrechtzuerhalten, da der absolute Werth von Grund und Boden von diesem nahezu unabhängig bleibt. Latifundien bilden stets den festen Punkt in der Erscheinungen Flucht, sie repräsentiren in ihren Producten das Unentbehrlichste, also das stetig werthvollste, nämlich die vegetabilische und animalische Nahrung. Und der Werth derselben wird durch die stetig wachsende Bevölkerung nur erhöht. Dieser Einfluss der wachsenden Bevölkerung macht sich in jeder Hinsicht geltend. Die Werthverminderung des Geldes wird durch die zunehmende Production des Edelmetalles verursacht, bleibt aber im grossen Ganzen immer hinter

dem Umfange der Metallvermehrung zurück, weil die Zunahme der Bevölkerung und der Waaren ihre Wirkung abschwächt. Sonst würden sich die Waaren viel rascher vertheuern.

In gleichem Maasse aber, als mit der Vermehrung der Edelmetallproduction der relative Geldwerth sich vermindert und in Folge dessen die Waaren im Preise steigen, wird auch in Folge der Volksvermehrung die Arbeitsnachfrage erhöht und der Lohn gedrückt. Daraus geht also hervor, dass die Lebensbedingungen auch in jenem Grade ungünstiger werden, als der stetigen Volksvermehrung gleichzeitig auch eine bedeutende Vermehrung der Edelmetallproduction sich zugesellt. Blos der wirthschaftliche Aufschwung und das Aufblühen von Handel und Industrie vermag in Folge des hiedurch hervorgebrachten stärkeren Arbeitsangebotes diese nachtheilige Wirkung abzuschwächen. Die Geschichte der Preise während der letzten Jahrhunderte gibt hierüber den erforderlichen Aufschluss.

Wenn auch nicht die historische Thatsache bekannt wäre, dass in der ersten Hälfte des 17. Jahrhundertes der Capitalismus und die Capitalistenringe blühten, sonst aber das gewerbliche Leben zurückging, so müsste man aus der Preisbewegung jener Zeit auf etwas derartiges schliessen. In dieser Periode stiegen die landwirthschaftlichen Producte verhältnissmässig viel höher im Preise, als die Industrie-Artikel. Auch die Handelsproducte, mit denen die grossen Gesellschaften sich bereicherten, stiegen zwar wenig oder gar nicht, warfen aber immerhin noch reichlichen Gewinn ab. Unter den landwirthschaftlichen Producten selbst stiegen jene viel höher, die einer intensiveren Cultur bedurften: Getreide mehr als das Vieh. Die volkswirthschaftliche Arbeitsintensität ging offenbar zurück in den aufregenden politischen und religiösen Ereignissen und es trat eine naturalwirthschaftliche Reaction ein.

Eine ähnliche Erscheinung machte sich im Mittelalter geltend, nur war dieselbe in anderen Ursachen zu suchen. Die Folgen der Entdeckung Amerikas und des hiedurch bewirkten Goldstromes blieben nicht aus. Welchen Einfluss gerade diese grossen Umwälzungen im Anfang des 16. Jahrhunderts auf die Volkswirthschaft ausübten, das beweist der Umstand, dass die Vertheuerung der Lebensmittel schon damals begann, als das Zuströmen des Edelmetalls kaum erst gespürt wurde. Bis zur Mitte des Jahrhunderts war das Zuströmen noch gering und der Geldvorrath so erschöpft, dass dadurch allein das überraschende Emporschnellen der Preise nicht erklärt werden kann. Die Ursachen lagen also weiter und waren allgemeiner. Die Unternehmungslust lag darnieder und gerade unter ihr hatten die Massen von Gesellen schwer zu leiden, denen der Lohn gekürzt wurde, wie aus vielen Klagen hervorgeht.*) Sonst hätte bei der allgemeinen Preissteigerung der Lohn von Gesellen und Taglöhnern sicher auch zugenommen. Hätte das gewerbliche und Handelsleben sich damals in der alten Blüthe erhalten, wie es zu Be-

*) Vergleiche Janssen, Deutsche Geschichte VIII.

ginn des Mittelalters bestand, oder wäre es aufgeblüht wie in England, dann hätte die Preissteigerung die Lebenshaltung nicht verschlechtern können. In England waren die Preise nicht weniger gestiegen, als auf dem Festland, aber das hinderte dessen wirthschaftlichen Aufschwung nicht.

Auch im 19. Jahrhundert gab es eine Preisrevolution und viele Umstände gestalteten es ähnlich, wie das 16. Jahrhundert: mit einer Bevölkerungs-Zunahme, welche das deutsche Volk innerhalb nicht ganz 100 Jahren verdoppelte, verbindet sich eine enorme Zunahme des Edelmetalls und eine gewisse capitalistische Ringbildung, die zwar nicht der Form, aber wohl dem Wesen nach gefährlicher war, als die Monopolgesellschaften des 16. Jahrhunderts. Aber das aufstrebende wirthschaftliche Leben hat doch die Gefahren hintangehalten. Während in den Religions-Streitigkeiten des 16. Jahrhunderts das Wirthschaftsleben zu kurz kam und die religiöse Frage die Geister von der materiellen ablenkte, hat der humane Gedanke des 19. Jahrhunderts sich doch als heilsam erwiesen, so sehr man noch viele Lücken empfinden mag. Nach ziemlich übereinstimmender Berechnung haben sich die Löhne gegen das vorige Jahrhundert verdreifacht, gegen das 16. Jahrhundert vervierfacht.**) Die aufstrebende wirthschaftliche Entwicklung des letzten Jahrhundertes hatte also eine Verbesserung der Lebensbedingungen zur Folge, trotzdem die Population und Edelmetallproduction sehr bedeutende Fortschritte machte.

Aber auch aus den entgegengesetzten historischen Merkmalen lässt sich ein Schluss für die Richtigkeit dieser Annahme ziehen. In dem natürlichen Processe der relativen Werthabnahme des Geldcapitales traten im Laufe der Jahrhunderte wiederholt Unterbrechungen ein. Die erste, bedeutendste dauerte von etwa 1370—1470, sie begann nicht unmittelbar nach der Pest, da zunächst noch gewisse Reserven aus früheren Zeiten den unmittelbaren Umschlag hemmten. 1470 kaufte man um dieselbe Summe doppelt so viel Waare als hundert Jahre zuvor, und der Werthcoëfficient hob sich, wie auf d'Avenel's Tafel zu sehen ist, von 4 auf 6. Nur die Löhne blieben sich gleich und stiegen sogar, während sonst alles wohlfeiler wurde. — Die Ursache davon war die Abnahme der Bevölkerung und die Entziehung des Edelmetalls vom öffentlichen Markte. — Man legte Silber und Gold lieber in Luxusgegenständen an und häufte Schätze auf, gerade weil es auf dem Markte so theuer war und weil die Unsicherheit der öffentlichen Zustände namentlich in Frankreich ein Hinausgeben für Unternehmungen nicht empfahl. Auch der Handel mit dem Orient in Seiden, Teppichen und Spezereien entzog dem Westen viel Geld. Der Luxus in Goldgeräthen und kostbaren Gewändern war im 15. Jahrhundert viel stärker als im 14., wie d'Avenel mit allen Beobachtern hervorhebt. Daraus geht hervor, dass die erfolgte Abnahme der Bevölkerung und die nachträgliche Entziehung des Edelmetalles aus der Circulation ungemein günstige Lebensbedingungen zur

**) Siehe G. Grupp, Geschichte der Preise in ihrer Beziehung zur Volkswirthschaft.

Folge hatte, d. h. die entgegengesetzten Ursachen hatten auch die gegentheilige Wirkung hervorgerufen.

Nicht ganz so schlimm wie in Frankreich lagen die Dinge in Deutschland. Handel und Gewerbe blühten dort immer noch und es gab einen gewissen Ueberfluss an Geld. Sonst wäre es nicht möglich gewesen, dass im Beginne des 15. Jahrhunderts Capitalconversionen mit einer Herabsetzung des Zinsfusses von 10 auf 8 Percent und der Erbrenten in Zeit und Lebensrenten vollzogen worden wären.***) Für Deutschland trifft daher auch Janssen's Schilderung von den glücklichen Zeiten des 15. Jahrhunderts mehr zu als für Frankreich, obwohl gerade auch für Frankreich d'Avenel's statistische Angaben eine gewisse Bestätigung dieser Annahme zu bieten scheinen. Man könnte nämlich einen gewissen Wohlstand leicht erschliessen aus der Höhe des Lohnes und der Billigkeit der Lebensmittel, wie sie d'Avenel constatirt, aber dieser Schluss würde schon durch die einfache Betrachtung etwas eingeschränkt, dass man im Mittelalter nicht an unsere landlosen Arbeiterheere denken darf, die von der Hand in den Mund leben. Doch selbst für Deutschland trifft Jansen's Annahme nur zu bei einzelnen Classen. Bei der grossen Masse der adeligen Grundherren, besonders bei den kleinen Rittern und Bauern, die ja ohnehin schon etwas abseits standen von der Bewegung des Capitals, ist wenig von einem allgemeinen Wohlstande zu merken.

Einen gewaltigen Umschlag dieser Lage brachte das 16. Jahrhundert. Wie schon ausgeführt wurde, vertheuerten sich in dieser Zeit die landwirthschaftlichen Producte am meisten, Industrie- und Handelsartikel kaum oder gar nicht, während die Löhne eine Tendenz zum Sinken zeigten. Dieser Process in Verbindung mit anderen Umständen, die einen besonders starken Einfluss in Deutschland übten, führten zu einer naturalwirthschaftlichen Reaction und zu einer Verminderung von Handel und Gewerbe. In dieser Zeit vereinigten sich also alle ungünstigen Momente. Theuere Lebensmittel, gesunkene Löhne und wirthschaftlicher Niedergang trugen dazu bei, die Lebensbedingungen zu erschweren. Den einzigen Vortheil aus dieser Lage hatte die Landwirthschaft, deren Producte mit hohen Preisen bezahlt wurden. Daraus folgt die Conclusion, dass die Stadt- und Landbevölkerung selten gleichzeitig einen wirthschaftlichen Wohlstand aufzuweissen hatten; es lässt sich sogar behaupten, dass der Wohlstand der Ersteren denjenigen der Letzteren geradezu auszuschliessen geeignet war, wie dies auch umgekehrt der Fall sein mochte. Erst die Steigerung der Löhne in Folge rapider Entwicklung von Industrie und Handel konnte eine theilweise Ausgleichung dieser Verhältnisse herbeiführen.

***) Kostanecki, Der öffentliche Credit im Mittelalter, S. 48. Die Umwandlung der Erb- in Zeitrenten vollzog sich allmälig so, dass sie zunächst auf vier oder drei Leben mit jedesmal sinkendem Zinsfuss verschrieben wurden. (Etwas Aehnliches hatte Frankreich in dem bail à trois vies.)

Reflexionen über unsere Formel, betreffend die exacte Ausgleichung der Mortalitätstafeln.

II.

In der vorigen Lieferung haben wir über die Beschaffenheit der variablen Constanten, welche bei unserer mathematischen, die exacte Ausgleichung der Sterbetafeln betreffenden Form in Rechnung gelangen, nähere Untersuchungen angestellt und gelangten hinsichtlich des Wesens derselben zu folgenden Conclusionen:

Die für die exacte Ausgleichung der Sterbetafeln allgemein geltende Voraussetzung $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}_1 = 2$ involvirt mit Rücksicht auf die constante Beschaffenheit dieser Summe für sämmtliche Alter, thatsächlich blos das Vorhandensein einer einzigen variablen Constante in dieser Rechnung, so dass auch in dieser Hinsicht die möglichste Vereinfachung des Rechnungsprocesses erzielt wird. Das ganze Wesen des Ausgleichungsverfahrens reducirt sich also auf die Ermittlung dieser Constante und es fällt daher der Umstand desto mehr in's Gewicht, dass jene für die Erfüllung dieser Voraussetzung rechnungsmässig dargestellten Werthe

$$\tau) \qquad \mathfrak{b} = \frac{2b}{b + b_1} \text{ und } \mathfrak{b}_1 = \frac{2b_1}{b + b_1}$$

auch der an sie gestellten Anforderung hinsichtlich ihrer Summe vollständig Rechnung tragen. Um so wichtiger erweist sich demnach die Gestaltung der Differenzen dieser beiden Werthe bezüglich der Continuität ihres Verlaufes; denn thatsächlich stimmen diese unter gewissen Umständen blos annähernd mit den wahren Werthen überein, zumal sie in ihren Differenzen noch immer die Merkmale ihres Ursprunges an sich tragen und in denselben zum Theile den gleichen Mangel an Continuität des Verlaufes aufweisen, wie die ursprünglichen Werthe b und b_1, deren Functionen sie repräsentiren.

Der Charakter einer Sterbetafel hängt also hauptsächlich von der Beschaffenheit der Veränderungen ab, welchen die in ihrem Werthe stets positive, variable Constante

$$\beta = \mathfrak{b} - \mathfrak{b}_1$$

unterworfen ist, während andererseits die Grössenbeschaffenheit dieses Werthes, sowie die continuirliche Veränderung desselben mit dem Wesen der vollständigen mathematischen Ausgleichung zusammenhängt.

Wir wollen nun versuchen, das Gesetz der continuirlichen Veränderlichkeit dieser variablen Constante auf Grund weiterer Anhaltspunkte zu bestimmen.

In der Abhandlung „Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln“ XII haben wir zum ersten Male jene allgemeine algebraische Bedingung für die exacte Ausgleichung der Sterbetafeln zur Darstellung gebracht, welche bei Erfüllung dieser Voraussetzung allen diesbezüglichen Anforderungen im weitgehendsten Sinne zu entsprechen vermag.

Die complicirte Art, in welcher die mathematische Ableitung dieser algebraischen Bedingung erfolgte, lässt sich nun durch eine kürzere ersetzen, sobald die bekannten unter Voraussetzung von Jahresintervallen geltenden Relationen

$$1 + \frac{\Delta\, w_x}{w_x} = \frac{w_{x+1}}{w_x} \quad \text{und} \quad 1 + \frac{\Delta\, L_x}{L_x} = \frac{L_{x+1}}{L_x}$$

in Betracht gezogen werden. Die beiden grundlegenden Gleichungen

$$\frac{\Delta\, L_x}{L_x} + \frac{\Delta\, w_x}{w_x} = -\frac{b_1}{w_x} \quad \text{und} \quad \Delta\, l\, L_x + \Delta\, l\, w_x = -\frac{b}{w_x}$$

lassen sich mit Hilfe jener Relationen, sowie auf Grundlage der bekannten Normen

$$\Delta\, l\, w_x = l\left(1 + \frac{\Delta\, w_x}{w_x}\right) \quad \text{und} \quad \Delta\, l\, L_x = l\left(1 + \frac{\Delta\, L_x}{L_x}\right)$$

in der entsprechenden Weise transformiren, so dass sich schliesslich das gesuchte Resultat von selbst ergibt.

Man erhält nämlich auf Grund jener Relationen zunächst aus der ersteren Gleichung

$$\frac{L_{x+1}}{L_x} + \frac{w_{x+1}}{w_x} = 2 - \frac{b_1}{w_x}$$

und hieraus

$$\frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{w_{x+1}}{w_x} + \left(\frac{w_{x+1}}{w_x}\right)^2 = \left(2 - \frac{b_1}{w_x}\right) \cdot \frac{w_{x+1}}{w_x}$$

ferner aus der zweiten Gleichung mit Rücksicht auf die angeführten bekannten Normen

$$\Delta\, l\, L_x + \Delta\, l\, w_x = l\left(1 + \frac{\Delta\, L_x}{L_x}\right) + l\left(1 + \frac{\Delta\, w_x}{w_x}\right) = -\frac{b}{w_x}$$

und somit auch

$$l\, \frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{w_{x+1}}{w_x} = -\frac{b}{w_x} \quad \text{oder} \quad \frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{w_{x+1}}{w_x} = e^{-\frac{b}{w_x}}$$

Durch Elimination dieses Werthes aus den beiden Schlussrelationen ergibt sich schliesslich unsere bekannte algebraische Bedingung *Ψ)*

$$w_{x+1}^2 - (2\, w_x - b_1)\, w_{x+1} + w^2\, e^{-\frac{b}{w_x}} = 0$$

in welcher sich das Wesen der Uebereinstimmung des Sterblichkeitsverlaufes mit dem der mathematischen Wahrscheinlichkeit entsprechenden Absterbegesetze äussert.

Hinsichtlich der Entwicklung des Gesetzes, betreffend die continuirliche Veränderlichkeit der veriablen Constante

$$\beta = b - b_1$$

bildet nun jene die Flächendifferenzen der Curve der Lebenden repräsentirende Relation denjenigen Anhaltspunkt, welcher unter Voraussetzung von Jahresintervallen den Anforderungen Genüge leistet. In unserer Abhandlung

„Untersuchungen über das Wesen der Invalidität vom Standpunkte des Absterbegesetzes" I. Lieferung IV. gelangen wir zu jener diesbezüglich geltenden Relation, indem wir die in Jahresintervallen aufeinander folgenden Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten durch die entsprechenden Zahlen der Lebenden ausdrücken und solcherart dieselben zu einander in eine allgemein giltige Beziehung bringen. Diese Form lautet:

$$w_x = \frac{L_{x+1}}{L_x}(1 + w_{x+1}) \text{ respective } w_x \cdot L_x - L_{x+1} \cdot w_{x+1} = L_{x+1}$$

so dass sich mit Hilfe derselben der oben eliminirte Werth auch folgendermaassen darstellen lässt:

$$1 - \frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{1}{w_x} = \frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{w_{x+1}}{w_x}$$

daraus folgt nun unter Bezugnahme auf obige Darstellung dieses Werthes die Construction der beiden Gleichungen

$$\Sigma) \qquad \frac{L_{x+1}}{L_x} = \left(1 - e^{-\frac{b}{w_x}}\right) w_x \text{ und } \frac{w_{x+1}}{w_x} = \frac{e^{-\frac{b}{w_x}}}{\left(1 - e^{-\frac{b}{w_x}}\right) w_x}$$

mittelst deren Substitution in die erstere der beiden grundlegenden Gleichungen sich der Ausdruck

$$\Gamma) \qquad \left(1 - e^{-\frac{b}{w_x}}\right)^2 w_x^2 - \left(2 - \frac{b_1}{w_x}\right)\left(1 - e^{-\frac{b}{w_x}}\right) w_x + e^{-\frac{b}{w_x}} = 0$$

ergibt, dessen Beschaffenheit mit Rücksicht auf den stets gegebenen Werth der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit des jeweilig in Betracht kommenden Alters x darauf hinweist, dass man es hier ausschliesslich mit einer Beziehung zwischen b und b_1 zu thun hat, daher auch jene die Differenz der Beiden darstellende variable Constante β in ihrer gesetzmässigen Veränderlichkeit bestimmt ist.

Bekanntlich besteht die Beziehung Ψ) zwischen zwei aufeinanderfolgenden durch den Abscissenabstand 1 getrennten Ordinaten der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer. Zur Bestimmung eines dieser beiden Ordinaten ist es daher erforderlich, dass die andere gegeben sei, so dass unter der Voraussetzung eines bekannten w_x der Werth von w_{x+1} ermittelt werden kann. Diese Voraussetzung gilt naturgemäss auch für die Formel Γ), daher der Werth der einen Ordinate w_x hier stets als bekannt angenommen werden muss. Ist sodann auf Grund desselben w_{x+1} bestimmt, so wird wieder unter Zugrundelegung dieses bekannten Ordinatenwerthes, derjenige von w_{x+2} festgestellt werden können, u. s. f. Mit Rücksicht hierauf wird somit in der Formel Γ) der Werth w_x stets ein gegebener sein, daher dieselbe als reine Beziehung zwischen b und b_1 aufgefasst werden muss, welche in Verbindung mit der constanten Summe dieser beiden Grössen $b + b_1 = 2$ die Ermittlung jeder einzelnen derselben in genauer Weise ermöglicht. Die jeweiligen Werthe der variablen Constante β sind also für alle Alter der

Reihenfolge nach leicht zu bestimmen, wodurch der Anforderung der gesetzmässigen Veränderlichkeit derselben Genüge geleistet wird.

Ueber die algebraische Constellation der Formel $\Gamma)$ behufs einfacherer Lösung derselben, angesichts ihres transcedenten Charakters lässt sich Folgendes sagen: Bei näherer Beobachtung findet man, dass die Schreibweise derselben eine vortheilhafte Veränderung zulässt, in Folge deren sodann ein complicirter öfter vorkommender algebraischer Ausdruck durch eine Hilfsvariable ersetzt werden kann, so dass eine nennenswerthe Vereinfachung der transcendenten Function erfolgt.

Es ist nämlich auch folgende Schreibweise dieser Gleichung zulässig:

$$\left(1-e^{-\frac{b}{w_x}}\right)^2 w_x^2 - 2\left(1-e^{-\frac{b}{w_x}}\right) w_x + \frac{(b_1-1)}{w_x}\left(1-e^{-\frac{b}{w_x}}\right) w_x + 1 = 0$$

welche in Folge Substitution für die bezüglichen Ausdrücke

$$\left(1-e^{-\frac{b}{w_x}}\right) w_x = R \text{ und } b_1 - 1 = 1 - b \text{ wegen } b + b_1 = 2$$

in nachstehende einfache Form verwandelt wird

$$\frac{(R-1)^2}{R} + \frac{1}{w_x} = \frac{b}{w_x} \text{ die in Verbindung mit } \frac{b}{w_x} = -l\left(1-\frac{R}{w_x}\right)$$

schliesslich zu der einfachen transcendenten Form

$$(R-1)^2 + R\,.\,l\left(1-\frac{R}{w_x}\right) + \frac{R}{w_x} = 0$$

führt, in welcher der Werth w_x stets ein gegebener ist und von dessen Beschaffenheit auch der jeweilige Werth von R abhängen wird. Mit Hilfe einer continuirlichen Ersatzgleichung*) gelangt man daher zu dem jeweilig entsprechenden Werthe der Abhängigen R, aus welcher sich sodann auch der Werth b ergibt. Betrachtet man weiter die beiden Gleichungen $\Sigma)$, so fällt unwillkürlich die merkwürdige Form derselben auf. Bei näherer Untersuchung gelangt man nun zu dem Schlusse, dass sich in denselben eine einfache Form der Beziehung zweier aufeinanderfolgenden Ordinaten der Curve der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten birgt, deren Abstand gleichwie bei der allgemeinen Formel $\Psi)$ durch Jahresintervalle gekennzeichnet ist.

Es ergibt sich nämlich, sobald obiger Werth von R in Betracht gezogen wird

$$R = \frac{L_{x+1}}{L_x} \text{ und } R = \frac{w_x}{1 + w_{x+1}}$$

als Resultat dieser Substitution, so dass man zu der interessanten Conclusion gelangt, dass durch Ermittlung des Werthes von R aus dem gegebenen Werthe der Ordinate w_x ausser der variablen Constante β gleichzeitig auch der Werth der nächstfolgenden Ordinate w_{x+1} bestimmt wird, demnach die Gleichung $\Xi)$ die vollständige und genaue Lösung dieser Aufgabe bedingt.

---

*) Siehe „Theorie und Lösung der irreductiblen transcendenten Gleichungen." Lief. I.

Reflexionen über die Veränderung des relativen Werthes und der couranten Kaufkraft des Geldes.

III.

Den bisherigen, diesen Gegenstand betreffenden Ausführungen gemäss lässt sich constatiren, dass wohl hinsichtlich der allgemein sinkenden Tendenz, welcher der relative Geldwerth in seiner stetigen Veränderung seit jeher mit wenigen Unterbrechungen unterworfen war, die mannigfaltigsten wirthschaftlichen und socialen Einflüsse sich geltend machten, doch in der Hauptsache stets die Vermehrung der Edelmetall-Production einerseits und die Bevölkerungszunahme andererseits ausschlaggebend wirkte. Das gleichzeitige Eintreffen beider Eventualitäten in ausserordentlichem Maasse hatte stets zur Folge, dass die Preise der Lebensmittel und Waaren stiegen, während die Arbeitslöhne sanken. Da aber der Arbeitsertrag im Allgemeinen sich immer den Bedürfnissen des Lebens anpassen musste, so konnte zur Vermeidung eines stetig wachsenden Missverhältnisses der wirthschaftlichen Bedingungen stets nur zwischen den Bedürfnissen und dem Arbeitsertrage eine facultative Ausgleichung sich vollziehen, welche allein auf Kosten des relativen Werthes und der couranten Kaufkraft des Geldes möglich war, insolange nicht eine ausgiebige wirthschaftliche Entwicklung diesem Uebelstande anderweitig abzuhelfen vermochte.

Der mit dem Auslande in stetiger Verbindung stehende Handel musste in erster Reihe die Consequenzen aus der Verschlechterung des Geldes ziehen während dieselben dem Landwirthe und Producenten oft erst nach langer Zeit zum Bewusstsein kamen. Solcherart wurde öfter auf künstliche Weise jenes Missverhältniss behoben, welches sich von Zeit zu Zeit zwischen dem Arbeitsertrage und den Lebensbedürfnissen geltend machte.

Der wirthschaftliche Aufschwung der neueren Zeit hätte mit Rücksicht, auf die ungeheuere Vermehrung der Arbeitsgelegenheit unzweifelhaft eine bedeutend mässigere Abnahme des relativen Geldwerthes hervorrufen müssen, wären nicht alle Schichten der Bevölkerung in ihren Lebensbedürfnissen anspruchsvoller geworden. Auf diese Weise mussten auch die Anforderungen hinsichtlich des Arbeitsertrages wachsen, und zwar nicht nur im relativen, sondern auch im absoluten Sinne. Wohl war die ausserordentliche Steigerung der Edelmetall-Production in den letzten Jahrhunderten geeignet, ihren Einfluss hinsichtlich einer Preiserhöhung der Lebensmittel und Waaren in erhöhtem Maasse geltend zu machen, und solchermaassen die Lebensbedingungen zu erschweren, hätten nicht auch die Arbeitslöhne aus den genannten Ursachen den veränderten Umständen Rechnung getragen. In welch' günstiger Weise sich dessenungeachtet in Folge der wirthschaftlichen Entwicklung jenes Verhältniss zwischen den Bedürfnissen und dem Arbeitsertrage gebessert hat, lässt sich aus der Wahrnehmung beurtheilen, dass die Ab-

nahme des relativen Geldwerthes vom 14. Jahrhunderte an eine intensivere war als bis zu dieser Zeit, sich hingegen wieder im letzten Jahrhunderte in Folge des ausserordentlichen wirthschaftlichen Fortschrittes mässiger gestaltete.

Es ist dies aus den vergleichenden Zahlen der Tafel von d'Avenel zu entnehmen, besonders aber durch Vergleichung jener Ziffern, welche das Durchschnittspercent der jährlichen Abnahme des relativen Geldwerthes innerhalb der letzten 500 Jahre und des letzten Jahrhunderts betreffen. Dieses Durchschnittspercent ist von 0·715 auf 0·702 gesunken, ein Beweis der thatsächlichen Abschwächung im Fortschreiten dieses wirthschaftlichen Processes. Inwiefern dieser Process mit den beiden Factoren, d. i. der Vermehrung der Edelmetall-Production und der natürlichen Bevölkerungszunahme im näheren ursächlichen Zusammenhange steht, mögen folgende Ausführungen darthun.

Maassgebend hiefür ist in erster Linie das Verhältniss dieser beiden Factoren zu einander, da offenbar jedes wirthschaftende Individuum eine bestimmte Quantität Geldes oder des entsprechenden Edelmetallwerthes für sich absorbirt. Der natürlichen Bevölkerungszunahme entspricht daher nothwendigerweise auch eine angemessene Vermehrung des Geldes, beziehungsweise Münzmetalles. Diese Quantität steigt nun sowohl nach Maassgabe des durchschnittlichen Bedürfnisses für den Lebensunterhalt, als auch im umgekehrten Verhältnisse zum relativen Werthe des Geldes, beziehungsweise dessen couranter Kaufkraft.

Für die courante Kaufkraft des Geldes ist aber neben dessen Menge gleichzeitig auch das Verhältniss der Lebensmittel und Waarenmenge zur Bevölkerungszahl bestimmend.

Nehmen wir nun an, dieses Verhältniss der Lebensmittel und Waarenmenge zur Bevölkerungszahl würde mit Rücksicht auf die gesteigerte Productivität constant bleiben, so bliebe nur die Relation zwischen der Edelmetallmenge und der Waarenmenge. Mit der Vermehrung des Edelmetalles müssen nun die Waaren und Lebensmittelpreise steigen, also die Kaufkraft, sowie der relative Werth des Geldes abnehmen. Mit der relativen Steigerung der Bedürfnisse für den verbesserten Lebensunterhalt wird aber auch die Nachfrage für die Lebensmittel und Waaren erhöht, wodurch der Anlass für die Abnahme des relativen Geldwerthes noch verschärft erscheint. Nachdem jedoch erwiesenermaassen das Durchschnittspercent für die Abnahme des relativen Geldwerthes im Sinken begriffen ist, so lässt sich daraus schliessen, dass die Productivität bezüglich der Lebensmittel und Waaren nicht nur im Verhältnisse zur Bevölkerungszunahme, sondern in weit höherem Maasse sich steigerte, also das Angebot derselben die gesteigerte Nachfrage noch überboten hat. Wird ferner erwogen, dass besonders im Laufe der letzten Jahrhunderte die Edelmetall-Production in ungeahnter Weise eine Vermehrung erfuhr, daher der Impuls für die relative Werthabnahme des Geldes ein bedeutenderer war wie in früheren Jahrhunderten,

dieser Process aber dessenungeachtet sich in mässigerer Weise vollzog, so muss angenommen werden, dass der Wohlstand in viel breitere Schichten der Bevölkerung im Laufe der letzten Jahrhunderte eindrang, wie auch, dass bedeutende Quantitäten an Edelmetall, Münzzwecken entzogen wurden. Hierüber, sowie über die Productions-Verhältnisse der Edelmetalle während der letzten 400 Jahre geben folgende Daten Aufschluss: Zuverlässige Angaben über die gewonnenen Mengen Edelmetalles der ältesten Zeit fehlen vollständig. Die vorhandenen Quellen gestatten kaum viel weiter als bis in's Ende des 15. Jahrhunderts zurückzugreifen. Aber auch die Angaben, welche für den seit der Entdeckung Amerikas verflossenen Zeitraum vorliegen, erfordern eine sorgfältige Revision, die in neuerer Zeit von einigen hervorragenden Autoritäten wie A. Soetbeer, W. Lexis, Del Mar u. A. mit Erfolg angebahnt wurde. Nach den bezüglichen Zusammenstellungen liegt der Schwerpunkt der Goldproduction in drei Ländergruppen: Den Vereinigten Staaten, Russland und Australien, welche 70—75 Percent der Goldausbeute liefern. Sehr rasch und bedeutend hat sich neuerdings die Gewinnung in Afrika erhöht. Im Jahre 1893 hat sie die seitherige Production Russlands bereits überflügelt. Die grössten Antheile an der Silberproduction (80 Percent) entfallen auf Amerika (Vereinigte Staaten, Mexico, Peru, Bolivia, Chile). Die gesammte Production der Edelmetalle belief sich:

Perioden	Gold im Werthe von		Silber im Werthe von		Gesammtwerth Millionen Mark
	Mill. Mark	Percent	Mill. Mark	Percent	
1493—1600	1.993	33·8	4.051	66·2	6.044
1601—1700	2.504	27·2	6.703	72·8	9.207
1701—1800	5.302	34·1	10.267	65·9	15.569
1801—1850	3.306	35·9	5.890	64·1	9.196
Zusammen	13.105	32·7	26.911	67·3	40.016
1851—1855	2.782	77·6	798	22·4	3.580
1856—1860	2.815	77·6	814	22·4	3.629
1861—1865	2.584	72·3	991	27·7	3.575
1866—1870	2.720	69·3	1.205	30·7	3.925
1871—1875	2.426	57·8	1.772	42·2	4.198
1876—1880	2.405	52·2	2.205	47·8	4.610
1881—1885	2.163	46·1	2.535	53·9	4.698
1886—1892	3.371	40·6	4.910	59·3	8.281
Zusammen	21.266	58·8	15.230	41·2	36.496
Insgesammt	34.371	44·9	42.141	55·1	76.512

Setzen wir den Preis von 1 Klg. Gold = 2790 M. und von 1 Klg. Silber der früheren Relation von 1:15½ zu dem Normalsatze = 180 M., so stellt sich die gesammte Gewinnung auf 12·3 Millionen Kilogramm Gold und 234·7 Millionen Kilogramm Silber. Dabei ist hervorzuheben, dass vor der

Entdeckung der californischen und australischen Goldfelder nach obiger Tafel ungefähr der dritte Theil der Production auf Gold und zwei Dritttheile auf Silber entfielen, im Vierteljahrhundert 1851—1875 dagegen war das Verhältniss ein umgekehrtes, indem zwei Dritttheile auf Gold und blos ein Dritttheil auf Silber entfiel. Seit 1875 hat der Percentsatz der Silberproduction denjenigen der Goldproduction wieder überboten. Aus obiger Tabelle ist aber auch zu entnehmen, dass die Edelmetall-Production im letzten Jahrhunderte weit grösser war als diejenige der drei früheren Jahrhunderte zusammengenommen. Dieselbe vertheilt sich auf die letzten vier Jahrhunderte percentuell folgendermaassen:

Perioden	Goldproduction in Percenten der Gesammtausbeute	Silberproduction in Percenten der Gesammtausbeute	Die Edelmetall-Production zusammen in Percenten der Gesammtausbeute
1493—1600	5.80	9·61	7·90
1601—1700	7·28	15·90	12·03
1701—1800	15·42	24·36	20·35
1801—1892	71·50	51·13	59·72

Die Goldausbeute im letzten Jahrhunderte war daher mehr als zweimal so gross, die Silberausbeute beiläufig ebenso gross wie diejenige der drei früheren Jahrhunderte und die gesammte Edelmetall-Production war in den letzten 100 Jahren um die Hälfte grösser als in den früheren 300 Jahren zusammengenommen.

Daraus ist zu ersehen, dass die Vermehrung der Edelmetall-Production im letzten Jahrhunderte geradezu eine progressive Steigerung erfuhr. Wenn dessenungeachtet die Abnahme des relativen Geldwerthes während dieser Zeit nicht nur keine grösseren Dimensionen annahm, sondern sogar eine Ermässigung erfuhr, so lässt sich dies nur durch den ungeheueren Aufschwung in wirthschaftlicher Beziehung erklären. Freilich ist zu berücksichtigen, dass blos ein Theil der Edelmetall-Ausbeute zu Münzzwecken Verwendung fand und eben in Folge der besonderen wirthschaftlichen Entwicklung eine steigende Absorbirung derselben zu industriellen Zwecken erfolgte; immerhin erfuhr die Metallgeld-Circulation eine ganz exorbitante Vermehrung. Die gesammten Vorräthe an Münzen und Barren der ganzen Erde wurden geschätzt in Millionen Kilogramm für das

Jahr 1831 . . . 0·80 Gold und 46 Silber
„ 1880 . . . 4·72 „ „ 47 „
„ 1884 . . . 5·05 „ „ 52 „
„ 1891 . . . 5·60 „ „ 90 „

Auf diese Weise erhält man ein Bild von der stetigen Zunahme der Edelmetallproduction und deren Verwendung zu Münzzwecken.

Reflexionen über unsere Formel, betreffend die exacte Ausgleichung der Mortalitätstafeln.

III.

Die bisherigen Untersuchungen führten zu dem interessanten Ergebnisse, dass unsere bekannte algebraische Bedingung ψ), mittelst deren die exacte Ausgleichung der Mortalitätstafeln sich vollzieht, einer bedeutenden Vereinfachung zugänglich ist, sobald der hier geltende Umstand der supponirten Jahresintervalle für die Abscisse der Mortalitätscurve in seinen Consequenzen verfolgt und dessen Wesenheit für die Feststellung einer continuirlichen Veränderung der variablen Constanten-Differenzen β in Betracht gezogen wird.

Indem die allgemeine Function einer mittelst der durch je ein Jahresintervall sich unterscheidenden Ordinaten der Absterbecurve gekennzeichneten Flächendifferenz in Rechnung gezogen wird, ist es möglich, die beiden variablen Constanten b und b_1 aus der algebraischen Form, welche die exacte Ausgleichung bedingt, zu eliminiren und jenes durch dieselben ausgedrückte mathematische Element durch eine neue Variable darzustellen, deren Abhängigkeit sich in einer directen Beziehung zur jeweilig gegebenen wahrscheinlichen Lebensdauer w_x äussert.

Auf diese Weise übergeht die bekannte Formel ψ) in den Ausdruck:

$$(R - 1)^2 + R\, l\left(1 - \frac{R}{w_x}\right) + \frac{R}{w_x} = 0$$

in welchem der Werth

$$R = \frac{L_{x+1}}{L_x} = \frac{w_x}{1 + w_{x+1}} = \left(1 - e^{-\frac{b}{w_x}}\right) w_x$$

im Wesen die gleiche Bedeutung besitzt, wie die variable Constanten-Differenz β in Bezug auf die ursprüngliche Formel. Die Vereinfachung der Rechnung aber besteht hauptsächlich in dem Umstande, dass in der Variablen R der Begriff der Abhängigen sowie derjenige der continuirlichen Constanten-Differenz functionell vereinigt erscheint, so dass man es hier blos mit einer Beziehung zwischen zweien Grössen zu thun hat, während bei der Gleichung ψ) neben einer solchen Beziehung noch das Wesen einer veränderlichen Constante in Betracht kommt.

Versuchen wir nun obigen Ausdruck derart zu transformiren, damit dessen Lösung auf möglichst einfache Weise sich vollzieht. Wie ersichtlich,

repräsentirt derselbe eine transcendente Gleichung, in welcher $\boldsymbol{R}$ die Unbekannte und $\boldsymbol{w}_x$ die gegebene Grösse bedeutet, wobei hervorzuheben ist, dass $\boldsymbol{R}$, nach seinen Werthbegriffen zu schliessen, stets kleiner als 1 sein wird.

Setzen wir also zu diesem Zwecke den neuen Werth

$$\boldsymbol{u} = 1 + \boldsymbol{w}_{x+1}$$

in diese Gleichung ein, so ergibt sich laut obigen Relationen

$$\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{w}_x} = \frac{1}{\boldsymbol{u}} \text{ und daher } \left(1 - \frac{\boldsymbol{w}_x}{\boldsymbol{u}}\right)^2 + \frac{\boldsymbol{w}_x}{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{l}\left(1 - \frac{1}{\boldsymbol{u}}\right) + \frac{1}{\boldsymbol{u}} = 0$$

und demzufolge auch

$$(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_x)^2 + \boldsymbol{w}_x \,.\, \boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{l}\left(1 - \frac{1}{\boldsymbol{u}}\right) + \boldsymbol{u} = 0$$

und schliesslich

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}_x \pm \sqrt{\boldsymbol{u} \,.\left(\boldsymbol{w}_x\, \boldsymbol{l}\, \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u} - 1} - 1\right)}$$

Darnach haben wir es hier wieder mit einer directen Beziehung zwischen $\boldsymbol{w}_x$ und $\boldsymbol{w}_{x+1}$ zu thun, wobei die variable Constante vollständig aus der Rechnung ausgeschieden erscheint. Während jedoch die ursprüngliche Form eine einfach algebraische Beschaffenheit besass, stellt sich das Wesen der letzteren als transcendent heraus, so dass wieder jene Complication bezüglich der Lösung zum Vorscheine kommt, welche wir bereits bei unseren früheren Untersuchungen hervorzuheben Gelegenheit hatten. Es bleibt also in dieser Hinsicht nur die Alternation zwischen der algebraischen Form mit variabler Constante oder der transcendenten Form ohne variable Constante.

Nun ist aber die transcendente Form, wie sich dieselbe unseren Ausführungen gemäss in diesem Entwicklungsstadium präsentirt, möglichst vereinfacht, so dass ein nach derselben durchgeführter rechnungsmässiger Process nicht mit jenen Schwierigkeiten verbunden erscheint, wie dies bei den früheren Formen transcendenter Beschaffenheit der Fall war.

Der continuirliche Verlauf der Näherung wird durch die einfache Ersatzgleichung

$$u = \underset{u_1 \equiv 1 + w_{x+1}}{\boldsymbol{E}} \left[w_x + \sqrt{u_1 \left(w_x\, l\, \frac{u_1}{u_1 - 1} - 1 \right)} \right]$$

in wenigen Proceduren herbeigeführt, so dass es ohne besondere Schwierigkeiten möglich ist, eine jede Ordinate der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer stets aus der vorhergehenden zu berechnen.

Es wäre beispielsweise aus der gegebenen Wahrscheinlichkeit w_{10} die für das nächstfolgende Alter geltende Wahrscheinlichkeit w_{11} festzustellen. Die entsprechende Ersatzgleichung wird sich dann folgendermaassen gestalten:

$$u = \underset{u_3 \equiv 1 + w_{11}}{\boldsymbol{E}} \left[w_{10} + \sqrt{u_1 \left(w_{10}\, l\, \frac{u_1}{u_1 - 1} - 1 \right)} \right]$$

Nun ist laut gegebener Tafel $w_{10} = 47{\cdot}86241$ und $w_{11} = 47{\cdot}18419$ demnach als erster Näherungswerth für u der Werth $u_1 = 48{\cdot}18419$.

Nach erfolgter Substitution in die Ersatzgleichung ergibt sich sodann als zweiter Näherungswerth für u der Werth

$$u_2 = 48 \cdot 28912 \text{ und für } w_{11} = 47 \cdot 28912.$$

Dieses wieder in obige Gleichung substituirt liefert neuerdings

$$u_3 = 48 \cdot 13816 \quad w_{11} = 47 \cdot 13816.$$

Wie ersichtlich, ist nun der Näherungswerth $u_2 > u_1$, wogegen $u_3 < u_1$ ist, woraus offenbar der Schluss zulässig ist, dass der wirkliche Werth von u zwischen u_2 und u_3 sich befinden muss. Setzt man daher das arithmetische Mittel der Beiden

$$u_4 = \frac{u_2 + u_3}{2} = 48 \cdot 21364$$

in obige Gleichung ein, so erhält man $u_5 = 48 \cdot 25285$, daher wieder

$$u_6 = \frac{u_4 + u_5}{2} = 48 \cdot 23325$$

und nach erfolgter weiterer Substitution $u_7 = 48 \cdot 22687$, und zufolge dessen

$$u_8 = \frac{u_6 + u_7}{2} = 48 \cdot 23006$$

und aus obiger Gleichung wieder $u_9 = 48 \cdot 23124$, somit abermals

$$u_{10} = \frac{u_8 + u_9}{2} = 48 \cdot 23065$$

Dies liefert schliesslich nach erfolgter Substitution in obige Gleichung den Werth $u_{11} = 48 \cdot 23055$ und demnach

$$u_{12} = \frac{u_{10} + u_{11}}{2} = 48 \cdot 23060$$

welcher Werth laut unserer Ersatzgleichung mit dem genauen Werthe auf fünf Decimalstellen übereinstimmt. Es ist daher die Wahrscheinlichkeit $w_{11} = 47 \cdot 23060$.

Wird nun weiter auf Grundlage des ausgeglichenen Werthes von w_{11} der Werth w_{12} zu ermitteln gesucht, so gelangt man auf dem gleichem Wege zum Resultate, so dass dieser Process schliessslich die ausgeglichenen Wahrscheinlichkeiten für sämmtliche Alter ergibt.

Immerhin ist in manchen Fällen die Alternative der ursprünglichen algebraischen Form φ) diesem noch immer rechnerisch durchaus nicht einfachen Processe vorzuziehen, insbesondere wenn die Bedingungen für die Erreichung einer halbwegs angemessenen Continuität der variablen Constantendifferenz gegeben und demzufolge annähernd verlässliche Resultate auf diesem einfacheren Wege zu erwarten sind.

Wohl ist es mit Bezug auf die functionelle Beschaffenheit der Werthe $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$ einleuchtend, dass die besagte, nicht ganz continuirliche Art der Veränderung dieser variablen Constanten auch in einem minder günstigen Falle nur mit ganz unbedeutenden Abweichungen verbunden sein könnte doch müsste selbst eine solche, mit Rücksicht auf die geringfügige Werthbeschaffenheit der Differenz dieser Constanten einen merklichen Einfluss auf den Verlauf einer Sterbetafel ausüben.

Es erscheint deshalb nothwendig, jene hiefür nöthigen Bedingungen mit der entsprechenden Sorgfalt festzustellen, sowie auch jene Umstände wahrzunehmen, welche der erforderlichen Verlässlichkeit der Rechnung etwa Abbruch thun könnten.

Im Allgemeinen gestattet das Princip der Einführung von Jahresintervallen manche Vereinfachung der mathematisch analytischen Functionen dieser Art, da hier von der gewöhnlichen functionellen Beziehung zwischen Abscisse und Ordinate, zu einer solchen zwischen zweien aufeinanderfolgenden Ordinaten übergangen wird, deren je durch ein Jahresintervall gekennzeichneter Abstand in Folge seiner constanten Beschaffenheit aus dem Verhältnisse der functionellen Abhängigkeit tritt und somit den gegebenen, das originäre System der Wahrscheinlichkeitscurven repräsentirenden Grundformen gemäss, die Bedingung für eine besondere Art functioneller Abhängigkeit im geometrisch analytischem Sinne bildet.

Die einheitliche Norm, welche in der Beschaffenheit dieser Abhängigkeiten sich kundgibt, lässt sogar ein analoges Verfahren hinsichtlich der diesbezüglichen functionellen Transformationen zu, so dass die jeweiligen Grundformen, in welchen die Beziehungen der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung zu einander zum Ausdrucke gelangen, auch in dieser Hinsicht eine gewisse functionelle Uebereinstimmung aufweisen. So beispielsweise diejenigen Grundformen, welche die linearen Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung betreffen.

Die Formen, durch welche diese Beziehungen zur Darstellung gelangen, haben wir in unserer Abhandlung „Nähere Untersuchungen über das Wesen der Mortalitätscurven und deren mathematisch-analytische Beschaffenheit“ III. gekennzeichet, indem wir die functionelle Abhängigkeit der Ordinaten L_x, w_x und s_x im Wesen dieser Grundformen nachwiesen und deren Correlation feststellten. Dieselbe ist so zu verstehen, dass die zwischen L_x und s_x bestehende Relation durch eine lineare Differential-Gleichung dritter Ordnung und jene zwischen w_x und s_x durch eine solche zweiter Ordnung zum Ausdrucke gelangt. Bei näherer Beobachtung der ersteren Form kann jedoch der Umstand nicht übersehen werden, dass in derselben die mit der letzteren Form functionell übereinstimmende Relation zwischen L_x und w_x verborgen ist, so dass der merkwürdige Zusammenhang dieser functionellen Formen leicht wahrgenommen werden kann.

Mit Rücksicht auf die hieraus entspringenden weiteren Conclusionen lässt sich behaupten, dass das originäre System der Wahrscheinlichkeitscurven der mathematischen Statistik ein neues interessantes Forschungsgebiet eröffnet. Insbesondere durch die Verfolgung der oben gekennzeichneten Richtung vermag die Wissenschaft manche neue Spur für die weitere Erkenntniss auf dem graphischen Gebiete zu entdecken, weshalb wir es nicht unterlassen wollen, bei unseren weiteren Untersuchungen nochmals auf diesen Gegenstand zurückzukommen.

Reflexionen über die Veränderung des relativen Werthes und der couranten Kaufkraft des Geldes.

IV.

Nach den in der vorigen Abhandlung angeführten Daten über die Production und monetäre Verwendung der Edelmetalle lässt sich nun weiter constatiren, dass von dem Goldvorrathe der ganzen Welt kaum die Hälfte, von dem Silbervorrathe blos etwa der dritte Theil zu Münzzwecken Verwendung findet.

Für Kunstgewerbe und Industrie, insbesondere zu Schmucksachen, Geräthen, Metallcompositionen, in der Galvanoplastik, Photographie etc. scheint ein viel grösserer Theil der jährlichen Ausbeute stetig verbraucht zu werden, als bisher angenommen wurde. Nach Soetbeer war in den Hauptculturstaaten 1881—1885 durchschnittlich der jährliche Verbrauch an Gold 110.000 Klg. (brutto) und nach Abzug des verwendeten alten Metalles 90.000 Klg. Für Nordamerika allein wird derselbe für 1892 auf 27.000 Klg. angegeben. Der Verbrauch an Silber wurde für die genannte Zeit von Soetbeer auf 652.000 Klg. brutto und 515.000 Klg. netto, für 1892 wird er auf 790.000 Klg. brutto und 670.000 Klg. netto geschätzt. Die Hauptmasse des Silbers wanderte nach Ostindien, indem dort die Geldwirthschaft mehr an Stelle des Naturalverkehres trat. Ueberdies sind in Ostindien lange Zeit grosse Aufspeicherungen (Thesaurirungen, Vergraben) von Silber und Gold vorgenommen worden und auch der Verbrauch an Schmuck und Geräthen ist nicht unbedeutend. Im letzten Jahrhunderte sind überhaupt etwa 7 Milliarden Mark in Silber und etwa 3 Milliarden Mark in Gold nach Ostindien allein verschifft worden. Auch China und Japan beziehen eine grosse Menge Gold und Silber. Von 1550 bis 1830 schätzt man die gesammte nach dem Orient gesendete Menge Silber auf etwa $55^1/_2$ Millionen Kilogramm. Dessen ungeachtet ist eine bedeutende Steigerung hinsichtlich der Verwendung der beiden Edelmetalle zu Münzzwecken zu verzeichnen. Den Schätzungen gemäss ist dieselbe seit 60 Jahren beim Gold auf das Siebenfache, beim Silber auf das Doppelte gestiegen. Der auffallende Unterschied zwischen der beiderseitigen Steigerung liegt in der monetären Verwendung des gelben und weissen Edelmetalles. Während der letzten Jahrzehnte hat das Gold als internationale Verkehrsvaluta das Silber nahezu vollständig verdrängt, da die meisten civilisirten Staaten von der Silber- zur Goldwährung übergegangen sind. In Folge dessen trat in dem zu Münzzwecken erforderlichen Mengenverhältnisse der beiden Edelmetalle eine Verschiebung zu Gunsten des Goldes ein. Während noch im Jahre 1831 der Goldvorrath an Münzen und Barren blos den 58sten Theil des Silbervorrathes betrug, ist dieses Verhältniss des Vorrathes an Gold- und Silber-Gewichtsmengen im Jahre 1891 auf 1:16 gestiegen. Wird überdies erwogen, dass der Werth des Silbers gegenüber demjenigen des Goldes seither auf

weniger als die Hälfte des früheren gesunken ist, so stellt sich das gegenwärtige Werthverhältniss des vorräthigen Goldes zum Silber wie 2:1, so dass der Goldvorrath den zweifachen Werth repräsentirt wie der Silbervorrath. Im Ganzen ist der Werth der für Münzzwecke vorräthigen Edelmetalle der ganzen Welt während dieser 60 Jahre auf mehr als das Doppelte gestiegen, ein Beweis, dass von der stetig zunehmenden Bevölkerung auch immer mehr Gold- und Silbermünzen für den Verkehr absorbirt werden.

Während man auf diese Weise ein Bild von der stetigen Zunahme der Edelmetallproduction und deren Verwendung zu Münzzwecken erhält, lässt sich hinsichtlich des zweiten ausschlaggebenden Factors, nämlich der Vermehrung der Bevölkerung blos sagen, dass dieselbe örtlich und zeitlich eine ziemlich ungleichmässige ist. Immerhin lässt sich innerhalb längerer Perioden eine gewisse Stetigkeit im Wachsthum constatiren, welche darin begründet ist, dass die wichtigsten Ursachen der natürlichen und räumlichen Bewegung sich nicht in kurzer Frist ändern.

Im Mittelalter war Europa nach allen Anzeichen wohlbevölkert. Später trat jedoch entschieden Rückgang und Verfall ein (Spanien nach der Zeit der Araber, Italien im Osten die Mongolen- und Türkenwirthschaft). Insbesondere in Deutschland hatte der dreissigjährige Krieg die Bevölkerung um 50 Percent vermindert (1618: 25 Millionen gegen 12 Millionen Einwohner im Jahre 1648). Viele Landstriche waren vollständig verheert und menschenleer. Eine günstige Entwicklung brachte die zweite Hälfte des vorigen Jahrhunderts. Gute Ernten, Fortschritte der Landwirthschaft, Entwicklung von Handel und Industrie, zumal in England bei freier wirthschaftlicher Bewegung, beförderten das Wachsthum der Bevölkerung und die Bildung von Handelsemporien und industriellen städtischen Centralpunkten, damit aber auch die Anhäufung von Noth und Elend auf kleinen Raum. Im Ganzen und Grossen trat jedoch im Laufe des 18. Jahrhunderts, gleichwie bis zu unserer Zeit, eine stetige Vermehrung der Bevölkerung fast in allen Culturstaaten hervor. So war durchschnittlich die Zunahme in:

		Permille			Permille
England . . .	1801—1886:	13·5	Niederlande . .	1829—1887:	9·5
Schottland . .	1801—1886:	10·6	Belgien	1846—1887:	7·3
Irland	1801—1841:	10·3*)	Schweiz . . .	1837—1888:	5·8
Spanien . . .	1787—1884:	5·1	Oesterreich . .	1820—1887:	7·7
Frankreich . .	1806—1886:	4·2	Ungarn	1820—1880:	3·4
Italien	1861—1887:	7·3	Russland . . .	1850—1886:	15·2
Norwegen . . .	1815—1880:	12·0	Deutsches Reich	1816—1890:	9·3
Schweden . . .	1751—1887:	7·2	Europa überh. .	1820—1880:	8·4
Dänemark . .	1840—1880:	11·2	Ostindien . . .	1880—1891:	11·2

Die Schnelligkeit der Zunahme war allerdings in den einzelnen Jahren und Perioden nicht immer gleich gross, insbesondere in den Kriegsjahren traten Unterbrechungen und Veränderungen in dieser Hinsicht ein. So war

*) Von 1841 ab weist Irland eine Abnahme von jährlich 2·08 Percent aus.

die jährliche Zunahme in Preussen 1830—1861 etwa 11·6 Permille und 1861 bis 1877 blos 9·6 Permille, in Frankreich 1800—1860: 4·8 Permille und 1860 bis 1876: 0·7 Permille. Ein sehr starkes Wachsthum weisen die Vereinigten Staaten auf. Die Bevölkerung derselben war im Jahre 1790 auf 40.000 Quadratmeilen 3·9 Millionen, im Jahre 1890 auf 170.000 Quadratmeilen 65 Millionen. Dieselbe hatte sich also um 28·5 Permille jährlich vermehrt, was im Wesentlichen der Einwanderung zu verdanken ist. Das Gleiche gilt von Australien, welches im Jahre 1828 blos 36.598 und 1890 schon 3,916.000 Einwohner zählte. Die Zeit, in welcher die Bevölkerung sich verdoppelt, lässt sich für die Zukunft auf Grund eines seither wirklich stattgehabten Wachsthums nicht berechnen, da aus der seitherigen Bewegung der Bevölkerung nicht auf diejenige eines längeren Zeitraumes der Zukunft geschlossen werden kann, wenn auch anzunehmen ist, dass eine Bewegungstendenz unter Schwankungen eine Reihe von Jahren anhalten dürfte, soferne keine ausserordentlichen störenden Ursachen dazwischen treten.

Die Vertheilung der Bevölkerung nach den Wohnsitzen ist durch Entwicklung der Cultur und des Verkehres, durch die Besonderheit des Berufs etc. bedingt. Die Ackerbau-Bevölkerung ist naturgemäss je nach der Eigenart theils in Dörfern, theils in Höfen über das ganze Land zerstreut. Besitz und Beschäftigung prägen ihr ihren eigenthümlichen, der conservativen Gesinnung geneigten Charakter auf. Ziehen auch dem Landwirthe viele Gewerbetreibende nach, und können heute bei dichterer Bevölkerung und vervollkommnetem Transportwesen viele Industrien auf dem Lande gedeihen, so haben doch Gewerbe und Handel ihren Hauptsitz in der Stadt. Letztere wird durch Concentration der Bevölkerung auf kleiner Fläche, welche geistige und wirthschaftliche Kraft ungemein steigert, leicht tonangebend für das ganze Leben eines Volkes.

Approximativ kann im Durchschnitte das jährliche Wachsthum der Bevölkerung in den Culturländern in den letzten Jahrhunderten mit 7·2—8·5 Permille angenommen werden, so dass sich jeweilig etwa in 80—100 Jahren die Bevölkerung verdoppelte. Daraus ist zu entnehmen, dass die Bevölkerung nahezu im gleichen Verhältnisse zunahm, als der relative Werth des Geldes abgenommen hat. Wohl lässt sich hieraus kein Schluss auf die allgemeinen Veränderungen des Geldwerthes ziehen, doch wird hiedurch wesentlich der Maassstab gekennzeichnet, nach welchem dieser wirthschaftliche Process sich vollzieht. Die Höhe der Löhne im weiteren Sinne wird durch Nachfrage und Angebot geregelt. Mit dem Wachsthum der Bevölkerung steigt auch die Nachfrage, während das Angebot von der wirthschaftlichen und socialen Entwicklung der Menschheit abhängt. Nach der Höhe der Löhne regelt sich auch die Werthschätzung des Geldes überhaupt, da sonst bei geringerer Consumtion die Vorräthe an Waaren und Lebensmitteln nicht aufgebraucht werden können und hiedurch unwillkürlich ein Druck auf die Preise ausgeübt wird. Dieser Umstand übt daher seine Wirkung in umgekehrtem Sinne aus, wie die Vermehrung des zu Münzzwecken verwendeten Edel-

metalles, deren Einfluss sich in einer Steigerung der Löhne kundgibt und gleichzeitig zur Vertheuerung der Waaren und Lebensmittel beiträgt. Diese Bedingungen gelten jedoch nur bei gleichzeitiger Steigerung der Production an Waaren und Lebensmitteln mit der Bevölkerungszunahme. Da nun die letztere zur steigenden Arbeitsnachfrage beiträgt und mit dieser die Löhne sinken, so kann naturgemäss auch die Production sowohl auf landwirthschaftlichem als auch auf industriellem Gebiete wieder zunehmen. Andererseits wirkt aber die Vermehrung der Edelmetallproduction vertheuernd auf die Löhne wie auf die Producte und Waaren ein. Der Process der Veränderung des relativen Geldwerthes ist daher von so vielen und mannigfachen Umständen verschiedener Wirkung und Gegenwirkung abhängig, dass das Resultat dieser Einflüsse innerhalb einzelner Perioden unbestimmbar ist und nur in seinen endlichen Consequenzen festgestellt zu werden vermag. Mit Rücksicht auf die grossen Vorräthe an thesaurirtem Edelmetall und die noch immer steigende Production desselben einerseits, wie auch in Anbetracht der naturgemässen Vermehrung der Bevölkerung andererseits lässt sich jedoch auch für die Zukunft auf eine stetige Abnahme des relativen Geldwerthes schliessen. Die Consequenzen, welche mit dem Fortschreiten dieses Processes verbunden sind, sind daher sowohl vom finanzwissenschaftlichen, als auch vom allgemein wirthschaftlichen Gesichtspunkte von Bedeutung, da das stetige Schwinden des Werthes mobiler Capitalien den Vortheil der Immobilisirung derselben in's Auge springen lässt. Während das mobile Capital im Verhältnisse des jeweilig gesunkenen relativen Geldwerthes in Betracht kommt, bleibt das immobile Capital zumindest in seinem relativen Werthe unverändert, da dessen absoluter Werth im selben Verhältnisse steigt, als der relative Geldwerth im Allgemeinen abnimmt. In besonderer Weise äussern sich diese Consequenzen auf das Wesen langsichtiger Schulden, wie dies öffentliche Anlehen im Allgemeinen und Staatsanlehen überhaupt sind. Das Sinken des relativen Geldwerthes verursacht nach langen Perioden eine relative Erleichterung der Schuldenlast, abgesehen von der Verminderung des jährlichen Aufwandes, welche die Folge des stetig abnehmenden Zinsfusses ist. Im Gegensatze hiezu steigt aber gleichzeitig der Werth jener für Immobilien angewendeten Investitionen, wie da sind Eisenbahnen, Anlagen für gemeinnützige Institutionen und öffentliche Wohlfahrts-Einrichtungen, deren Kosten auf dem Wege öffentlicher Anlehen gedeckt werden. Natürlich gilt als wichtigste Voraussetzung für das Zutreffen dieser wirthschaftlichen Consequenz, die stetige ökonomische Entwicklung, welche alle Bedingungen in sich birgt, um im Allgemeinen den erforderlichen Arbeitsertrag zur Bestreitung der Lebensbedürfnisse zu sichern und auf diese Weise günstige wirthschaftliche Verhältnisse zu schaffen.

Ueber die analytisch-geometrische Beschaffenheit der Curve der Invaliden nach den Ergebnissen unserer Methode, betreffend die mathematisch-physiologische Ableitung des Validitätsverlaufes beim Menschen aus dem Absterbegesetze.

I.

In unseren Untersuchungen betreffend das Wesen des Absterbegesetzes haben wir dargethan, dass die Curve, welche dasselbe zur Darstellung bringt, eine bestimmte, einheitliche mathematische Function repräsentirt, welche dem Systeme der originären Wahrscheinlichkeitscurven entspringt, und implicite, dass die Wahrscheinlichkeitscurven allgemein einem mathematisch genau umschriebenen Gesetze unterworfen sind, dessen Wesen in den linearen Differential-Gleichungen zweiter Ordnung zum Ausdrucke kommt.

Diese Erkenntniss liefert uns nun auch die Handhabe die Wahrscheinlichkeiten anderer natürlicher Erscheinungen, welche eine gewisse Gesetzmässigkeit aufweisen, diesem Systeme zu unterordnen und ihrem Wesen nach durch eine mathematische Function auszudrücken, welche dieser Gesetzmässigkeit Genüge leistet. Mit der Feststellung dieser mathematischen Function ist jedoch gleichzeitig die Möglichkeit geboten, auf Grund gegebener Daten, welche indirect diese Gesetzmässigkeit kennzeichnen und für deren Beschaffenheit bestimmte Anhaltspunkte bilden, auf dem Wege der Rechnung zu Resultaten zu gelangen, welche zur Statuirung des entsprechenden mathematischen Gesetzes führen. Wir wollen nun versuchen, diesen Umstand für die Untersuchung der Beschaffenheit der Invaliditätscurve, deren Ursprung in den Krümmungsverhältnissen der Absterbecurve besteht, uns nutzbar zu machen.

Unsere bisherigen Reflexionen über den Gegenstand der mathematisch-physiologischen Ableitung des Validitätsverlaufes beim Menschen aus dem Absterbegesetze beruhen bekanntlich auf dem organischen Zusammenhange des Sterblichkeitsverlaufes des Menschen mit dessen natürlichem Kräfteverfall. Das Wesen des Letzteren im Zusammenhange mit den mathematisch-statistischen Eigenschaften des Absterbegesetzes bietet der deductiven Forschung die Handhabe jene Elemente zu kennzeichnen, welche den Validitätsverlauf des Menschen im Principe bedingen, so zwar, dass aus den Krümmungsverhältnissen der Absterbecurve durch entsprechende Beobachtung der vorhandenen Merkmale sich eine merkwürdige Uebereinstimmung derselben mit bekannten physiologischen Erscheinungen im Verlaufe des menschlichen Lebens wahrnehmen lässt. Dieser Umstand ist bestimmend für das gesammte Wesen unserer diesbezüglichen Methode und die Resultate, zu denen wir auf diesem Wege gelangen, sind von überraschender Tragweite für das einschlägige wissenschaftliche Forschungsgebiet, indem sie in einem förmlichen mathematischen Systeme der im Verlaufe des menschlichen Lebens geltenden Validitätsbedingungen zum Ausdrucke kommen. Dieselben sind von desto grösserer Bedeutung, als durch den empirischen Nach-

weis von deren Richtigkeit dieser Methode der Stempel wissenschaftlicher Zuverlässigkeit aufgeprägt ist.*)

Im Allgemeinen vollzieht sich im menschlichen Lebensverlaufe ein Process, welcher in seinem Wesen die physiologische Entwicklung der Lebensdisposition kennzeichnend, die eigentliche Grundlage unserer wissenschaftlichen Deductionen bildet. Dieser Process äussert sich in dem Umstande, dass der Mensch innerhalb eines jeden Lebensintervalles eine gewisse Quantität an Lebenskraft erspart, welche er in Lebenszähigkeit umsetzt, und zwar derart, dass durch die ersparte Lebenskraft ein Wachsthum der Lebensdauerwahrscheinlichkeit erfolgt. Dies ist folgendermaassen zu verstehen: Es ist z. B. bei einem 18jährigen Menschen die fernere wahrscheinliche Lebensdauer $w_{18} = 42{\cdot}37112$, bei einem 19jährigen müsste dieselbe daher $w_{19} = w_{18} - 1 = 41{\cdot}37112$ betragen, weil dieser bereits ein weiteres Jahr seines Lebens zurückgelegt, d. h. die für das entsprechende Lebensjahr nöthige Lebenskraft verbraucht hat. Nun ist aber die fernere wahrscheinliche Lebensdauer eines 19jährigen Menschen $w_{19} = 41{\cdot}67567$, also um 0·30455 Jahre mehr; demnach hat derselbe im Laufe seines 19. Lebensjahres relativ soviel an Lebenskraft erspart, als er zum Leben während einer Dauer von 0·30455 Jahren nöthig gehabt hätte. Im Laufe des zurückgelegten Lebensjahres war daher das Verhältniss der disponiblen Lebenskraft zu der in Lebenszähigkeit umgesetzten $K : Z = 0{\cdot}69545 : 30455$. Die Veränderlichkeit dieser beiden physiologischen Grundelemente gibt sich nun in dem jeweiligen Differential-Verhältnisse der Wahrscheinlichkeiten der ferneren und der gesammten Lebensdauer des Menschen in einem und demselben Lebensalter kund.

Während das Wesen der theils concaven, theils convexen Stellung der Curve der ferneren Lebensdauerwahrscheinlichkeit zur Abscissenaxe in dem zunehmenden beziehungsweise abnehmenden Verlaufe der Lebenskraft in zwei verschiedenen Altersabschnitten des menschlichen Lebens begründet ist, und der Wendepunkt dieses Verlaufes zugleich den Höhepunkt der mittleren Lebenskraft bedeutet, kennzeichnet der im Gegensatze hiezu stetige Verlauf der Curve der wahrscheinlichen Gesammtlebensdauer den Process der ununterbrochenen Zunahme der Lebenszähigkeit, so dass die Functionen der beiden Curven in ihrer Beziehung die Grundlage zur Ermittlung derjenigen Function bieten, welche den Validitätsverlauf des Menschen während der gesammten Lebensdauer allgemein bedingt. Von wesentlicher Bedeutung ist in dieser Hinsicht der Umstand, dass diese beiden maassgebenden Curvengebilde einen gemeinsamen analytischen Ursprung aufweisen, da die Ordinate der letzteren in der Summe der Ordinate und Abscisse der ersteren besteht, so dass eine äusserst einfache Beziehung zwischen den beiderseitigen Curvenfunctionen stattfindet. In Folge dessen lässt sich auch die functionelle Darstellung des Validitätsverlaufes in primitiver Form durchführen.

In dem differentiellen Verhältnisse der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer zur wahrscheinlichen Gesammtlebensdauer in den einzelnen Lebensstadien

*) Vergleiche unsere Abhandlung: „Eine empyrische Approbation unserer Hypothese, betreffend die mathematisch-physiologische Ableitung des Validitätsverlaufes beim Menschen aus dem Absterbegesetze." VII. Lieferung.

äussert sich nämlich das relative Maass der jeweilig noch vorhandenen Lebensenergie, so dass durch Construction einer Curve deren Ordinate die wahrscheinliche fernere Lebensdauer und deren Abscisse die wahrscheinliche Gesammtlebensdauer darstellt, dieses Verhältniss in eine geschlossene mathematische Function gebracht wird, deren analytisch-geometrischer Begriff den Verlauf des natürlichen Kräfteverfalles für das in Betracht kommende Menschenmateriale allgemein kennzeichnet und auf diese Weise das relative Maass der jeweilig noch vorhandenen Lebensenergie in den einzelnen Lebensstadien erkennen lässt. Der negative Differential-Quotient der Coordinaten dieser Curve repräsentirt das Verhältniss des jeweiligen Kräfteverfalles und solchermaassen das beziehungsweise relative Ausmaass an noch vorhandener Lebensenergie. Wird also die wahrscheinliche fernere Lebensdauer als Ordinate der Curve mit w_x und die wahrscheinliche Gesammtlebensdauer als Abscisse derselben mit W_x bezeichnet, so ergibt sich die Gleichung

1) $$-\frac{d\,w_x}{d\,W_x} = E_x$$

als Ausdruck der relativen Lebensenergie.*) Dieser Begriff bildet mit demjenigen der beziehungsweisen körperlichen Widerstandsfähigkeit (Resistenz) des Menschen die Grundlage für die Ermittlung der jeweiligen Validität in den einzelnen Lebensstadien. Hinsichtlich des Begriffes der körperlichen Widerstandsfähigkeit lässt sich zur Definition desselben Folgendes anführen. Die körperliche Widerstandsfähigkeit des Menschen steht im geraden Verhältnisse zu dessen frei verfügbarer Lebenskraft. Diese Letztere äussert sich in der Differenz zwischen der gesammten Lebenskraft des Menschen und dessen Lebenszähigkeit. Es kann nämlich als Axiom angenommen werden, dass die frei verfügbare oder überschüssige Lebenskraft, d. i. jene, welche der Mensch nach Befriedigung seiner Lebensfunctionen noch erübrigt, das Maass der Validität des Menschen kennzeichnet, während der latente Bestand an gebundener Lebenskraft der vorhandenen Lebenszähigkeit stets die Waage hält. Erreicht dagegen das vorhandene Maass an gebundener Lebenskraft dasjenige der Lebenszähigkeit nicht mehr, so tritt Invalidität ein, indem die Lebenskraft kaum mehr den Anforderungen zu entsprechen vermag, welche die Befriedigung der nackten Lebensfunctionen an dieselbe stellt. Die Resistenz äussert sich daher in der Differenz, welche in den jeweiligen Lebensstadien zwischen der relativen Lebenskraft und Lebenszähigkeit besteht, und gelangt mit Rücksicht auf die blos relative Beschaffenheit dieser Werthbegriffe mathematisch durch das Verhältniss der Differenz und der constanten Summe der Verhältnisszahlen derselben zum Ausdrucke.**)

Berücksichtigt man nun den Umstand, dass das Verhältniss der Lebenskraft zur Lebenszähigkeit in demselben Differential-Quotienten wie die Lebensenergie ihren Ausdruck finden muss, da diese zu einander im Verhältniss stehenden relativen Werthbegriffe den Differential-Quotienten der Curve der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer beziehungsweise der Curve der Gesammtlebensdauer

*) Da der Verlauf der Curve ein gegen die Abscissenaxe abfallender ist, so ist der Differential-Quotient an und für sich negativ, daher die Lebensenergie E stets positiv.

**) Vergl.: „Technische Basis für die Alters- und Invaliditäts-Versicherung", III. Lieferung.

entsprechen, so gelangt man zu der Conclusion, dass die Widerstandsfähigkeit (Restistenz) eine reine Function der Lebensenergie bedeutet und in dem Werthe

2) $$R = C \cdot \frac{E-1}{E+1}$$

ihren Ausdruck findet. Das Maass der Validität des Menschen ist aber in dem Producte seiner jeweiligen Lebensenergie und Widerstandsfähigkeit gegeben, daher in der Form

3) $$V_x = C \cdot E_x \cdot \frac{E_x - 1}{E_x + 1}$$

das relative Werthmaass der Validität des Menschen in den einzelnen Lebensstadien dargestellt erscheint. In Anbetracht dessen gelangt man zu dem interessanten Schlusse, dass die besagte Curve, deren Coordinaten durch die fernere wahrscheinliche Lebensdauer w_x als Ordinate und die wahrscheinliche Gesammtlebensdauer W_x als Abscisse zum Ausdrucke gelangen, einzig und allein bestimmend ist für das Wesen des Validitätsverlaufes, indem mit Rücksicht auf die Form 1) der Werth des Validitäts-Coëficienten in dem Ausdrucke

4) $$V_x = -C \cdot \frac{d\,w_x}{d\,W_x} \cdot \frac{\frac{d\,w_x}{d\,W_x} + 1}{\frac{d\,w_x}{d\,W_x} - 1}$$

zur Darstellung gelangt und daher in einer reinen Function des Differential-Quotienten der Coordinaten dieser Curve sich äussert.

Das Wesen und die analytische Beschaffenheit der Curve ist durch die Gleichung

5) $$W_x = w_x + x$$

gegeben, und geht aus derselben hervor, dass man es hier mit der Gleichung einer Geraden mit variabler Constante zu thun hat, welch' letztere durch x repräsentirt wird. Die Curve hat daher eine ähnliche Beschaffenheit wie die Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer; nur mit dem Unterschiede, dass hier die Variation blos auf eine Constante beschränkt ist.

Dieselbe repräsentirt daher eine modificirte Form der originären Wahrscheinlichkeitscurven und lässt sich analytisch ebenso darstellen wie diese, indem man sich einer vermittelnden Variablen zwischen der Ordinate w_x und der Abscisse W_x bedient. Berücksichtigt man nämlich die bekannte Form

6) $$\frac{w_x - a}{x + 2C} = \frac{b}{8} \cdot \frac{1 - t^2}{t}$$

welche von diesem Gesichtspunkte jene der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer entsprechende mathematische Function ausdrückt, so gelangt man durch Substitution zu dem Ausdrucke

7) $$\frac{w_x - a}{W_x - w_x + 2C} = \frac{b}{8} \frac{1 - t^2}{t}$$

Derselbe kennzeichnet also allgemein die analytische Beschaffenheit dieser Curve, insoweit diese mit dem Systeme der originären Wahrscheinlichkeitscurven zusammenhängt.

Die Verwaltungskosten tilgbarer Anlehen berechnet nach Maassgabe der Capitals-Annuität.

In jüngster Zeit ist auf dem Gebiete des bankmässigen Creditwesens eine bemerkenswerthe Neuerung zu verzeichnen. Es sind dies die sogenannten Eisenbahn-Rentenbanken, deren Thätigkeit eine ähnliche ist, wie diejenige der Bodencredit- und Hypothekenbanken, nur erstreckt sich dieselbe ausschliesslich auf die Gewährung von Credit an kleine Eisenbahn-Unternehmungen, deren Prioritätenbesitz die Emission öffentlicher Prioritätsanleihen nicht lohnt. Der Modus, nach welchem diese Anlehen gewährt werden, ist derselbe wie beim Bodencredit, indem der Prioritätenbesitz mit einer fixverzinslichen innerhalb einer gewissen Dauer tilgbaren Capitalssumme belehnt wird. Auf Grund dieser Darlehen besitzt die Bank das Recht, sogenannte Prioritätspfandbriefe auszugeben, die eine Sicherstellung auf sämmtliche belehnte Pfandobjecte (Simultanhypothek) besitzen. Auf diesem Umwege wird also dem kleinen Prioritätenbesitze der Vortheil gewahrt, welchen der öffentliche Credit dem Darlehenscontrahenten bietet, u. zw. insoferne, als das in Folge des Pfandbriefsystemes verursachte grössere Capitalsangebot mit seiner zinsfussermässigenden Wirkung demselben solchermaassen zugutekommt. Ausserdem hat die vermittelnde Rolle des Bankinstitutes und die mit derselben statuirte freie Verfügbarkeit des Capitales einen nicht zu unterschätzenden Werth für die günstigere Beurtheilung der qualitativen Beschaffenheit der Securität. Währenddem nämlich die Creditinstitute auf der einen Seite die Haftung für die Einlösung der Pfandbriefe und deren Zinsen übernehmen, tragen sie auf der anderen Seite das Risico für den gewährten Prioritätencredit, auf diese Weise die Interessen des Capitalisten und des Darlehenscontrahenten in sich vereinigend.

Zur Bestreitung der Verwaltungskosten nehmen diese Institute ebenso wie die Bodencreditbanken die Differenz zwischen dem Darlehens- und der Prioritätspfandbrief-Zinsfusse in Anspruch, doch ist hier zumeist aus administrativen Urschen deren Berechnungsmodus ein anderer, da gewisse Abgaben und Steuern, sowie eventuelle Gegenleistungen für übernommene Staatsgarantie der Pfandbriefe zumeist nach Maassgabe der Capitals-Annuität beziehungsweise der Zinsrate oder der Tilgungsquote allein bemessen werden.

In Nachfolgendem wollen wir versuchen für diesen Modus die erforderlichen mathematischen Gesetze aufzustellen und denselben einer vergleichsweisen Untersuchung mit Rücksicht auf die sonst übliche Berechnungsart unterziehen.

In einer der früheren Lieferungen dieses Werkes haben wir in der Abhandlung: „Zinseszins und Rentenrechnung mittelst Hilfstabellen*) Anlass genommen uns mit diesem Gegenstande insofern zu befassen, als die Frage der percentuellen Verwaltungsgebühren eines zur Aufzinsung gelangenden Capitales dies erforderte. Dieser Modus findet bei Ermittlung der totalen Verwaltungsgebühren solcher mit Verzinsung verbundener Geschäftsabschlüsse, welche eine mehrjährige Abwicklungsfrist beanspruchen, entsprechende Anwendung.

*) Siehe V. Lief. Seite 65.

Denken wir uns ein Capital bei $P = 100\,p$ percentiger ganzjähriger Verzinsung auf n Jahre derart angelegt, dass zu Beginn eines jeden Jahres von dem jeweilig vorhandenen Betrage $Q = 100\,q$ Percent als Verwaltungsgebühr in Abzug gebracht werden; wie gross wird das Endcapital sein?

Die Lösung dieser Aufgabe geschieht in der Weise, dass die decursive Aufzinsung des Anlagecapitales mit $P = 100\,p$ Percent und gleichzeitig die anticipative Abzinsung desselben mit $Q = 100\,q$ Percent auf n Jahre durchgeführt wird. Es ist also

1) $$K_n = K\,(1 + p)^n \,.\, (1 - q)^n$$

das gesuchte Endcapital. Die Richtigkeit dieser Form lässt sich auf folgende Art nachweisen: Der Werth des Capitales K nach Abzug der percentuellen Verwaltungsgebühr ist $K\,(1 - q)$, daher $K\,(1 - q)\,(1 + p) = K_1$ das Capital zu Beginn des zweiten Jahres, welches nach Abzug der Verwaltungsgebühr durch $K_1\,(1 - q)$ zum Ausdrucke gelangt und zu Beginn des dritten Jahres den Werth $K_1\,(1 - q)\,(1 + p) = K\,(1 - q)^2\,(1 + p)^2 = K_2$ erreicht u. s. f., so dass sich schliesslich nach Ablauf des $n$ten Jahres für K_n derjenige Werth ergibt, welcher in der Form 1) zum Ausdrucke gebracht ist.

Soll nun weiter der Baarwerth der Verwaltungsgebühren während der gesammten Anlagedauer für den Zeitpunkt des Beginnes derselben ermittelt werden, so muss jenes in Form 1) dargestellte Endcapital von demjenigen in Abzug gebracht werden, welches durch blosse Aufzinsung während derselben Dauer und bei gleichem Zinsfusse $P = 100\,p$ sich ergeben hätte, so dass die Verwaltungsgebühren in ihrem Gesammtwerthe am Ende der Anlagefrist sich folgendermaassen darstellen lassen:

2) $$V_n = K\,(1 + p)^n \left[1 - (1 - q)^n\right]$$

und in Folge dessen für den Zeitpunkt des Beginnes derselben in der Form

3) $$V = K\left[1 - (1 - q)^n\right]$$

zum Ausdrucke gelangen.

Dies geht aus dem Umstande hervor, dass der zum Schlusse der Anlagefrist sich ergebende Gesammtwerth der Verwaltungsgebühren V_n auf den Zeitpunkt des Beginnes discontirt den Werth V ergibt; d. h.

4) $$V = \frac{V_n}{(1 + p)^n}$$

Den Betrag V könnte man daher vom Anlagecapitale K sofort als Summe der gesammten Verwaltungsgebühren in Abzug bringen, da derselbe deren Baarwerth im Zeitpunkte des Anlagebeginnes bildet.

Ueberhaupt spielt im bankmässigen Geschäftsverkehre die anticipative Verzinsungsform eine bedeutende Rolle, da nicht nur der Escompte- und Lombard-, sondern auch der Boden- und Hypothekarcredit und der Abschluss nicht öffentlicher Prioritätsanlehen auf deren Grundlage beruhen. Hingegen wird dem privaten Capitale von der Bank blos eine decursive Verzinsung gewährt, so dass die Differenz, welche in den beiden Verzinsungsformen liegt, gewissermaassen als Theil der-

jenigen Provision angesehen werden kann, welche ein Institut für die Uebernahme aller finanziellen Transactionen zu fordern berechtigt ist. Jeder Aufzählungsbetrag, welchen ein Bankinstitut als Resultat eines mit Verzinsung verbundenen Geschäftsabschlusses an einen Privaten leistet, gelangt um die vorschussweisen Zinsen eines Zinsintervalles (Jahr oder Semester) gekürzt, zur Auszahlung. Im Escompte und Lombard, wo bekanntlich die Geschäftsabwickelung mit einer kürzeren Frist als der eines gewöhnlichen Zinsintervalles verbunden sein kann, werden die Zinsen für die ganze Dauer anticipirt. Handelt es sich also darum, den Werth jener Differenz zwischen der anticipativen und decursiven Verzinsung allgemein darzustellen, so gelangt man auf folgende Art zum Ziele.

Der Endwerth eines decursiv verzinsten Capitales ist in der Form

5) $$K_n = K\,(1 + p)^n$$

zum Ausdrucke gebracht. Dagegen repräsentirt der Ausdruck

6) $$_nK = \frac{K}{(1 - p)^n} = K\,(1 - p)^{-n}$$

den Endwerth eines anticipativ verzinsten gleichen Capitales wobei $P = 100\,p$ für beide Formen den entsprechenden Zinsfuss bezeichnet.

In der Differenz dieser Endwerthe

7) $$_nK - K_n = D_n$$

liegt nun jener Gewinn, welcher aus der vorschussweisen Einhebung von nachschussweise berechneten Zinsen resultirt und gelangt man daher durch Substitution der entsprechenden Werthe in die Form 7) zu folgendem Resultate

8) $$K\,(1 + p)^n \left[\frac{1}{(1 - p^2)^n} - 1\right] = D_n$$

Soll nun der Endwerth der Differenz D_n durch seinen Baarwerth im Zeitpunkte des Geschäftsabschlusses zur Darstellung gelangen, so muss derselbe im decursiven Sinne entsprechend discontirt werden. In Folge dessen ergibt sich

9) $$\frac{D_n}{(1 + p)^n} = K\left[\frac{1}{(1 - p^2)^n} - 1\right] = D$$

als der zur Zeit des Geschäftsabschlusses sich ergebende Baarwerth des Gewinnes, welcher sich aus den anticipativ eingehobenen decursiven Zinsen ergibt.

Auf Grundlage dieser Normen lässt sich daher auch die Berechnung der Verwaltungsgebühren nach Maassgabe der Capitals-Annuität beziehungsweise der Zinsrate oder der Tilgungsquote allein durchführen. Denken wir uns ein Capital bei $P = 100p$ percentiger ganzjähriger Verzinsung auf n Jahre in der Weise contrahirt, das die Verzinsung und Tilgung derselben in jährlichen gleichen Annuitäten an die Bank erfolgt. Die Verwaltungsgebühr wird zu Beginn eines jeden Jahres mit $Q = 100\,q$ Percent des jeweilig noch zu tilgenden Capitales bemessen; wie hoch beläuft sich der Baarwerth derselben?

Unter Bezugnahme auf die Form 1) ergibt sich

10) $$0 = K\,(1 + p)^n\,(1 - q)^n - \frac{R'\left[(1 + p)^n\,(1 - q)^n - 1\right]}{(1 + p)\,(1 - q) - 1}$$

als Ausdruck der rechnungsmässigen Tilgung des Capitales bei Abzug der percentuellen Verwaltungsgebühren. Ohne Rücksicht auf Verwaltungsgebühren lautet die Form für die rechnungsmässige Tilgung eines Capitales

$$11)\qquad 0 = K(1+p)^n - \frac{R\left((1+p)^n - 1\right)}{p}$$

daher die beziehungsweisen Renten den Formen

$$12)\qquad R' = \frac{K(1+p)^n (1-q)^n \left[(1+p)(1-q) - 1\right]}{(1+p)^n (1-q)^n - 1} \text{ und } R = \frac{K(1+p)^n \cdot p}{(1+p)^n - 1}$$

entsprechen. Demgemäss sind die gleichen Quoten der zu Ende eines jeden Jahres in Abzug zu bringenden Verwaltungsgebühren durch die Differenz zwischen R und R' zum Ausducke gebracht; daher ist

$$13)\qquad 0 = V(1+p)^n - \frac{(R - R')\left[(1+p)^n - 1\right]}{p}$$

und in Folge dessen der Baarwerth der Verwaltungsgebühren im Zeitpunkte der Darlehensgewährung durch die Form

$$14)\qquad V = \frac{(R - R')\left[(1+p)^n - 1\right]}{p(1+p)^n}$$

gekennzeichnet. Unter Bezugnahme auf die durch gleichmässige Jahresquoten hier dargestellte Verwaltungsgebühr lässt sich das percentuelle Verhältniss derselben zur Annuität beziehungsweise zur Zinsrate oder zur Tilgungsquote allein stets feststellen, so dass den bezüglichen Anforderungen nach jeder Richtung hin Genüge geleistet zu werden vermag.

Berücksichtigt man weiter den Umstand, dass bei der sonst üblichen Berechnungsart die Differenz zwischen dem Darlehenszinsfusse $P = 100\,p$ und dem etwa mit $P_1 = 100\,p_1$ zu bezeichnenden Pfandbriefzinsfusse die jährliche Verwaltungsgebühr darstellt, daher die Tilgung unter Zugrundelegung des Pfandbriefzinsfusses gemäss der Formel

$$15)\qquad 0 = K(1+p_1)^n - \frac{R''\left[(1+p_1)^n - 1\right]}{p_1}$$

erfolgt, und demzufolge die Annuität R'' durch den Ausdruck

$$16)\qquad R'' = \frac{K(1+p_1)^n \cdot p_1}{(1+p_1)^n - 1}$$

zur Darstellung gelangt, so ergibt sich unter Voraussetzung der anticipativen Einhebung der jährlichen Verwaltungsgebühr die Relation

$$17)\qquad V = \frac{(R - R'')\left[(1+p)^n - 1\right](1+p)}{(1+p)^n \cdot p}$$

für den Baarwerth derselben im Zeitpunkte des Darlehensschlusses. Unter Bezugnahme auf die Formel 14) ergibt sich demnach die Beziehung

$$18)\qquad (R - R'')(1+p) = R - R'$$

welche in ihrem Wesen die Handhabe zur Bemessung gleich grosser Verwaltungsgebühren für beide Berechnungsarten bildet.

da die Letzteren in ihrem physiologischen Begriffe von Jenen vollständig abweichen. Die Zahlen der Validitätseinheiten repräsentiren die relativen Werthe der vollständigen Rüstigkeit der Ueberlebenden in den einzelnen Altersclassen, während die Zahlen der Activen quantitativ die noch validen Ueberlebenden überhaupt kennzeichnen. In mathematischer Hinsicht ist also die functionelle Abhängigkeit der Curve der wahrscheinlichen Rüstigkeitsdauer im Wesen eine ähnliche wie diejenige der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer, dagegen ist die Beschaffenheit der in der Function vertretenen Variablen eine veränderte, und zwar nicht nur hinsichtlich ihres statistischen Begriffes, sondern auch in Betreff ihres mathematisch-analytischen Ursprunges.

In ihrer Abhängigkeit von der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer äussern sich die Zahlen der Validitätseinheiten in folgender Weise:

9) $$L_x \,.\, V_x = \frac{2\,w'_x + 1}{w'_x + 1} \cdot \frac{w'_x}{w_x} \cdot e^{-\int \frac{d_x}{w_x}}$$

dementsprechend besteht also eine directe Beziehung zwischen den beiden, welche auf Basis der zwischen der Curve der Lebenden und derjenigen der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer geltenden Relation unter Zuhilfenahme der hier dargestellten Formen 4) und 5) bestimmt werden kann.*)

Hierin gelangt das Wesen des mit der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit im engsten Contacte stehenden natürlichen physischen Kräfteverfalles derart zur Geltung, dass jener die vollständige Rüstigkeit der Ueberlebenden kennzeichnende relative Werth direct durch die Function der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit zum Ausdrucke kommt, so dass es nicht schwer ist, eine directe Beziehung zwischen der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer und der wahrscheinlichen ferneren Rüstigkeitsdauer herzustellen. Dieselbe ergibt sich in der Form

10) $$\frac{2\,w'_x + 1}{w'_x + 1} \cdot \frac{w'_x}{w_x} \cdot e^{-\int \frac{d_x}{w_x}} = \frac{e^{-\int \frac{d_x}{v_x}}}{v_x}$$

deren Wesen zur Feststellung der wahrscheinlichen Invaliditätsdauer die Handhabe bietet.**) Es ist nämlich zweifellos, dass in der Differenz der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer w_x und der wahrscheinlichen ferneren Rüstigkeitsdauer v_x sich die wahrscheinliche Invaliditäts-Dauer äussert, d. h.

11) $$d_x = w_x - v_x$$

ebenso wie in dem Verhältnisse der wahrscheinlichen ferneren Rüstigkeitsdauer v_x zur wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer w_x derjenige Werth zur Darstellung gelangt, welcher die Wahrscheinlichkeit im rüstigen Zustande zu sterben ausdrückt, während das Verhältniss der wahrscheinlichen Invaliditäts-Dauer zur

*) Siehe: Untersuchungen über das Wesen der Invalidität vom Standpunkte des Absterbegesetzes III. (Lief. IV.)

**) Der Einfachheit halber haben wir in den bezüglichen Formen die Constanten vernachlässigt.

wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer die Wahrscheinlichkeit im invaliden Zustande zu sterben kennzeichnet. Demnach bedeuten

12) $${}^{r}U_x = \frac{v_x}{w_x} \text{ und } {}^{i}U_x = \frac{d_x}{w_x}$$

diese beiden hier in Betracht gezogenen Wahrscheinlichkeiten.

Im Allgemeinen gelangt in der Form 10) das Wesen des Validitätsverlaufes beim Menschen in seiner geometrisch-analytischen Beschaffenheit insofern vollständig zur Darstellung, dass aus den beiden einander entsprechenden Functionen von w_x und v_x die Relation zwischen zweien dem origininären Curvensysteme entspringenden Curvengebilden, von denen das eine in seiner functionellen Grundlage modificirt erscheint, zu entnehmen ist. Es tritt hier nämlich hinsichtlich der functionellen Beschaffenheit der beiden Curven ein ähnlicher Fall ein, wie bei jener Form, welche die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und jener der Misen der lebenslänglichen Leibrenten darstellt. Während nämlich zwischen den discontirten Zahlen der Lebenden und den Misen der lebenslänglichen Leibrenten die Relation

13) $$D_x = \frac{L_x}{r^x} = \frac{e^{-\int \frac{d_x}{M_x}}}{M_x}$$

besteht, gilt für die analoge Beziehung zwischen den Zahlen der Lebenden und den ferneren Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten die Form

14) $$L_x = \frac{e^{-\int \frac{d_x}{w_x}}}{w_x}$$

Eliminirt man daher die Zahl der Lebenden L_x aus der Rechnung, so ergibt sich zwischen den Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten und den Misen der lebenslänglichen Leibrenten die interessante Relation

15) $$r^{-x} \cdot \frac{e^{-\int \frac{d_x}{w_x}}}{w_x} = \frac{e^{-\int \frac{d_x}{M_x}}}{M_x}$$

welche in ihrem analytisch-geometrischen Wesen mit jener in der Form 10) dargestellten correspondirt, und zwar insofern, als hier wie dort ein variabler Factor die eine der beiden identischen Functionen beeinflusst. Der Unterschied besteht nur darin, dass in der Form 15) der variable Factor von der gemeinsamen Abscisse x, bei der Form 10) hingegen von der Ordinate der Curve der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer w_x abhängig ist. Die Beschaffenheit der Curve der wahrscheinlichen ferneren Rüstigkeitsdauer ist daher eine ähnliche, wie diejenige der Curve der Leibrentenmisen. Berücksichtigt man überdies die begrenzte Dauer der Rüstigkeit, so wird hier der Verlauf der zeitlich beschränkten Leibrentenmisen dem Wesen derselben am nächsten kommen.

Die aus dem Verhältnisse dieser Curve zu derjenigen der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer entspringenden Wahrscheinlichkeiten im Zustande der Rüstigkeit, beziehungsweise der Invalidität zu sterben, mögen in nachfolgender Tafel den einzelnen Altersclassen gemäss zur Darstellung gelangen:

Lebens-alter x	Wahrschein-liche fernere Lebensdauer w_x	Wahrschein-liche fernere Rüstigkeits-dauer v_x	Wahrscheinl. Va-liditäts-Ueber-lebensdauer $w_x - v_x = d_x$	Wahrscheinlich-keit im rüstigen Zustande zu sterben ${}^rU_x$	Wahrscheinlich-keit im invaliden Zustande zu sterben ${}^iU_x$
18	42·37112	35·70708	6·66404	0·84273	0·15727
19	41·67567	34·25044	7·42523	0·82183	0·17817
20	40·97818	32·97977	7·99841	0·80481	0·19519
21	40·27914	31·70023	8·57891	0·78701	0·21299
22	39·57848	30·41149	9·16699	0·76838	0·23162
23	38·87612	29·24966	9·62646	0·75238	0·24762
24	38·17244	28·06487	10·10757	0·73521	0·26479
25	37·46732	26·87866	10·58866	0·71739	0·28261
26	36·76072	25·78235	10·97837	0·70136	0·29864
27	36·05294	24·67356	11·37938	0·68437	0·31563
28	35·34390	23·65346	11·69044	0·66924	0·33076
29	34·63394	22·60368	12·03026	0·65265	0·34735
30	33·92291	21.63203	12·29088	0·63768	0·36232
31	33·21115	20·63150	12·57965	0·62122	0·37878
32	32·49850	19·69240	12·80610	0·60595	0·39405
33	31·78526	18·73172	13·05354	0·58932	0·41068
34	31·07131	17·74726	13·32405	0·57216	0·42784
35	30·35651	17 18835	13·16816	0·56622	0·43378
36	29·64332	16·62717	13·01615	0·56091	0·43909
37	28·93116	15·42296	13·50820	0·53309	0·46691
38	28·21733	14·32268	13·89465	0·50758	0·49242
39	27·50168	13·19401	14·30767	0·47975	0·52025
40	26·78417	12·04493	14·73924	0·44970	0·55030
41	26·06461	11·10071	14·96390	0·42589	0·57411
42	25·34417	10·17078	15·16339	0·40170	0·59830
43	24·62329	9·38990	15·23339	0·38134	0·61866
44	23·90350	8·73567	15·16783	0·36546	0·63454
45	23·18462	8·16861	14·91781	0·35661	0·64339
46	22·47307	7·72938	14·74369	0·34394	0·65606
47	21.76535	7·29341	14·47194	0 33509	0·66491
48	20·06356	6·87776	14·18580	0·32652	0 67348
49	19·36826	6·43060	13·93766	0·31572	0 68428
50	19·67972	6·05663	13·62308	0·30776	0·69224
51	18·99846	5·77802	13·22044	0·30413	0·69587
52	18·32526	5·28236	13·04290	0·28826	0·71174
53	17·65992	4·93396	12·72596	0·27939	0·72061
54	17·00366	4·54208	12·46158	0·26712	0·73288
55	16·35622	4·11496	12·24126	0·25158	0·74842
56	15·71744	3·78262	11·93482	0·24066	0 75934
57	15·08953	3·36844	11·72109	0·22323	0·77677
58	14·47136	2·91759	11·55377	0·20161	0·79839
59	13·86285	2·55164	11·31121	0·18406	0·81594
60	13·26652	2·37085	10·89567	0·17871	0·82129
61	12·68157	1·79203	10·88954	0·14131	0·85869
62	12·10908	1·39177	10·71731	0·11494	0·88506
63	11·54983	0·97180	10·57803	0·08414	0·91586
64	11·00406	0·54782	10·45624	0·04978	0·95022
65	10·47244	0·12073	10·35171	0·01153	0·98847
66	9·95536	0·00000	9·95536	0·00000	1·00000

DIE MATHEMATIK

im

Dienste der Nationalökonomie

unter Rücksichtnahme auf die

praktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik

mit einigen, durch selbständige wissenschaftliche Errungenschaften auf dem Gebiete der reinen Mathematik begründeten, neuen Fundamenten der politischen Arithmetik

für Versicherungs- und Bank-Institute, sowie auch Lehrkräfte höherer Bildungsanstalten besonders geeignet.

Supplementband zum gleichnamigen Werke.

Verfasst

von

Dr. LUDWIG GROSSMANN

Inhaber des Ersten Wiener mathematischen Bureau und Herausgeber der Fachschrift „Controle".

Elfte Lieferung.

WIEN 1899.

Im Selbstverlage des Verfassers.

III., Sofienbrückengasse Nr. 14.

Druck von Josef Bayer & Comp. Wien, I., Wollzeile 25.



VORREDE.

Bei der Bearbeitung jener Materien, welche den Inhalt dieses Werkes ausmachen, äussert sich das Bestreben, deren wissenschaftlichen Charakter insoweit aufrechtzuerhalten, als dies der praktische Zweck der einzelnen Theile derselben zulässt. In der vorliegenden Lieferung ist die Anwendung der von der Theorie aufgestellten Sätze in der Praxis besonders berücksichtigt. An der Hand der bisherigen Ausführungen wird es leicht sein, sich auf allen praktischen Gebieten des Bank- und Versicherungswesens zurechtzufinden, jede einzelne Frage in ihrem Wesen zu erfassen und den entsprechenden technischen Anforderungen zu unterordnen.

Wenn die fortschreitende Erkenntniss von der eminenten Bedeutung aller auf dem culturellen Fortschritte beruhenden wirthschaftlichen Schöpfungen dazu beitrug, auf sämmtlichen Gebieten des socialen Strebens neue Gesichtspunkte zu schaffen, so war es insbesondere der Fall hinsichtlich jener Institutionen, welche das Finanz- und Assecuranzwesen umfassen, denn diese haben dem Wesen des socialen Getriebes im Laufe der letzten Decennien ein vollständig verändertes Gepräge verliehen. Eine Fülle neuer Anforderungen an die verschiedenen Disciplinen der Oekonomie-Wissenschaft machte sich in Folge dessen sowohl betreff der empirischen als auch der technischen Grundlagen im Verwaltungswesen geltend und diesen konnte nur auf dem Wege wissenschaftlich theoretischer Forschung entsprochen werden. Im Bewusstsein dessen war ich bemüht, diesem Umstande nach meinen bescheidenen Kräften Rechnung zu tragen, indem ich jene die Ausgestaltung der politischen Oekonomie und deren technischen Hilfswissenschaften betreffenden Untersuchungen in diesem Werke auf exacten mathematischen Grundlagen durchführte, gleichzeitig den Gesichtskreis wissenschaftlicher Erkenntniss dort erweiternd, wo es an diesen mangelte.

Solchermassen ist es mir gelungen, eine der schwierigsten Materien zu bewältigen und deren wissenschaftliche Ergebnisse dem praktischen Zwecke dienstbar zu machen, nachdem ich mit Hilfe selbständiger wissenschaftlicher Forschung neue, breitere Fundamente für die einschlägigen Disciplinen geschaffen.

Wien im Januar 1899.

Der Verfasser.

INHALT.

Versicherungstechnik.

Finanztechnik.

Druckfehler und Correcturen.

Auf Seite 20, elfte Zeile von oben, soll es anstatt:
in analoger Weise der Winkel x richtig lauten: in analoger Weise der Winkel x;

In dem mathematischen Ausdrucke auf Seite 25 in der sechsten Reihe von oben fehlt rechts die Schlussklammer.

Mathematische Untersuchungen über die qualitative Beschaffenheit eines Versicherungsstockes.

I.

Die mathematischen Grundsätze, auf denen das Wesen der Lebensversicherung beruht, haben neben anderen wichtigen Bedingungen zur Voraussetzung, dass die in Betracht kommenden Risken jenen der Sterbetafel zugrunde gelegten ausgewählten Leben in ihrer Gesammtheit annähernd entsprechen, sowie, dass die Vertheilung der Versicherten nach Altersclassen mit dem diesbezüglichen Verhältnisse des Menschenmateriales der Sterbetafel überhaupt möglichst übereinstimmt. Von diesem Gesichtspunkte aus ist daher die Beschaffenheit eines Versicherungsstockes hinsichtlich seiner Qualität zu beurtheilen. Nicht blos die rigorose Auswahl der Versicherten ist maassgebend für diese Beschaffenheit, sondern auch das Durchschnittsalter der versicherten Personen mit Hinblick auf dasjenige der zugrunde gelegten Sterbetafel.

Ist daher das Durchschnittsalter der versicherten Personen ein bedeutend höheres als das innerhalb des gleichen Rahmens der Sterbetafel sich ergebende, so ist daraus füglich eine mindere Qualität des Versicherungsstockes zu ersehen, und zwar insoferne, als bekanntlich bei lange versicherten Personen die Gefahr einer Ueberschreitung der rechnungsmässigen Sterblichkeit im höheren Maasse vorhanden ist als bei jüngeren. Deshalb wird in dieser Hinsicht auch der Neuzugang von besonderer Bedeutung sein, denn das naturgemäss mit jedem Jahre steigende Durchschnittsalter des Versicherten kann nur durch den Zugang jüngerer Altersclassen wieder auf das entsprechende Niveau gebracht werden und die Erfahrung, dass Anstalten, welche durch mehrere Jahre einen geringen Neuzugang aufweisen, in der Regel mit einer stetigen Verschlechterung der Sterblichkeitsverhältnisse zu rechnen haben, ist ein Beweis für die Richtigkeit dieser Annahme.

Karup äussert sich in seinem „Handbuch der Lebensversicherung“ hierüber folgendermaassen: „So wichtig es ist, um ein rationelles gesundes Lebensversicherungsgeschäft betreiben zu können, dass die Nettoprämie auf einer naturgemässen Sterblichkeitstafel und einem zu allen Zeiten mit Sicherheit zu erzielenden Zinsfuss basirt ist, so wichtig ist es, dass bei Normirung des Prämienzuschlages die grosse Bedeutung, der vielseitige Zweck und die ausserordentliche Tragweite desselben gewürdigt werden. Um die Richtigkeit des hier gesagten nach allen Richtungen hin zu erkennen, muss der Leser den folgenden Bedürfnissfactoren seine Aufmerksamkeit schenken. Die Nettoprämien stützen sich auf fünf Voraussetzungen, die in der Praxis zum Theile nur annäherungsweise, zum Theile gar nicht zutreffen; und zwar: a) dass die Absterbeordnung der Mitglieder einer Lebensversicherungs-Bank genau nach der Mortalitätstafel erfolge; b) dass eine dem Gesetze der grossen Zahlen entsprechende Anzahl gleichalteriger Personen in allen Altersstufen beitreten; c) dass sie alle das gleiche Capital o

den gleichen Rentenbetrag versichern; d) dass die Prämiengelder unter allen Umständen den gleichen Zinsertrag erbringen; e) dass kein Verlust an Capital oder Rente vorkomme. Wenn die Erfahrungsresultate aus der deutschen Praxis vorwiegend eine geringere als die berechnete Sterblichkeit, resp. als die erwartungsmässige Auszahlung zeigen, so darf hieraus keineswegs der Schluss gezogen werden, dass diese Mindersterblichkeit, respective Minderauszahlung für alle Zukunft stattfinden wird. Es ist von grossen Autoritäten zur Genüge nachgewiesen worden, dass unter versicherten Leben in den ersten Jahren nach dem Abschlusse der Versicherung eine Mindersterblichkeit, dagegen nach 5 Jahren und aufwärts eine nicht unerhebliche Mehrsterblichkeit als die berechnete eintritt. Jene anscheinend so günstigen Resultate sind lediglich durch die Jugend der deutschen Lebensversicherung und ganz besonders auch durch den mit jedem Jahre unverhältnissmässig steigenden Zugang an neuen Versicherungen hervorgerufen. Da aber in der Lebensversicherung nicht wie in der kaufmännischen Praxis die günstigeren Chancen eines neuen Geschäftes zur Ausgleichung der ungünstigen Chancen eines älteren Geschäftes benützt werden dürfen*) und ausserdem der Zugang nach einer Reihe von Jahren erfahrungsgemäss mehr und mehr abnimmt**), so wird jene Mehrsterblichkeit einst ebenso vorwiegend, wie jetzt die Mindersterblichkeit sein. Und selbst jetzt in der günstigen Periode fehlt es keinesfalls an Geschäftsjahren, in welchen diese oder jene Bank eine Mehrsterblichkeit, respective eine Mehrauszahlung aufzuweisen hat. Für solche überrechnungsmässige Auszahlungen bieten die Nettoprämien keine Deckungsmittel. Je mehr die Versicherungssummen in ihrer Höhe von einander differiren und je weniger die Zahl der Versicherten der respectiven Altersclassen derjenigen der Mortalitätstafel entspricht, desto grösser wird das Risico und desto geringer die Wahrscheinlichkeit, dass die mathematisch berechnete Nettoprämie allenfalls die Verbindlichkeiten der Bank gegenüber den Versicherten decken wird."

Die Thatsache, dass die Vertheilung der Versicherungen nach Altersclassen der Sterbetafel entsprechend, für die qualitative Beschaffenheit eines Versicherungsstockes ebenso von Belang ist, wie die stetige Beobachtung einer gewissen der Sterbetafel angemessenen Durchschnittsselection wurde also bereits von Karup hervorgehoben. Das Eine wie das Andere wird aber durch den entsprechenden Neuzugang bewerkstelligt, da einerseits die älter werdenden Mitglieder, deren Selection mit jedem Jahre abnimmt, durch jüngere Altersclassen erneuert werden und andererseits durch Zugang die Zahl derselben ergänzt wird.

Wohl glauben manche Anstalten den unvermeidlichen Storno als willkommenes Auskunftsmittel in dieser Hinsicht betrachten zu können, indem hiedurch der Selectionsabnahme der Mitglieder während längerer Bestandesdauer der Versicherungen zum Theile vorgebeugt wird; berücksichtigt man jedoch den Umstand, dass zumeist jüngere Versicherte demselben unterworfen sind, während Mitglieder, die in ihrer Gesundheit sich nicht sicher fühlen, ihre Versicherung

*) Soll sich wohl auf die Deckungsmittel beziehen. — **) D. h. relativ, nämlich im Verhältnisse zum wachsenden Versicherungsstocke.

aufrechtzuerhalten bestrebt sind, so wird diese Annahme sich unter allen Umständen als unhaltbar erweisen.

Hinsichtlich der Ergänzung der Versicherungen durch Neuzugang verdient der Umstand hervorgehoben zu werden, dass mit dem Wachsthum des Versicherungsstockes sich auch naturgemäss der Zugang steigern muss, wenn das richtige Verhältniss in der Sterblichkeit auch für die Zukunft aufrechterhalten werden soll, jedoch darf dies nicht auf Kosten der Auswahl geschehen, da wohl ein während mehreren Jahren erzielter bedeutender Neuzugang die Sterblichkeit momentan zu vermindern geeignet ist, bei geringer Rigorosität in der Auswahl jedoch im Laufe der Jahre eine desto grössere Steigerung der Mortalität zur Folge hat.

Setzt man also die angemessene Vertheilung des quantitativen Risicos bei einem Versicherungsstocke voraus, so vermag für dessen qualitative Beschaffenheit, soweit sich dieselbe auf die Auswahl und richtige Vertheilung der Mitglieder nach Altersclassen bezieht, das spätere Supperrisico gegenüber dem durch die Prämieneinnahme gedeckten einerseits und der durchschnittliche Sterblichkeitscoëfficient andererseits, als Maassstab zu dienen. Inwiefern dies zutrifft, mag aus folgenden Untersuchungen beurtheilt werden.

Die Nettoprämie für eine Versicherung wird stets derart berechnet, dass beim Abschlusse der letzteren der gegenwärtige Werth aller zu zahlenden Nettoprämien des Versicherten nach den angenommenen Rechnungsgrundlagen dem gegenwärtigen Werthe der Anstaltsleistungen, respective dem Risico gleichkommt. Erfolgt nun die Sterblichkeit und die Verzinsung der Prämiengelder factisch genau nach den bei der Prämienberechnung angenommenen Rechnungsgrundlagen, so ergibt sich hieraus unbedingt die Nothwendigkeit, dass die Anstalt mit diesen Nettoprämien und deren rechnungsmässigen Zinsen ihr Auskommen findet. Zahlt der Versicherte die einmalige Prämie, so muss die Anstalt die ganze in derselben enthaltene Nettoprämie in Reserve stellen, denn diese ist mit Zinsen und Zinseszinsen gerade nöthig um die Anstaltsleistung zu decken. Die jährliche Prämie repräsentirt aber die jährliche Tilgungsquote der einmaligen Prämie vom Zeitpunkte des Versicherungsabschlusses bis zur wahrscheinlichen Fälligkeit der Versicherung gerechnet, sie unterscheidet sich daher von der jährlichen Risicoprämie schon durch ihren rechnungsmässigen Ursprung. Bei allen Capitals- und Leibrentenversicherungen mit gleichbleibender Jahresprämie wird nun diese zur Bestreitung der jährlichen Risicoprämie ausreichen müssen und da die Risicoprämie anfangs kleiner als die gleichbleibende Jahresprämie ist, so wird ein Theil derselben zur Ergänzung der späteren grösseren Risicoprämie Verwendung finden. Betrachte man beispielsweise die einfache Capitalsversicherung auf den Todesfall mit gleichbleibender Jahresprämie. Da bekanntlich für die einjährige kurze Capitalsversicherung auf den Todesfall die Leistung des Versicherten gerade das Jahresrisico der Anstalt für die betreffende Altersstufe deckt, so tritt demgegenüber die Mehrleistung in den jüngeren Versicherungsjahren und die Minderleistung in den späteren Jahren bei gleichmässiger Prämienzahlung ganz deutlich hervor, wenn man die Abschlussprämie dieser Versicherung mit den successive steigenden Risicoprämien der einjährigen Versicherung vergleicht.

Es sei z. B. als Beitrittsalter zur lebenslänglichen Capitalsversicherung auf den Todesfall das 30. Lebensjahr angenommen und die Nettoprämie nach der Tafel der 17 englischen Gesellschaften zum Zinsfusse von $3^1/_2$ Percent berechnet, so stellt sich das Verhältniss derselben zur jährlichen Risicoprämie folgendermaassen:

Alter	Einjährige Risico-Prämie	Jährliche gleichbleib. Prämie	Differenz	Alter	Einjährige Risico-Prämie	Jährliche gleichbleib. Prämie	Differenz
30	0·814	1·796	+ 0·982	60	2·931	1·796	— 1·135
35	0·897	1·796	+ 0·899	65	4·259	1·796	— 2·463
40	1·001	1·796	+ 0·795	70	6·274	1·796	— 4·478
45	1·180	1·796	+ 0·616	75	9·233	1·796	— 7·437
50	1·540	1·796	+ 0·256	80	13·566	1·796	—11·770
55	2·093	1·796	— 0·297	85	19·816	1·796	—18·020

Die Anstalt muss daher die Mehrleistung der Prämien in der ersten Hälfte der Versicherungsdauer reserviren, um imstande zu sein, die Minderleistung während der restlichen Dauer zu decken. Die Prämienreserve repräsentirt also nichts anderes als die anfängliche Mehrleistung an Prämien und ist daher der Ausdruck des späteren Supperrisicos gegenüber demjenigen, welches durch die Prämieneinnahme seine Deckung findet.

Von diesem Gesichtspunkte aus ist auch jener Maasstab, für die qualitative Beschaffenheit eines Versicherungsstockes, welcher in dem Verhältnisse der Prämienreservesumme zur Gesammt-Versicherungssumme gegeben ist, zu betrachten, da in demselben das Maass des erwartungsmässigen Supperrisicos gegenüber dem durch die Prämieneinnahmen gedeckten, zur Darstellung gelangt. Bei sonst normalen Verhältnissen drückt sich in demselben die durchschnittliche Bestandesdauer der Versicherungen aus, welche unter Rücksichtnahme auf den jährlichen Neuzugang sowie auf die jeweilige Dauer der Anstaltsthätigkeit einen wichtigen Factor für diese Beurtheilung bildet.

Hieraus entspringt also die Conclusion, dass jenes durch das Verhältniss der Prämienreservesumme zur Gesammt-Versicherungssumme ausgedrückte Maass vom späteren Supperrisico stets im angemessenen Verhältnisse zur Dauer der Anstaltsthätigkeit stehen muss. Ist nämlich in dieser Hinsicht ein Missverhältniss vorhanden, so ist daraus auf eine Unregelmässigkeit in der Vertheilung der Risken nach Altersclassen zu schliessen, welche in zweierlei Ursachen ihren Ursprung haben kann. Uebersteigt dieses Supperrisico das angemessene Maass, so involvirt dieser Umstand einen geringen Neuzugang im Verhältnisse zum Versicherungsstocke, welcher entweder während einer Reihe von Jahren fortbestanden hat oder noch fortbesteht. Erreicht jedoch das in Betracht kommende Supperrisico das angemessene Maass nicht, so ist daraus auf einen übermässigen Storno, beziehungsweise eine Uebersterblichkeit der älteren Versicherungen zu schliessen.

Ueber das Wesen des Zinsfusses beim bankmässigen Credit.

I.

Die Fortschritte auf dem Gebiete des wirthschaftlichen Verkehres haben in die Gestaltung des Zinsfusses beim bankmässigen Credite eine gewisse Gesetzmässigkeit gebracht, deren Wesen einerseits dem Principe von Angebot und Nachfrage folgend, andererseits den Bedingungen der jeweiligen Securität sich unterordnet und mathematisch ausgedrückt gewissermaassen in einer Function dieser beiden variablen Factoren besteht.

Während der jeweilige officielle Bankzinsfuss den Ausdruck des relativen Ergebnisses zwischen Angebot und Nachfrage den örtlichen und zeitlichen Umständen gemäss darstellt, bildet in Bezug auf die Securität das erfahrungsmässige Durchschnittsrisico den Maassstab der Creditfähigkeit im speciellen Falle. Zwischen den Grenzen dieses Durchschnittsrisicos bewegt sich denn auch der mehr oder weniger hohe Zinsaufschlag zum officiellen Bankzinsfusse.

Der bankmässige Credit bildet in seinen verschiedenen Arten die Hauptstütze eines lebhaften Geldverkehres, ohne welchen eine rationelle wirthschaftliche Thätigkeit nicht denkbar ist. Die Organisation des Geldverkehres und des Creditwesens ist also eines der Hauptmerkmale eines geregelten Staatswesens in wirthschaftlicher Beziehung, indem das Wesen dieser beiden Factoren die Grundlage einer gedeihlichen ökonomischen Entwicklung sowohl vom handelspolitischen als auch vom allgemein socialwirthschaftlichen Standpunkte bildet. Sich gegenseitig ergänzend, repräsentiren die Beiden den Blutumlauf im Körper des Staatswesens, durch ihre Pulsirung demselben die nöthige Lebenskraft spendend. Während das Geld als Circulationsmittel dem Blute zu vergleichen ist, bildet der Credit jenen Nerv, durch welchen der Umlauf desselben gefördert und angeregt wird.

Der bankmässige Credit ist ein vom Bankier berufsmässig auf eigene Rechnung und Gefahr betriebener, indem derselbe auf der einen Seite in Anspruch genommen auf der anderen gewährt wird. Die Grundlage dieses Geschäftes liegt im Wesen der Creditfähigkeit selbst. Der Bankier, welcher auf Grund seines eigenen Vermögens, seiner Vertrauenswürdigkeit und geschäftlichen Routine leicht und billig sich Credit zu verschaffen vermag, benützt diesen Umstand, indem er seine Creditfähigkeit verwerthend, wieder gegen höheren Zinsfuss die ihm anvertrauten Capitalien zu verwerthen sucht. Das Wesen des Credites besteht also in der Veräusserung der Nutzungen des Capitales. Der Bankier weiss sich diese Nutzungen billiger zu verschaffen als der Private und ist in Folge dessen in der Lage, aus diesem Umstande sich ein entsprechendes Erträgniss zu verschaffen. Wohl könnte der Capitalist auch mit dem Creditwerber directe in Verbindung treten, doch mangelt es ihm an der nöthigen Routine, die Creditfähigkeit desselben zu beurtheilen und er läuft daher Gefahr, einen Theil seines Capitales einzubüssen. Der Bankier hingegen bietet ihm genügende Sicherheit und

ie, indem er die Gefahr der Rückerstattung des Capitales auf sich auf diese Weise die Verbindung zwischen Creditgeber und Creditnehmer telnd.

Was das Wesen des bankmässigen Credites betrifft, so wohnt demselben Standpunkte seiner wirthschaftlichen Bedeutung eine höhere Function inne, he in der Specification des Credites nach Maassgabe des jeweiligen Bedürf-es des Creditsuchenden besteht. Der Bankier ist nämlich in der Lage aus fortlaufenden Beschaffenheit vieler kurzer Credite, wie selbe beim Depositen-schäfte vorkommen, für sich solche auf längere Zeit zu combiniren, welche er ieder anderweitig gewährt und umgekehrt nimmt er lange Credite in Anspruch, m sie in kurze Credite zu specificiren, auf dies Weise seinen Credit nach Maass-abe der Anforderungen umgestaltend.

Neben diesem Umstande liegt hauptsächlich in der vermittelnden Rolle des Bankiers zwischen dem Creditgeber und Creditnehmer, der Unterschied zwischen dem bankmässigen und privaten Credit. Während beim Privatcredit der Creditgeber das Risico und der Creditnehmer die Haftung übernimmt, wird beim bankmässigen Credit sowohl das Risico als auch die Haftung auf den Bankier überwälzt, welcher Kraft seiner Creditfähigkeit und Routine die Fähigkeit besitzt, beiden Anforderungen Rechnung zu tragen.

Der bankmässige Credit zerfällt vornehmlich in zwei Arten und zwar unterscheidet man den Personalcredit und den Pfandcredit. Der erstere beruht auf dem Vertrauen in den Zahlungswillen und auf der Zahlungsfähigkeit des Verpflichteten, während der letztere in der Sicherstellung der Verpflichtung durch ein Pfand gekennzeichnet ist. Ist nun dieses Pfand ein unbewegliches Gut, so wird der auf dasselbe gewährte Credit Hypothekar- oder Realcredit genannt, hingegen gestaltet ein im beweglichen Gute bestehendes Pfand, welches zur Sicherstellung eines Credites dient, diesen zu einem sogenannten Lombardcredit. Obzwar nun diese Bezeichnung im Allgemeinen für jeden gegen Faustpfand gewährten Credit angenommen wird, versteht man im bankmässigen Verkehre unter derselben insbesondere die Belehnung von Werthpapieren. Die beiden Arten des bankmässigen Credites, nämlich der Personalcredit und der Pfandcredit zerfallen nun nach ihrer speciellen Beschaffenheit in je zwei Kategorien, welche sich in folgender Weise zur Darstellung bringen lassen.

I. Personalcredit: 1. Das Escomptegeschäft; 2. der Contocorrentcredit.

II. Pfandcredit: 1. Der Hypothekarcredit; 2. das Lombardgeschäft.

Von besonderer Bedeutung für den gesammten Geschäftsverkehr ist das Wesen des Escomptegeschäftes. Dasselbe besteht in dem Kauf und Verkauf noch nicht fälliger Wechsel und ist einer der wichtigsten Geschäftszweige der Banken, welche auf diesem Wege in die Lage gesetzt werden, die ihnen auf kurze Zeit zur Verfügung stehenden Capitalien nutzbringend anzulegen. Das Wechselwesen, welches sich aus dem Buch- oder Waarencredit entwickelt hat, bildet in Folge dessen heute einen der Hauptpfeiler des allgemeinen Creditwesens. Mit Rücksich die Grundlage des Wechsels unterscheidet man zweierlei Arten desselbe oder Waarencredit beruhende Wechsel wird Geschäftswech

genannt, während derjenige, welcher eine solche Grundlage nicht besitzt und auf einer blossen Baarforderung basirt ist, einen Finanzwechsel bildet. Dieser letztere gründet sich lediglich auf das Vertrauen in die Person und gelangt in demselben der nackte Personalcredit zur Geltung. Was das Wesen des Wechsels anbelangt, so repräsentirt derselbe seiner Beschaffenheit gemäss eine Anweisung des Gläubigers an seinen Schuldner und bildet daher jenes Mittel, um eine nach einer bestimmten Periode fällige Baarforderung vor der Zeit zu realisiren, was naturgemäss nur gegen Gewährung entsprechender Zinsen (Discontozinsen) geschehen kann, welche je nach der Creditfähigkeit der für die Einlösung des Wechsels haftenden Personen, beziehungsweise Firmen auf Grund eines mehr oder weniger hohen Zinsfusses berechnet werden. Da nun mit Rücksicht auf die Beschaffenheit des Wechsels als Anweisung die Gefahr einer Fingirung desselben naheliegt, so erfordert dieses Geschäft eine besondere Vorsicht und Erfahrung, weshalb dasselbe hauptsächlich von Banken betrieben wird.

Der Wechselescompte, welcher im allgemeinen Geschäftsverkehre zu einem unentbehrlichen Bedürfnisse geworden ist und heute eines der wirthschaftlich bedeutendsten Glieder im Handelsbetriebe bildet, hat sich im Laufe der Zeit zu einem der wichtigsten Zweige des Bankwesens entwickelt, indem mit Hilfe desselben der Handelsmann in die Lage gesetzt wird, auf dem Wege des Wechselcredites durch eigene Giroverbindlichkeit seine Wechselforderungen zu escomptiren und auf diese Weise nicht nur seinen zeitweisen Geldbedarf zu decken, sondern auch seine an einen bestimmten Zeitpunkt gebundenen Verbindlichkeiten auf kurzem Wege zu ordnen. In dieser Beziehung ist die Institution der Creditvereine von besonderer Wichtigkeit. Dieselben beruhen auf der gemeinsamen Haftung der Mitglieder für die auf dem Wege des Wechselcredites hervorgerufenen Verluste, dieselben auf diese Art auf das allergeringste Maass herabdrückend, wodurch es auch dem minder capitalskräftigen Kaufmanne möglich wird, den Bankcredit in Anspruch zu nehmen. Die Creditvereine, welche in ihrer Organisation den gegenseitigen Wechselcredit bezwecken und den Wechsel-Escompte für ihre Mitglieder zu besorgen berufen sind, erfreuen sich in Folge dessen eines bedeutenden Zuspruches von Seite der Handelswelt und haben sich in ökonomischer Beziehung eine Position erobert, welche geeignet ist, dieselben zu einer der wichtigsten Institutionen des Creditwesens zu kennzeichnen, da in denselben eine der Hauptschlagadern des wirthschaftlichen Verkehres mündet, auf diese Weise eine Verbindung des Waarenmarktes mit dem grossen Geldmarkte herstellend.

Eine weitere Form des modernen Personalcredites ist der Contocorrentcredit. Derselbe ist mit dem Depositengeschäfte enge verbunden und hat sich aus diesem herausgebildet, indem der Deponent anstatt die Beträge, welche er zu Zahlungen bedurfte, der Bank zu entnehmen und dieselben selbst ihrem Zwecke zuzuführen, die Bank directe mit dieser Commission betraute, wodurch diese Procedur vereinfacht wurde. Auf diese Art entwickelte sich in der Geschäftswelt die Gepflogenheit, die Depositenbanken als Zahlungs- und Incassostellen zu benützen. Die fortlaufende Rechnung, welche über das Depot geführt wird, ist

dementsprechend mit dem Namen des Contocorrente gekennzeichnet und repräsentirt die Verrechnung aller Zahlungen und Eincassirungen, welche im Auftrage des Deponenten von der Bank auf das Depositenconto durchgeführt werden. Ein Biancocredit, d. h. ein Credit ohne Effectivguthaben, kommt nur in England und Nordamerika häufiger vor. In demselben ist das Wesen des Personalcredites im weitesten Sinne zum Ausdrucke gebracht und bildet gewissermaassen die Grenze der individuellen Creditfähigkeit.

Die wahre Bedeutung des Personalcredites muss im kaufmännischen Sinne gewürdigt werden, um seinen ungeheueren Einfluss auf das Wesen des Handels ermessen zu können; sein Vorhandensein bedeutet den Aufschwung, sein Schwinden den Niedergang in volkswirthschaftlicher Beziehung und wird derselbe daher als Massstab der ökonomischen Verhältnisse betrachtet.

Eine nicht minder wichtige Creditart bildet neben dem Personalcredit der Pfandcredit. Dieser basirt auf der Belehnung von beweglichen und unbeweglichen Gütern und hat mit der Person des Creditnehmers nichts zu schaffen, indem die Creditfähigkeit desselben hier ganz ausser Betracht kommt. Der Credit wird gewährt auf Grundlage des in Pfand gegebenen Werthobjectes, welches allein die Erfüllung der Verpflichtungen gewährleistet, indem mit diesem der schuldige Betrag sichergestellt wird.

Von hervorragender wirthschaftlicher Bedeutung ist in dieser Beziehung der bankmässige Pfandcredit auf unbewegliche Güter, der sogenannte Boden- und Hypothekarcredit. Das Wesen desselben besteht in der Gewährung von Darlehen gegen Verpfändung von Realbesitz. Die an gesetzliche Formalitäten gebundene Art jedoch, in welcher ein derartiges Schuldverhältniss rechtskräftig zur Geltung gebracht werden muss und die Umstände, welche die richtige Beurtheilung der Sicherstellung durch den Realbesitz erschweren, machen die bankmässige Vermittlung zwischen dem Capitalisten und Creditbewerber nothwendig.

Wie bei jedem Pfandcredit muss auch hier die Sicherstellung stets dem gewährten Credite angemessen sein, so dass allen Bedingungen der Sicherheit vollends Rechnung getragen ist.

Hier gelangt also der sonst variable Factor der Securität nicht in Combination, so dass von einem Risico im gegebenen Sinne hier nicht die Rede sein kann. Deshalb wollen wir uns mit Bezug auf die gegebene Frage blos mit jenem Credite befassen, welcher als Personalcredit in Betracht kommt und auf dem Vertrauen in den Zahlungswillen, beziehungsweise auf der Zahlungsfähigkeit des Verpflichteten beruht; d. h. also mit jenem Credite, bei welchem die Sicherheit ein variabler, von mehreren gleichfalls veränderlichen Umständen abhängiger Factor ist.

Unsere diesbezüglichen Untersuchungen werden sich daher hauptsächlich darauf beschränken, jene variablen Umstände beim Bankcredit in ihrem Wesen zu kennzeichnen, welche auf den Zinsfuss als Function der officiellen Bankrate und der jeweiligen Securität einen Einfluss besitzen.

Mathematische Untersuchungen über die qualitative Beschaffenheit eines Versicherungsstockes.

II.

In der vorigen Abhandlung gelangten wir zu der Conclusion, dass jenes durch das Verhältniss der Prämienreserve-Summe zur Gesammtversicherungssumme ausgedrückte Maass von Superrisico, welches sich in der später erforderlichen Mehrleistung der Anstalt gegenüber der Nettoprämien-Einnahme äussert, stets in angemessenem Verhältnisse zur Dauer der Anstaltsthätigkeit stehen muss.

Uebersteigt das Superrisico das entsprechende Maass, so ist daraus zu schliessen, dass die jüngeren Versicherungen nicht in der erforderlichen Weise vertreten sind, dagegen die älteren Versicherungen die zulässige Anzahl im Verhältnisse zu den ersteren übersteigen. Damit ist aber auch der Mangel an der nöthigen Selection zum Ausdrucke gebracht, da in Folge unzureichenden Neuzuganges das Durchschnittsalter der Versicherungen naturgemäss ein relativ zu hohes wird. Erreicht jedoch das Superrisico das entsprechende Maass nicht, so ist wohl mit Rücksicht auf die überwiegende Jugend der Versicherungen auf eine günstige Selection zu schliessen, doch vermag der Versicherungsstock in Folge seiner solchermaassen zum Ausdrucke gelangenden geringen Stetigkeit nicht, sich genügend zu entwickeln und dergestalt jenen Anforderungen Rechnung zu tragen, welche das Princip der grossen Zahlen an denselben stellt.

In beiden Fällen wird also die qualitative Beschaffenheit des Versicherungsstockes eine mehr oder weniger ungünstige sein, da sowohl nach der einen wie nach der anderen Richtung hin das Missverhältniss in der Vertheilung der Risken nach Altersclassen sich in unvortheilhaftem Sinne geltend macht und das Wesen der Prämienreserve als eigentliches Guthaben der Versicherten gelangt von diesem Gesichtspunkte aus sehr richtig zum Ausdrucke, indem deren relativ unverhältnissmässiges Ausmaass mit einer geringen Entwicklung des Versicherungsstockes, beziehungsweise mit einer irationellen Gestaltung desselben Hand in Hand geht. Die wichtigste Bedingung für die gute qualitative Beschaffenheit eines Versicherungsstockes ist also die relativ angemessene Höhe des rechnungsmässigen Guthabens der Versicherten, d. i. die entsprechende verhältnissmässige Prämienreserve mit Rücksicht auf die Höhe des Versicherungsstockes und die Dauer der Anstaltsthätigkeit.

Wenn wir hier von einer relativ angemessenen Prämienreserve-Summe sprechen, so ist selbstverständlich damit die nach den strengen Principien der Versicherungstechnik ermittelte rechnungsmässige Prämienreserve gemeint.

Dort wo die Berechnung der Prämienreserve auf Grund einer theilweisen Capitalisirung der Prämienzuschläge (Zillmer'sche Methode) in An-

wendung kommt, ist dieses Calcul für die Beurtheilung des Versicherungsstockes nur dann anwendbar, wenn die Höhe der in Betracht kommenden capitalisirten Prämienzuschläge bekannt ist. Im entgegengesetzten Falle ist es nicht möglich, an die Beschaffenheit eines Versicherungsstockes den rechnungsmässigen Maassstab anzulegen, da etwaige Mängel in dieser Hinsicht, welche aus dem Verhältnisse der Prämienreserve-Summe zur Gesammtversicherungs-Summe unter Berücksichtigung der Dauer der Anstaltsthätigkeit einerseits und der Sterblichkeit andererseits entspringen, nur unter Beobachtung jener Merkmale wahrzunehmen sind, welche die rechnungsmässige Ermittlung der Prämienreserve nach reinen Nettoprämien liefert. Ist daher die Höhe der bei der Berechnung in Betracht kommenden capitalisirten Prämienzuschläge bekannt, so lässt sich die bezügliche Prämienreserve auf jene nach reinen Nettoprämien berechnete zurückführen und man erhält auf diese Weise die erforderliche Basis für die Beurtheilung des Versicherungsstockes nach dessen Qualität.

Was die Anwendung der Zillmer'schen Methode überhaupt betrifft, so ist dieselbe versicherungstechnisch durchaus nicht so ungerechtfertigt, als dies von mancher Seite hingestellt wird, insbesondere wenn die Capitalisirung der Prämienzuschläge den Zweck einer temporären Anleihe behufs Deckung der Abschlussprovision in sich schliesst und nach dieser Richtung hin eine entsprechende Begrenzung findet.

Besonders verhält sich Karup in seinem „Handbuch der Lebensversicherung“ diesbezüglich durchaus ablehnend, indem er sich hierüber folgendermaassen äussert:

„Nach der Methode der Prämienreserve-Berechnung mit ganzer oder theilweiser Capitalisirung der Prämienzuschläge vermindert man die Prämienreserve um den gegenwärtigen Werth sämmtlicher oder eines Theiles der künftighin für eine jede Versicherung zu erwartenden Zuschläge, wodurch dieselbe selbstverständlich bedeutend kleiner ausfällt. Bei der Prämienreserve-Berechnung mit Capitalisirung sämmtlicher Prämienzuschläge, oder wie selbe auch genannt wird, die Berechnung nach Bruttoprämien, geht man von dem Gedanken aus, dass eine Versicherung nach ihrem Abschlusse keine weiteren Verwaltungskosten verursacht. Das Irrige in einer derartigen Voraussetzung und somit auch in dieser Prämienreserve-Berechnungsmethode näher zu erörtern, dürfen wir wohl als überflüssig ansehen, sie geht streng genommen auf nichts anderes aus, als dass die mit den älteren Versicherungen verbundenen Kosten durch den steten Zugang neuer Versicherungen gedeckt werden sollen. Eine Gesellschaft, welche die Berechnungsweise der Prämienreserve nach Bruttoprämien adoptirt hat, wird deshalb stets durch die fieberhaftesten Anstrengungen neue Versicherungen zu acquiriren suchen, aber gerade durch die wachsende Zahl der laufenden Versicherungen wächst das Deficit.“

In dieser Hinsicht erklären wir uns selbstverständlich mit Karup vollständig einverstanden, dagegen stimmen wir mit seinen Ansichten hinsicht-

lich einer bescheidenen theilweisen Capitalisirung der Prämienzuschläge (Zillmer'sche Methode) durchaus nicht überein. Karup lässt nämlich in dieser Frage keinen Unterschied gelten und sagt weiter:

„Ebenso verwerflich, als die Berechnung der Prämienreserve nach Bruttoprämien, ist dem Principe nach die Ermittlung derselben bei theilweiser Capitalisirung der Prämienznschläge oder nach der sogenannten Zillmer'schen Methode, von welcher die Berechnungsweise nach Bruttoprämien nur einen speciellen Fall bildet. Gewöhnlich ist es die dem Agenten für die neu erworbene Versicherung gezahlte Abschlussprovision, welche man, anstatt selbe nach und nach durch die der Bank anheimfallenden Prämienzuschläge zu tilgen, respective ganz offen auf das Conto vorausbezahlter Provisionen zu schreiben, von dem Eigenthum der Versicherten, der Prämienreserve widerrechtlich kürzt. Zwar bildet man sich ein, es werde ein Theil des künftighin von dem Versicherten zu zahlenden Zuschlages nach Abzug der laufenden Verwaltungskosten übrig bleiben, durch welche sich dann die Prämienreserve allmälig auf die richtige Höhe bringen lässt; indessen sind bei denjenigen Banken, die nach dieser Methode vorgehen, die Abschlussprovisionen und die übrigen Verwaltungskosten in der Regel so hoch, dass der von dem Zuschlage erübrigte Theil viel zu gering ausfällt, um die bei der Prämienreserve gemachte Anleihe tilgen zu können.“

Karup muss hier also viel zu hohe Abschlussprovisionen und Verwaltungskosten voraussetzen, um zu dem Schlusse zu gelangen, dass die Wiederherstellung der Prämienreserve auf ihre richtige Höhe nur in seltenen Fällen eintrifft. Als ob eine Anstalt, welche die Berechnung der Prämienreserve nach streng versicherungstechnischen Grundsätzen vornimmt, nicht aus der gleichen Ursache nothleidend werden könnte, insbesondere wenn sie in Folge minder rigoroser Auswahl ihrer Versicherungen mit einer hohen Uebersterblichkeit zu kämpfen hat. Die rechnungsmässige Prämienreserve vermag stets nur dann den Anforderungen zu entsprechen, wenn die wirkliche Mortalität der Versicherten mit jener der zugrunde gelegten Sterbetafel übereinstimmt. Es ist eben nur unter allen Umständen nothwendig, die Principien einer rationellen Geschäftsgebahrung aufrechtzuerhalten und es ändert nichts an einer solchen, wenn die successive Tilgung einer im Vorhinein zu Provisionszwecken in Anspruch genommenen mässigen Quote, deren Deckung durch den Prämienzuschlag verbürgt ist, stipulirt wird. Die Organisationskosten während der beginnenden Anstaltsthätigkeit drängen sich im Allgemeinen auf die ersten Betriebsjahre zusammen und es ist nur gerecht, wenn man an diesen Kosten auch die späteren Versicherten entsprechend participiren lässt. Denn die Frage, wer mit dem Aufwande an Erwerbskosten zu belasten sei, ist längst durch den Umstand beantwortet, dass auch die Ueberschüsse der Gesellschaften den Versicherten zugute kommen. Dies gilt sowohl für die Anstalten auf Gegenseitigkeit, als auch für die Actiengesellschaften, welch' letztere ihre Versicherten im Wege der steigenden Dividende am Geschäftsgewinne theilnehmen lassen, indem das

Bestreben derselben darauf gerichtet ist, die Bevölkerung zur Versicherung aufzumuntern. Nur unter der Voraussetzung, dass der Versicherte am Geschäftsgewinne nicht betheiligt ist, welcher Fall derzeit in der Praxis nur selten vorkommt, soll die Gesellschaft auch die Kosten für die Anwerbung der Versicherungen tragen. Dieselben sind auf das Conto der Allgemeinen Geschäftskosten zu stellen, denn der Versicherte ist nicht dazu berufen, das Erträgniss der Actionäre einer Gesellschaft durch etwaige zu gewährende Vorschüsse zu fördern. Aber noch ein anderer Umstand spricht für die Zulässigkeit der Zillmer'schen Methode. Es ist dies ein versicherungstechnisches Argument, welches im Wesen des Systemes der gleichmässigen Jahresprämien seinen Ursprung hat.

Es ist für dieses System von wesentlicher Bedeutung, dass ein und dieselbe Person, welche sich in verschiedenen Altersperioden auf gleich grosse Beträge versichert, für jede einzelne Versicherung unterschiedliche Prämien entrichten muss. Je älter diese Person wird, desto grösser wird das Risico, welches die Versicherungsbank mit der Versicherung derselben eingeht, und desto höher muss auch die entsprechende, jährlich gleichmässig zu leistende Prämie sein. Es frägt sich nun, in welchem Verhältnisse diejenigen Prämien sich zu einander befinden, welche den in verschiedenen Lebensperioden ein und derselben Person abgeschlossenen Versicherungen entsprechen. Versichert sich eine Person in verschiedenen Lebensperioden, so wird dieselbe bei jeder einzelnen Versicherung mit ihrer je gleichmässig zu entrichtenden Prämie jeweilig für das spätere, durch das höhere Risico bedingte Mehrerforderniss aufkommen müssen, welches sich desto früher einstellen wird, je höher deren Lebensalter zur Zeit des Versicherungsabschlusses war. Da dieselbe nun mit ihrer Prämie zu Beginn der Versicherung so viel an Reserven ansammeln muss, als in späteren Jahren zur Ergänzung derjenigen Erfordernisse nothwendig ist, welche aus der Unzulänglichkeit der gleichmässigen gegenüber den steigenden Prämien resultiren, so wird in der capitalisirten Prämiendifferenz einer früher zum Abschlusse gelangten, und jener im späteren Alter eingegangenen Versicherung diejenige Prämienreserve sich bergen, welche vom Zeitpunkte des ersten Versicherungsabschlusses bis zum Zeitpunkte des zweiten sich angesammelt hat und welche für die zweitabgeschlossene Versicherung durch die höher zu leistende Prämie hereingebracht werden muss, um ein mit der ersteren gleiches, späteres Mehrerforderniss decken zu können.

Thatsächlich erfolgt also die Ansammlung eines Theiles der Prämienreserve bei einer später abgeschlossenen Versicherung im Gegensatze zu derjenigen einer früher abgeschlossenen, durch langsame Tilgung. Es handelt sich daher im Principe des gebräuchlichen versicherungstechnischen Systemes stets nur darum, dass die volle Prämienreserve in dem Momente vorhanden sein müsse, wo sie zur Deckung des eingetretenen Superrisicos erforderlich wird. Diesen Umstand dürfte denn auch Zillmer im Auge gehabt haben, als er seine diesbezügliche Methode aufstellte.

Ueber das Wesen des Zinsfusses beim bankmässigen Credit.

II.

Der Capitalszins findet seine sociale Rechtfertigung in der Rolle, welche die Zeit in der Volkswirthschaft spielt. Während der Besitzer des Capitales auf dessen Verwendung verzichtet, vermag der Schuldner aus demselben einen Nutzen zu ziehen, dessen Grösse mit der Zeit der Verwendung zunimmt. Ein unverzinsliches Darlehen ist denn auch, wie Knies richtig bemerkt, einer verschenkten Capitalsnutzung gleich zu achten und der Capitalszins ist also die Vergütung für die überlassene Capitalsnutzung. Mit der Ueberlassung der Nutzung eines Capitales ist jedoch auch die Gefahr eines etwaigen Verlustes verbunden, welche eine entsprechende den Besitzer des Capitales entschädigende Risicoprämie erheischt. Dieselbe ist theils von allgemeinen Umständen, die in der Rechtssicherheit und sonstigen Verhältnissen zum Ausdrucke gelangen, theils von bestimmten, nur in dem besonderen Falle auftretenden Bedingungen, wie Zahlungsfähigkeit und Vertrauenswürdigkeit der Person, abhängig. Auf diese Weise wird neben dem Ausmaasse der Vergütung für die überlassene Capitalsnutzung dasjenige der Risicoprämie die Höhe der Zinsen beeinflussen. Häufig werden die Verlustchancen unterschätzt, während die Neigung zur Ueberschätzung derselben eintritt, sobald Verluste an der Tagesordnung sind und eine allgemeine Panik hervorrufen, wodurch der Zinsfuss oft eine ungerechtfertigte Höhe erreicht. Im Allgemeinen wird jedoch bei minder vorgeschrittenen Völkern der Zinsfuss höher sein, als bei solchen, welche auf einer höheren Stufe der Wirthschaft und Cultur stehen. Das Ausmaass der Vergütung für die überlassene Capitalsnutzung hängt im Allgemeinen von der Nachfrage und dem Angebote ab. Insbesondere hinsichtlich jenes Credites, welcher auf dem Zahlungswillen, beziehungsweise auf der Zahlungsfähigkeit des Schuldcontrahenten beruht, unterliegt dieses Ausmaass einer besonderen Veränderlichkeit, da die Bedingungen desselben in den stetig wechselnden Strömungen des wirthschaftlichen Verkehres liegen. Der wichtigste Zweig des Personalcredites, der Wechselescompte, steht in engster Verbindung mit den Wirkungen, welche diese Strömungen auf dem Weltmarkte hervorrufen.

Die mobilen Geldmittel der Banken unterliegen in ihrem Umfange ebenso einer Veränderlichkeit, wie diejenigen der allgemeinen Speculation, da die Bankinstitute blos als vermittelnde Factoren zwischen ihren Creditoren und Debitoren fungiren. Im Laufe des Jahres gibt es gewisse Zeitperioden, in welchen der allgemeine Bedarf an Baargeld eine ausserordentliche Ausdehnung gewinnt. Fällt nun derselbe mit einem jener Zeitpunkte zusammen, in welchem die Zinsen der Anlagewerthe in grösserem Umfange fällig werden, dann wird der Mehrbedarf an Umlaufsmitteln durch die flüssig werdenden Capitalien

ier weniger ausgeglichen. Anders verhält es sich jedoch ausserhalb lchen Zeitpunktes, wo der öffentliche Geldverkehr auf die Capitals- ler Bankinstitute angewiesen ist, indem dieselben zu Lombard- und ptezwecken in Anspruch genommen werden. Abgesehen davon, n einer solchen Periode auch ein anderweitiges Abströmen der den nstituten zur Verfügung stehenden Mittel, wie da sind Spareinlagen, lepôt u. A. m. stattfindet, kommen noch jene Factoren in Betracht, he bei allgemeiner Geldknappheit das Flüssigmachen engagirter Capitalien hweren. Unter solchen Umständen treten daher an ein Institut An- lerungen heran, welche geeignet sind, die finanzielle Leistungsfähigkeit les solchen in ausserordentlicher Weise in Anspruch zu nehmen, weshalb orsorge getroffen werden muss, um Verlegenheiten, welche sich aus einer llzustarken Inanspruchnahme der Bankmittel ergeben können, zu verhüten.

Es muss daher an eine Art Reserve gedacht werden, welche meistens darin besteht, dass ein Theil der Capitalien derart investirt ist, dass derselbe ohne Verlust rasch in baares Geld umgesetzt werden kann. Eine derartige leicht reducirbare Capitalsinvestition ist der bankmässige Wechselescompte. Ein Institut, welches in seinem Portefeuille eine entsprechende Anzahl bankfähiger Wechsel besitzt, kann dieselben ohne Schwierigkeiten durch Reescompte in Baargeld umsetzen, indem sie dieselben mit ihrem Giro versieht. Nun wirft sich unwillkürlich die Frage auf, wie es möglich ist, angesichts einer grösseren Geldknappheit, während welcher alle Bankinstitute und sonstige Finanzkräfte gleich stark in Anspruch genommen sind, durch Reescompte auf so leichte Weise sich Geld zu beschaffen. Da der Bedarf eines grösseren Geldumlaufes nur durch die Mehrausgabe einer entsprechenden Menge an Geld beziehungsweise Noten gedeckt werden kann, so laufen alle Fäden des Geldmarktes jeweilig dort zusammen, wo die Notenausgabe erfolgt. Das Noteninstitut besitzt nun gewisse Verpflichtungen, welche angepasst den wirthschaftlichen Bedürfnissen des Staates, bestimmt sind, das Creditwesen im Innern desselben zu ordnen. Zu diesen gehört neben der Cultivirung des Porsonalcredites die Belehnung von Warrants, der Lombard und des Escomptewesen, sowie auch andere den Credit fördernde Institutionen. Im Falle eines grösseren Geldbedarfes strömt daher derjenige Theil des bankfähigen Wechselmateriales, welcher bestimmt ist, die Baarmittel der Banken zu ergänzen, zum Reescompte in die Notenbank, welche von ihrem Rechte der Notenemission Gebrauch machend, den Bedürfnissen Rechnung zu tragen in der Lage ist. Das Privatcapital kann also jederzeit von dieser Einrichtung Gebrauch machen und sich gegen gute Wechsel Geld beschaffen. Auf diese Weise bildet daher das Wechselportefeuille einer Bank eine jederzeit leicht flüssig zu machende Reserve. Doch auch hier gibt es eine gewisse Grenze, welche von einem Privatbankinstitute nicht überschritten werden darf, ohne einiges Bedenken der öffentlichen Meinung hervorzurufen, denn es wird offenbar dessen Creditfähigkeit in dem Momente gefährdet, als wahrgenommen werden kann, dass die Mittel desselben auf längere Zeit festgerannt sind

Aber auch von Seite des Noteninstitutes müssen im eventuellen Falle Maassnahmen ergriffen werden, um eine übermässige Inanspruchnahme der Circulationsmittel hintanzuhalten, da in einer solchen die Symptome einer beginnenden Ueberspeculation zu erblicken sind. Die von der Bank ausgegebenen Noten repräsentiren Schuldscheine derselben, deren Einlösung jederzeit durch den entsprechenden Metallwerth erfolgen muss. Das Institut ist daher bemüssigt, in Bezug auf die Notenausgabe ebenfalls eine bestimmte Grenze einzuhalten, über welche hinaus es sich nicht engagiren darf. Dieselbe besteht bei den Notenbanken derjenigen Staaten, welche Goldwährung besitzen, in einem mit der Staatsverwaltung vereinbarten zum durchschnittlichen Notenumlauf in einem bestimmten Verhältnisse stehenden Bedeckungsminimum in Gold, nebst einer fixirten Baarreserve, deren Niveau jederzeit aufrechterhalten werden muss. Deshalb müssen diese Noteninstitute sich gegen eine, durch allzustarken Goldabfluss hervorgebrachte Schmälerung ihrer Baarreserve dadurch schützen, dass sie ihren Discontzinsfuss im gegebenen Falle entsprechend erhöhen, was naturgemäss eine gleiche Maassregel der Privatbanken nach sich ziehen muss. Die Erhöhung des Bankzinsfusses tritt also dann ein, wenn der allgemeine Creditanspruch aus dem Rahmen der Zulässigkeit auszutreten beginnt und bildet daher eine solche Maassnahme ein Ventil, welches in Function tritt, sobald die Anspannung der wirthschaftlichen Kräfte besorgnisserregende Dimensionen annimmt. Diese Maassregel ist also berufen, den Reescompt des einlaufenden Wechselmateriales zu erschweren und auf diese Weise jene, aus etwaiger Ueberspeculation entspringenden Creditansprüche einzudämmen.

Die Escomptebanken repräsentiren eine den Bedürfnissen des Handelscredites Rechnung tragende Form des Bankwesens. Dieselben haben sich im Laufe der Zeit zu einer vollständigen Form des Bankbetriebes erst herausgebildet, nachdem lange vorher die eigentliche Thätigkeit derselben, der Wechselescompte in den Händen von Privatcapitalisten sich befunden hatte und später von den Giro- und Depositenbanken als Nebenzweig cultivirt worden war. Erst als die Notenbanken durch staatliche Privilegien ausgestattet, die Pflicht übernahmen, den Handelscredit durch entsprechende Einrichtungen zu fördern und auf diese Weise die Weiterbegebung (Reescompte) der Wechsel unter günstigen Bedingungen möglich war, wurden selbstständige Discontobanken in's Leben gerufen, welche wohl auch andere Geschäfte betreiben, sich jedoch mit diesem speciellen Zweige des Bankwesens besonders befassen, mit der Förderung des Wechselcredites eine entsprechende Verzinsung ihres Capitals verbindend und im Falle knapper Geldmittel aus der Differenz zwischen den erzielten Discontzinsen und den zu leistenden Reescomptzinsen ihren Gewinn ziehend. Durch Mithaftung der Escomptebank für die der Notenbank zum Reescompte eingereichten Wechsel, werden dieselben zu ersten Sicherheiten gestempelt.

Da die Beziehungen der Handelstreibenden aller Culturvölker in der Gegenwart sehr innige sind, so beeinflussen die verschiedenen Länder

einander in Bezug auf die Höhe des Disconts. Vollkommene Gleichheit aber findet nicht statt, da doch die Capitalisten regelmässig der Anlage im eigenen Lande den Vorzug geben, abgesehen davon, dass Capitals-Uebertragungen von einem Lande in ein anderes stets mit gewissen Kosten wegen der Entfernung und der Verschiedenheit der Münzsysteme verknüpft sind. Die wichtigsten Disconteure sind die grossen Notenbanken und diese haben die gesetzliche Verpflichtung, den Satz, zu welchem sie discontiren (Bankdiscont, Bankzinsfuss, Bankrate) öffentlich bekannt zu geben. Die Veränderungen, die hier eintreten, charakterisiren die allgemeinen Schwankungen des Discontsatzes, da auch diese grossen Anstalten den Verhältnissen am offenen Markte sich anbequemen müssen. Aenderungen des Discontsatzes bilden für dieselben eine wichtige Handhabe, um ein richtiges Verhältniss zwischen Baarvorrath und Crediten herzustellen, indem mit einer Erhöhung des Discontsatzes, wie sie in kritischen Zeiten am Platze ist, weniger Wechsel zur Discontirung gegen Noten und Münze angeboten werden. Auch wird auf diese Weise den Anzapfungen (drains), d. h. Metallentnahmen für Zwecke der Ausfuhr, vorgebeugt und da überdies in diesem Falle mehr Noten zur Einlösung präsentirt werden, so wächst die sogenannte Banknotenreserve, d. h. der Betrag an nicht ausgegebenen Noten, deren Ausgabe gesetzlich zulässig oder durch Besteuerung nicht erschwert wird.

Solchermaassen erfährt der Zinsfuss beim Personalcredit, den jeweiligen Verhältnissen des Geldmarktes entsprechend, eine Regelung. Derselbe wächst mit der steigenden Nachfrage nach Baarmitteln und sinkt mit dem steigenden Angebote derselben. Der sogenannte officielle Bankzinsfuss ist aber durchaus nicht als bindend für den Discontozinsfuss des kaufmännischen Wechsels im Allgemeinen anzusehen. Derselbe bildet für die Notenbank blos die jeweilige Grenze nach unten für den Discontosatz erstclassiger Wechsel. Die Privatbanken, welche sich mit dem Escompte befassen, beurtheilen den kaufmännischen Wechsel nach der Zahlungsfähigkeit und Vertrauenswürdigkeit des Schuldners, beziehungsweise seiner Giranten, und bemessen darnach den Discontosatz, welcher sich unter dem Bankzinsfusse bewegen kann oder je nach der in Betracht kommenden Risicoprämie in mehr oder minder hohem Maasse denselben übersteigt. Erst durch den eigenen Giro der Privatbank wird einem jeden solchen Wechsel, welcher nicht an und für sich erster Qualität ist, die Bankfähigkeit verliehen, auf Grund welcher der Reescompte desselben bei der Notenbank erfolgen kann. Das directe Risico übernimmt also in diesem Falle die Privatbank, indem sie sich durch den höheren Discontozinsfuss hiedurch schadlos zu halten sucht. In der höheren Bemessung des Discontosatzes gegenüber dem officiellen Bankzinsfusse liegt also das Maas der Risicoprämie, welche mit Rücksicht auf die mindere Securität eines jeden nicht unzweifelhaft erstclassigen Wechsels in Betracht kommt. Von diesem Gesichtspunkte aus muss denn auch das Wesen des Zinsfusses als Function der Securität des Darlehens beurtheilt werden.

Mathematische Untersuchungen über die qualitative Beschaffenheit eines Versicherungsstockes.

III.

Der in der vorigen Abhandlung hervorgehobenen Umstand der langsameren Ansammlung der Prämienreserve bei einer später abgeschlossenen Versicherung gegenüber derjenigen einer früher abgeschlossenen fällt besonders bei kurzlebigen Personen in's Gewicht. Dies äussert sich in praktischer Hinsicht folgendermaassen:

Versichert sich zum Beispiel eine Person das erste Mal im 30. Lebensjahre und das zweite Mal mit dem 35. auf den gleichen Betrag, so wird dieselbe für die letztabgeschlossene Versicherung eine höhere Prämie zu entrichten haben. Die capitalisirte Differenz dieser beiden Prämien vom 35. Lebensjahre bis zum Ableben gerechnet muss nun so viel betragen, als bei der ersten Versicherung vom 30. bis zum 35. Lebensjahre an Prämienreserve angesammelt wurde, wenn bei der zweiten Versicherung das spätere, durch ein höheres Risico bedingte Mehrerforderniss in der gleichen Weise gedeckt sein soll, wie bei der ersteren. Es müsste also, da sich dieses Erforderniss für ein und dasselbe Risico gleich bleiben muss, die zweite, im 35. Lebensjahre abgeschlossene Versicherung ebenso auf Grund einer dem 30. Lebensjahre entsprechenden jährlichen Prämie stipulirt werden, der Versicherte aber zugleich die zwischen dem 30. und 35. Lebensjahre angesammelte Prämienreserve an die Anstalt im Vorhinein entrichten, wenn für beide Versicherungen dem gleichen Principe Rechnung getragen werden soll.

Das Guthaben des Versicherten zu einer bestimmten Zeit, wird also für die erstabgeschlossene Versicherung ein grösseres als für die zweitabgeschlossene sein. Dies entspricht nun vollends den Anforderungen, wenn man in Betracht zieht, dass die Prämie für die zweite Versicherung eine höhere ist, als für die erste und in Folge dessen länger ausreicht, um das steigende Risico zu decken, daher auch die Heranziehung der Prämienreserve zur Ergänzung derselben zu dem gleichen Zwecke, im selben Verhältnisse später erfolgt, als die Frist zwischen dem ersten und zweiten Versicherungsabschlusse eine längere ist. Je mehr aber der Versicherte der mittleren Lebensdauer seiner Altersclasse näher kommt, desto geringer wird die Differenz der Guthaben aus den beiden Versicherungsabschlüssen. Das Risico, welches die Versicherungsbank für die erstabgeschlossene Versicherung vom Zeitpunkte des zweiten Abschlusses weiterhin zu tragen hat, ist jedoch das Gleiche welches ihr aus der zweitabgeschlossenen Versicherung erwächst und dennoch erreicht die beziehungsweise Gegenleistung für die letztere erst mit dem Erleben eines mittleren Alters die gleiche Höhe wie für die erstere.

Stirbt also der Versicherte vorzeitig, so entzieht er sich der successiven Nachtragung dieser Prämienreserve-Quote für die später abgeschlossene Versicherung, so dass sich die Versicherungsbank mit Rücksicht auf die früher abgeschlossene relativ im Nachtheile befindet. Da die jährliche Mehrleistung einer später versicherten Person bekanntlich in der Annuität zur Tilgung der angesammelten Prämienreserve einer gleichalterigen früher versicherten besteht, so ist bei gleichbleibender jährlichen Annuität der Umstand maassgebend, dass anfangs der grösste Theil derselben auf die Zinsen- und nur ein kleiner Theil auf die Tilgungsquote entfällt, und erst in späteren Jahren, wenn die Zinsen in Folge der theilweise vollzogenen Tilgung bereits abgenommen haben, die weitere Tilgung rascher vor sich geht. Daraus ergibt sich, dass eine nach kurzer Versicherungsdauer verstorbene Person die nachzutragende Prämienreserve nicht viel mehr als verzinst hat, also der Anforderung einer Tilgung derselben nicht nachgekommen ist. Wir gelangen daher zu dem Schlusse, dass die Gesammtleistung der Versicherten wohl eine derartige ist, um die Gegenleistung der Versicherungsbank im Allgemeinen zu decken, jedoch ein Missverhältniss in den Leistungen der einzelnen Versicherten besteht, welches in der relativen Bevorzugung eines kurzlebigen später Versicherten, gegenüber einem solchen früher Versicherten seinen Ausdruck findet. Dieser Anomalie wird wohl durch das Sytem des steigenden Gewinnantheiles in gewisser Hinsicht abgeholfen, doch ändert dies nichts an der Thatsache, dass jene für eine später abgeschlossene Versicherung entfallende zeitliche Prämienreserve-Quote bis zu jenem mittleren Alter gestundet wird, in welchem dieselbe zur Deckung des gegenüber der Prämien eingetretenen Superrisicos herangezogen werden muss. Die Stundung der Prämienreserve bis zum Zeitpunkte, deren Heranziehung zur Deckung des Superrisicos bildet also die Voraussetzung des versicherungstechnischen Systems selbst und ist im Wesen desselben begründet. Den Credit aber, welchen die Versicherungsbank dem Versicherten gewährt, darf sie innerhalb der zulässigen Grenzen auch für sich in Anspruch nehmen, insoferne sie sich verpflichtet, bis zum Zeitpunkte des Bedarfes das contrahirte Darlehen vollständig zu tilgen, für dessen Sicherheit sie übrigens mit jenen besonderen Einnahmen bürgt, über welche sie sonst das Recht hat, frei zu verfügen.

Das zulässige Ausmaass, des zu Provisionszwecken etwa in Anspruch zu nehmenden Darlehens, ist abhängig von dessen jeweilig in Betracht kommenden, mit dem Alter der Versicherten im Zeitpunkte ihres Beitrittes im umgekehrten Verhältnisse stehenden Tilgungsdauer, unter Berücksichtigung der Höhe des stipulirten Verwaltungskosten-Zuschlages zur Nettoprämie, beziehungsweise dessen effectiven Ueberschusses nach Bestreitung jenes für die regelmässigen Verwaltungskosten jährlich erforderlichen Aufwandes. Die Annuität des Darlehens muss demgemäss nach Maassgabe der versicherungstechnisch sich ergebenden mittleren Tilgungsfrist unter allen Umständen in jenem Theile des Verwaltungskosten-Zuschlages, welcher von den laufenden Bedürfnissen nicht absorbirt wird, seine Deckung finden.

Wenn Zillmer die Grenze für dieses Darlehen mit $12^1/_2$ per Mille der Versicherungssumme festsetzt, so geht er von dem Gesichtspunkte aus, dass dieses Ausmaass die durchschnittliche erstjährige Prämienreserve aller versicherungsfähigen Alter bei der Todesfallversicherung nicht überschreitet. Auf Grund dessen erscheint die Prämienreserve-Ansammlung thatsächlich im Durchnitte blos um ein Jahr hinausgeschoben.

Uebergehen wir nun wieder zu unserem eigentlichen Thema der Untersuchung der qualitativen Beschaffenheit eines Versicherungsstockes. In dieser Hinsicht bildet also die nach der vollen Nettoprämie ermittelte Reserve den Maassstab für die Beurtheilung, indem das in Betracht kommende Superrisico, welches durch das Verhältniss der jeweilig angesammelten Reserve zur gesammten Versicherungssumme gekennzeichnet wird, unter Berücksichtigung der Bestandesdauer der Versicherungsanstalt rechnungsmässig darüber Aufschluss gibt, ob und inwiefern die im Versicherungsstocke vertretenen Alter dem Verhältnisse der zugrunde gelegten Sterbetafel entsprechen und in welchem Maasse die Stetigkeit der Versicherungen in demselben zum Ausdrucke kommt. Naturgemäss kann nun jede Versicherungsart für sich einer derartigen Untersuchung unterzogen werden, da der eigentlich geltende Maassstab, welcher durch das durchschnittliche normale Superrisico gegeben ist, nur an gleichartige Versicherungen angelegt werden kann.

Von diesem Gesichtspunkte aus mag das Wesen der Reserveformel versicherungstechnisch der erforderlichen Interpretation unterzogen werden.

Bekanntlich lautet die Reserveformel für die Todesfallversicherung:

$$1)\qquad {}^{a+m}R(p_a) = S\left(1 - \frac{M_{a+m}}{M_a}\right)$$

worin a das Alter des Versicherten zur Zeit des Versicherungsabschlusses m die Dauer des Versicherungsbestandes bezeichnet. Für die gemischte Versicherung gilt nach der functionellen Beschaffenheit die gleiche Formel, nur mit dem Unterschiede, dass die in Betracht kommenden Leibrenten-Misen in ihrem Wesen anders geartet sind, indem sie einem bestimmten Termine der Versicherung Rechnung tragen. Dieselbe lautet:

$$2)\qquad {}^{a+m}R({}_bp_a) = S\left(1 - \frac{{}_bM_{a+m}}{{}_bM_a}\right)$$

und bezeichnet hierin a das Alter des Versicherten zur Zeit des Versicherungsabschlusses, b der Termin der gemischten Versicherung und m die Dauer des Versicherungsbestandes.

Aehnlich ist dies bei der gegenseitigen Ueberlebensversicherung, wo die Reserveformel durch den analogen Ausdruck zur Darstellung gelangt; u. zw.:

$$3)\qquad {}^{a,b+m}R(p_{a,b}) = S\left(1 - \frac{M_{a,b+m}}{M_{a,b}}\right).$$

Hierin werden naturgemäss die entsprechenden Verbindungsrenten an Stelle der einfachen Misen treten.

Beobachtet man nun das in allen diesen Formen auftretende Verhältniss der Misen, so findet man, dass dasselbe stets kleiner als 1 sein muss

und man kann daher anstatt desselben den Werth $\cos \alpha$ setzen, so dass die allgemeine Form dann lautet:

4) $${}^{\alpha}R = S\,(1 - \cos \alpha).$$

Hierin bildet nun der Winkel α den erforderlichen Maassstab für die Bestandesdauer der Versicherung und das mit derselben in geradem Verhältnisse wachsende Risico. Nun entstehen aber alle einer Versicherungsart angehörigen Reserven unter gleichen Bedingungen mit Rücksicht auf die Art der Misen; betrachtet man daher die Reserven aller Mitglieder als eine Reserve, gleichwie man das Leben aller Individuen als ein Leben ansehen kann, so wird obige Formel als Ausdruck der Gesammtreserve aufgefasst werden können, wobei in analoger Weise der Winkel α den Maassstab der durchschnittlichen Bestandesdauer aller Versicherungen, beziehungsweise des mit derselben in geradem Verhältnisse wachsenden Risicos bedeutet. Je grösser der Winkel α wird, desto kleiner wird dessen Cosinus und daher desto grösser die Gesammtreserve. Dieselbe wächst daher mit der durchschnittlichen Bestandesdauer der Versicherungen, beziehungsweise mit deren Risico. Für diesen Fall muss naturgemäss der Factor S die gesammte Versicherungssumme darstellen und deshalb wird in dem Verhältnisse der Gesammtreserve zur Gesammtversicherungssumme jene Variable sich ergeben müssen, von welcher die durchschnittliche Bestandesdauer aller Versicherungen, beziehungsweise das mit demselben verbundene jeweilige Gesammtrisico abhängt. Es ist nämlich:

5) $$\alpha = \operatorname{arc} \cos \left(1 - \frac{{}^{\alpha}R}{S}\right)$$

der Ausdruck, welcher diesen Maassstab kennzeichnet und auf Grund dessen die Qualität eines Versicherungsstockes mit Rücksicht auf die zugrundegelegte Sterbetafel beurtheilt zu werden vermag.

Wird also auf Grund der rechnungsmässigen Prämienreservesumme und der beziehungsweisen Gesammt-Versicherungssumme der Werth des Winkels α als Maassstab der durchschnittlichen Bestandesdauer berechnet und mit jenem Normalwerthe verglichen, welcher sich aus der zugrundegelegten Sterbetafel unter Berücksichtigung der versicherten Alterskategorien ergibt, so lässt sich aus der mehr oder weniger vorhandenen Uebereinstimmung der Beiden auf die Qualität des Versicherungsstockes sowohl hinsichtlich der richtigen Vertheilung der Alter, als auch derjenigen der versicherten Beträge schliessen.

Die Summe der rechnungsmässigen Reserven der Lebenden aller in Betracht kommenden Alterskategorien berechnet nach sämmtlichen innerhalb der Anstaltsthätigkeit möglichen Versicherungsperioden für die Versicherungssumme 1 und dividirt durch die Summe der Lebenden aller dieser Alterskategorien ergibt der Sterbetafel gemäss jenen Normalwerth, welcher für das Verhältniss der Prämienreserve zur Versicherungssumme in Betracht kommt.

Dieser Gesichtspunkt mag nun unseren ferneren Untersuchungen zur Grundlage dienen.

Zur Frage der Hypothekar-Lebensversicherung und ihrer praktischen Lösung.

I.

Im Gegensatze zu den spärlichen Fortschritten, welche die Lebensversicherung durch Jahrhunderte zu verzeichnen hatte, bevor sie zu jener Stufe der Entwicklung gelangt war, um zur Geltendmachung ihrer ökonomischen Existenz-Berechtigung schreiten zu können, sehen wir im Laufe der letzten Epoche dieselbe, durch überraschende Erfolge ermuthigt, spontan zu einer schnellen Entwicklung ausgreifen und in ihrer socialwirthschaftlichen Bedeutung zu einer ungeahnten Höhe sich emporschwingen.

Einerseits in ihrem Wesen Anreiz und Gelegenheit zu selbstlosester und dabei wirksamster Fürsorge für andere bietend, und auf diese Weise einen günstigen Einfluss auf die Veredlung des menschlichen Strebens ausübend, andererseits durch materiellen Nutzen zur Förderung der wirthschaftlichen Wohlfahrt beitragend, musste diese Institution schliesslich alle Hindernisse beseitigen, welche sich derselben seit ihrer Entstehung entgegengestellt hatten. Nur in der landwirthschaftlichen Bevölkerung macht sich noch immer jener gewisse Widerstand geltend, welcher in diesem conservativsten Theile des Publicums allen Neuerungen und Fortschritten entgegengebracht wird.

Den hohen Werth und die Bedeutung der Lebensversicherung für die bäuerliche Bevölkerung hat schon Raiffeisen, der selbstlose Organisator auf dem Gebiete des landwirthschaftlichen Credites und der Begründer des nach ihm bekannten ländlichen Spar- und Darlehenssystems, erkannt, indem er die Lebensversicherung eine nothwendige Ergänzung der Sparcasse nennt, welche die Jahresprämien in kleinen Theilbeträgen ansammelt und an eine Lebensversicherungs-Anstalt abführt, wodurch ein bestimmtes Capital in jedem Falle gesichert wird.

Alle bisher angewandten socialpolitischen Mittel dürfen nur als halbe Maassregeln betrachtet werden, denn sie reichen nur hin, um die Consequenzen des eintretenden wirthschaftlichen Niederganges hinauszuschieben. Erst wenn man durch die Einführung einer angemessenen Lebensversicherung an Stelle der heutigen Erbabfindungen, sowie durch die Einführung einer Altersrenten-Versicherung an Stelle der heutigen Ausgedinge erträglichere Uebernahmsverhältnisse beim Besitzwechsel des ländlichen Grundbesitzes unter den Ueberlebenden herbeiführen wird, erst dann wird man zur Erhaltung des Bauernstandes und zur Sicherung des Besitzes in der Familie beitragen.

Aber trotz der anerkannten Erspriesslichkeit dieser Institution und trotz der vielfachen Anstrengungen von Seite der Versicherungs-Gesellschaften will die Acquisition in der bäuerlichen Bevölkerung keine Fort-

tte machen. Und doch sprechen gerade hier sehr viele Umstände für n Wirksamkeit.

Entsprechend der in Oesterreich üblichen Erbfolge geht das Gut nach n Ableben des Besitzers an dessen ältesten Sohn über, womit dieser ichzeitig die Verpflichtung auf sich nehmen muss, die seinen Geschwistern kommenden Vermögensantheile baar auszubezahlen. Besteht nun die nterlassenschaft nur aus dem landwirthschaftlichen Gute, dann gestaltet ch für den Erstgeborenen die Abfindung zur sorgenschweren That. Das hemals erträgnissreiche Gut wird mit Schulden belastet, und tritt nun noch ein Missjahr oder ein sonstiger Unglücksfall in der Familie des jungen Besitzers ein, so wird das ganze Anwesen, die Freude und der Stolz des früheren Eigenthümers, der sogenannten Güterschlächterei*) überantwortet und der alte Familienbesitz ist für immer verloren! Diesen traurigen Zufall hindert die Lebensversicherung; durch ihre Hilfe werden die übrigen Kinder abgefunden und der Erbe bleibt auf Hof und Gut. Und wie segensreich wirkt diese Versicherung, wenn der Landwirth in der Blüthe seines Lebens plötzlich stirbt. Welche Wohlthat ist die baar ausbezahlte Versicherungssumme für die Witwe, die ohne diese Hilfe einer sorgenvollen Zukunft entgegensehen müsste. Dem alternden Landwirthe hingegen werden durch die Lebensversicherung die Mittel zu einem behaglichen Ausgedinge geboten.

Die neueste Versicherungsform auf diesem Gebiete ist die sogenannte Hypothekar-Lebensversicherung. Dieselbe strebt den Zweck an, die auf landwirthschaftlichen Gütern und sonstigen Hypotheken haftenden Schuldenlasten mittelst Versicherung derart zu tilgen, dass im Falle des Ablebens des Besitzers die eventuell noch aushaftende Schuld durch die Versicherungsbank selbst abgezahlt und solchermaassen den Erben ein schuldenfreies Eigenthum gesichert wird. Der Gutsbesitzer soll auf diese Art durch Versicherung für den Todesfall auf jenen Betrag sich versichern können, welcher bei seinem eventuellen Tode von der Schuldenlast noch erübrigt. Da dieser Betrag jedoch ein unbestimmter ist, so kann blos schätzungsweise ein aliquoter Theil der Darlehenssumme in Betracht kommen. Hiedurch ist aber der Zweck nicht vollständig erreicht, da bei vorzeitigem Tode das versicherte Capital sich als unzureichend erweisen kann, um die gesammte Schuld zu tilgen; bei Versicherung einer höheren Quote jedoch wird die Belastung des Schuldners durch die Prämie eine relativ zu hohe. Die Ursache, aus welcher diese Versicherungsart bisher nicht cultivirt werden

*) Güterschlächterei (Dismembration) ist die Folge theils von Erbtheilungen, theils von Zerschlagungen, welche entweder wegen ungünstiger Verhältnisse des Besitzers (Theilverkauf) oder deswegen vorgenommen werden, weil für kleinere Güter auf grössere Nachfrage und höhere Preise zu rechnen ist und die Zerschlagung Gewinn in Aussicht stellt. In der Gesetzgebung ist die Frage der Dismembrationsfreiheit sehr verschieden behandelt worden. Nach römischem Rechte war das Grundeigenthum echtes Individualeigen und unbeschränkt theilbar, so wie es heute noch in den Ländern des Code Napoléon (Frankreich, England) und in den meisten deutschen Ländern noch der Fall ist. Nach älterem germanischen Rechte ist es mehr Familieneigenthum, auf welches der Erbe ein Recht hat.

konnte, liegt daher nach einer Richtung hin in dem Mangel einer geeigneten Form, die zu leistende Versicherungsprämie dem angestrebten Zwecke angemessen zu gestalten. Aber auch nach einer anderen Richtung hin stellen sich dieser Versicherungsart unter diesem Gesichtspunkte Hindernisse in den Weg. Es ist dies das geringe Entgegenkommen der Boden- und Hypothekar-Institute, welche die Darlehen an die landwirthschaftlichen Besitzer gewähren, diese Versicherungsart zu fördern. Der Grund dieser ablehnenden Haltung ist darin zu suchen, dass dieselben kein Interesse daran haben, die auf den Gütern lastenden Capitalien eventuell vor der Zeit zurückzuerhalten. Im Gegentheile, es liegt in ihrer Intention, die für die Rückzahlung der Schuld vorgesehene Tilgungsfrist unter allen Bedingungen aufrechtzuerhalten, selbst unter Umständen einer sich schwerfällig gestaltenden Zahlung der Zinsen und Tilgungsquoten. Für den letzteren Fall bieten die auferlegten höheren Verzugszinsen genügenden Ersatz und was die Sicherheit des Darlehenscapitals betrifft, so wird dieselbe bei halbwegs rigoroser Belehnung der Objecte und nur theilweise erfolgter Tilgung selbst bei grösseren Rückständen fast gar nicht tangirt.

Also selbst dann, wenn die Police zur Superdeckung der aufgelaufenen Rückstände herangezogen werden möchte, wäre der Vortheil für das Bodencredit-Institut ein fragwürdiger. Dagegen fällt jener für dasselbe möglicherweise erwachsende Nachtheil desto mehr in's Gewicht, welcher aus einer zu Tilgungszwecken stipulirten Capitals-Versicherung für den Todesfall sich ergeben könnte, da mittelst derselben einer plötzlichen vorzeitigen Rückzahlung des Darlehens, also einem Entgange des Zinsennutzens für das Creditinstitut Vorschub geleistet werden würde. Nur Geschäfte mit hoher Belehnung des Objectes, also zweifelhafter Natur, könnten aus einer derartigen Superdeckung durch die Police einen Nutzen ziehen und dies liegt gewiss nicht in dem Zwecke einer solchen Versicherung. Bei Belehnung kleiner Objecte jedoch, für welche aus materiellen Gründen eine derartige Sicherung der Rückzahlung der Schuld immerhin von Nutzen sein könnte, würde die Prämie einer Capitals-Versicherung für den Todesfall eine relativ zu hohe Belastung bilden, insbesondere wenn dieselbe der Anforderung entsprechend mit abgekürzter Prämienzahlungsdauer stipulirt wäre. Der durch die Versicherung erzielte Vortheil könnte daher andererseits wieder durch die solchermaassen begünstigte Eventualität, höhere Verzugszinsen für Rückstände zu leisten, für den Versicherten zum Nachtheile sich gestalten.

Es handelt sich also darum, bei dieser Versicherungsart jene Nachtheile auszuscheiden, welche die Hauptbedingung derselben, dem Versicherten zu nützen, nicht recht zur Geltung kommen lassen. Es ist deshalb nothwendig, für dieselbe eine Combination zu schaffen, welche bei mässiger Prämienleistung den angestrebten Zweck zu erfüllen geeignet ist. Soll aber die Versicherung nach allen Richtungen hin den Anforderungen Rechnung tragen, so muss dieselbe nicht blos den Darlehensnehmer, sondern auch den Darlehensgeber befriedigen, dessen Mithilfe bei der Acquisition nicht leicht

entbehrt werden kann. Die Versicherungs-Combination muss daher eine solche sein, dass der mit dem Darlehensnehmer abgeschlossene Versicherungsvertrag nachtheilige Consequenzen für den Darlehensgeber unter allen Umständen ausschliesst und die Vortheile aus demselben beiden Contrahenten, wenn auch in verschiedener Form, zugute kommen. Dies ist nur möglich, wenn keineswegs das Darlehenscapital als solches, sondern blos dessen Annuität nach dem Tode des Schuldcontrahenten gesichert wird. Auf diese Weise entfällt für den Darlehensgeber die Befürchtung einer plötzlichen vorzeitigen Capitalsrückzahlung und des hiemit verbundenen Entganges an Zinsennutzen. Bei kleineren Darlehen jedoch wäre behufs Erlangung einer mässigeren Belastung die Tilgungsfrist auf eine möglichst lange Zeit zu erstrecken, was durch eine eigens organisirte Creditgewährung von Seite der Versicherungsanstalt selbst am besten zu erreichen wäre.

Die geeigneteste Form für eine solche Combination stellen wir uns in folgender Weise vor: Da die Leistung der Annuitäten (Zinsen und Tilgungsquoten) von Seite der Versicherungsanstalt an den Darlehensgeber erst mit dem etwaigen Tode des Versicherten vor erfolgter gänzlicher Tilgung des Darlehens eintreten soll, so wird diese Leistung bei einer Gruppe von Versicherten stets auf die Summe aller Verstorbenen sich erstrecken, und zwar alljährlich. Da nämlich in einem beliebigen Alter x eine Anzahl von L_x Lebenden in Betracht kommt und von diesen im ersten Jahre T_{x+1}, im zweiten T_{x+2}, im dritten Jahre T_{x+3} u. s. w. Personen sterben, so wird bei gleichen versicherten Darlehen, beziehungsweise gleicher Tilgungsfrist derselben, die Leistung der Versicherungsanstalt von folgenden Grössen abhängen, und zwar vom Zeitpunkte des Versicherungsabschlusses an

nach dem 1. Jahre von T_{x+1}
" " 2. " " $T_{x+1} + T_{x+2}$
" " 3. " " $T_{x+1} + T_{x+2} + T_{x+3}$
" " 4. " " $T_{x+1} + T_{x+2} + T_{x+3} + T_{x+4}$
u. s. w. u. s. w.

und nach dem n Jahre $T_{x+1} + T_{x+2} + T_{x+3} + \ldots + T_{x+n-1} + T_{x+n}$.

Nun ist aber $T_{x+1} = L_x - L_{x+1}$

$$T_{x+1} + T_{x+2} = L_x - L_{x+2}$$
$$T_{x+1} + T_{x+2} + T_{x+3} = L_x - L_{x+3}$$
u. s. w.
$$T_{x+1} + T_{x+2} + T_{x+3} + \ldots + T_{x+n-1} + T_{x+n} = L_x - L_{x+n}.$$

Berücksichtigt man daher die entsprechende Abzinsung, so ergibt sich als Baarwerth der Summe der jährlichen Annuitäten-Leistungen der Versicherungsanstalt

$$D_x \,.\, P_x = n \,.\, D_x - \Sigma D_{x+1} + \Sigma D_{x+n+1}.$$

Somit erscheint P_x als einmalige Prämie dieser Versicherung für die Jahresannuität 1 ermittelt.

Mathematische Untersuchungen über die qualitative Beschaffenheit eines Versicherungsstockes.

IV.

Das Verhältniss des laut Form. 4) in seiner Bedeutung gekennzeichneten Werthes $1 - \cos \alpha$ zu dessen aus der Sterbetafel ermittelten Normalwerthe bildet den bisherigen Erörterungen gemäss mit Rücksicht auf die Dauer der Anstaltsthätigkeit die Grundlage für die Beurtheilung der Qualität eines Versicherungsstockes. Dieser Normalwerth lässt sich in folgender Weise versicherungstechnisch darstellen: Ist die Dauer der Anstaltsthätigkeit beispielsweise 5 Jahre und a das niedrigste beziehungsweise $a+n$ das höchste unter den Versicherten in Betracht kommende Beitrittsalter, so kommen laut der Sterbetafel die Lebenden $L_{a+1}, L_{a+2}, L_{a+3}, L_{a+4}, \ldots, L_{a+n}$ für die jeweilig angesammelte Prämienreserve in Betracht. Alle diese Lebenden können jedoch je nach ihrer Versicherungsdauer mit einer 1—5jährigen Prämienreserve-Ansammlung correspondiren. Die Summe aller dieser Reserven für die allen Versicherten entsprechenden Versicherungsbeträge von je 1, dividirt durch die Summe der Versicherungen, repräsentirt den bezüglichen Normalwerth N des Verhältnisses zwischen der Gesammtreserve und Gesammt-Versicherungssumme. Demnach bedeutet

$$
\begin{aligned}
N(L_{a+1} + L_{a+2} + L_{a+3} + L_{a+4} + \ldots\ldots + L_{a+n-1} + L_{a+n}) &= L_{a+1} \cdot {}^{a+1}R(p_a) + \\
+ L_{a+2}\,[{}^{a+2}R(p_{a+1}) + {}^{a+2}R(p_a)] &+ L_{a+3}\,[{}^{a+3}R(p_{a+2}) + {}^{a+3}R(p_{a+1}) + {}^{a+3}R(p_a)] + \\
+ L_{a+4}\,[{}^{a+4}R(p_{a+3}) &+ {}^{a+4}R(p_{a+2}) + {}^{a+4}R(p_{a+1}) + {}^{a+4}R(p_a)] + \\
+ L_{a+5}\,[{}^{a+5}R(p_{a+4}) &+ {}^{a+5}R(p_{a+3}) + {}^{a+5}R(p_{a+2}) + {}^{a+5}R(p_{a+1}) + {}^{a+5}R(p_a)] + \\
+ L_{a+6}\,[{}^{a+6}R(p_{a+5}) &+ {}^{a+6}R(p_{a+4}) + {}^{a+6}R(p_{a+3}) + {}^{a+6}R(p_{a+2}) + {}^{a+6}R(p_{a+1})] + \\
+ L_{a+7}\,[{}^{a+7}R(p_{a+6}) &+ {}^{a+7}R(p_{a+5}) + {}^{a+7}R(p_{a+4}) + {}^{a+7}R(p_{a+3}) + {}^{a+7}R(p_{a+2}) + \\
+ \ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ L_{a+n}\,[{}^{a+n}R(p_{a+n-1}) + {}^{a+n}R(p_{a+n-2}) &+ {}^{a+n}R(p_{a+n-3}) + {}^{a+n}R(p_{a+n-4}) + {}^{a+n}R(p_{a+n-5})]
\end{aligned}
$$

Der Quotient N, als Normalverhältniss zwischen Prämienreserve und Versicherungssumme, bildet sodann die Handhabe auf Grund einer mit der Formel 5) analogen Relation den normalen Winkel α_1 zu ermitteln, durch welchen also das Maass jenes durchschnittlichen Normalrisicos gekennzeichnet wird, dessen Wesen durch die vollständige Uebereinstimmung mit der Sterbetafel hinsichtlich der Vertheilung nach Altersclassen und Versicherungsbeträgen bedingt ist.

Dieses Normalverhältniss wird mit der wachsenden Dauer des Versicherungs-Bestandes, durch die natürliche Prämienreserve-Zunahme der alten Versicherungen einerseits und durch den Zuwachs an Altersclassen

respective die Veränderung derselben andererseits beeinflusst. Indem nämlich diese Altersclassen Rechnung tragend ihrer jeweiligen Sterblichkeit stetig vorrücken, erleiden die jüngeren derselben Lücken, welche im Sinne der Sterbetafel durch den gleichen Process, in der Praxis jedoch durch neue Mitglieder wieder ausgefüllt, mit jeder weiteren Periode sich stets erneuern.

Soll daher der Vertheilung der Versicherten nach Alterskategorien der Sterbetafel gemäss stets Rechnung getragen werden, so muss der natürliche Ausfall an jüngeren Altersclassen durch eine stetige Ergänzung derselben wieder ausgeglichen werden. Ist der Storno ein mässiger und die Sterblichkeit eine den rechnungsmässigen Anforderungen entsprechende, so wird der Bestand der höheren Altersclassen einer stetigen Zunahme unterworfen sein, indem neben den vorgerückten jüngeren Altern auch die neuen Versicherten dieser Alterskategorien hiezu beitragen. Hingegen wird der Bestand der jüngsten Altersclassen hinsichtlich seiner Ergänzung mehr auf den Neuzugang angewiesen sein. Mit der wachsenden Bestandesdauer der Versicherungen wird daher eine Steigerung der Mitgliederzahl der mittleren und höheren Altersclassen gleichen Schritt halten, so dass behufs regelmässiger Vertheilung aller Alterskategorien ein entsprechender Neuzugang besonders für die jüngeren Altersclassen sich als nothwendig erweist, wenn die untere Grenze der versicherten Alter sich nicht stetig nach oben verschieben und auf diese Weise das Mortalitätsverhältniss ein immer ungünstigeres werden soll.

Dieser Process äussert nun seinen Einfluss hinsichtlich der mit der durchschnittlichen Bestandesdauer der Versicherungen wachsenden Gesammtreserve dahin, dass die Reserve der höheren Altersclassen in ihrem Zuwachse durch die Minimalreserve der neu beitretenden Versicherten im Durchschnitte gemildert wird. Der gleiche Einfluss macht sich geltend in Bezug auf die Versicherungen mit längerer Bestandesdauer, welche durch den Neuzugang im Durchschnitte eine Verjüngung erfahren.

Die Qualität eines Versicherungsstockes hängt daher von der Gestaltung ab, welcher die Entwicklung desselben während einer mehr oder weniger langen Periode unterworfen war. Hinreichende Stabilität der Versicherungen verbunden mit entsprechendem Neuzugange besonders jüngerer Altersclassen kann grundsätzlich als Voraussetzung einer guten Qualität gelten, immerhin vermag auch bei minder grosser Stabilität und starkem Neuzugange aller Altersclassen, eine solche sich zu entwickeln. Hingegen wird mässige Stabilität der Versicherungen bei schwachem, besonders höhere Altersclassen umfassenden Neuzugange einen ungünstigen Einfluss ausüben, ebenso wie dies bei starkem Wechsel der Versicherungen überhaupt und zwar selbst bei ausgiebigem Neuzugange der Fall sein wird, weil ein günstiger Durchschnitt der Sterblichkeit mit Rücksicht auf die geringe Entwicklung des Bestandes nicht zur Geltung kommen kann. Besonders ungünstig gestaltet sich aber die Qualität eines Versicherungsstockes, sobald der Neuzugang während einer längeren Periode ein unzulänglicher war, so dass eine Er-

gänzung der im Alter vorgerückten Mitglieder nur in geringem Maasse erfolgte. Hier wird nicht blos ein Missverhältniss in der Vertheilung der Alterskategorien sich einstellen, sondern es wird auch jener Grad der Durchschnittselection schwinden, welcher die Voraussetzung einer günstigen mittleren Sterblichkeit bildet.

Hat man es mit mehreren Stadien eines Versicherungs-Bestandes zu thun, so kann man aus der Zu- oder Abnahme der zwischen den einzelnen Normalverhältnissen und den Verhältnissen der jeweiligen thatsächlichen Ergebnisse resultirenden Abstände auf eine Besserung oder Verschlechterung der Qualität eines Versicherungsstockes schliessen.

Denken wir uns beispielsweise den Fall, dass bei einer Versicherungsbank nach Ablauf eines Jahres das Superrisico, das ist jenes durch das Verhältniss der Gesammtreserve zum Versicherungs-Bestande ausgedrückte Maass an Durchschnittsrisico, unverändert bliebe. Diese Eventualität könnte nur dann eintreten, wenn der Nettozuwachs an neuen Versicherungen ein derartiger wäre, dass derselbe durch seine in diesem Stadium vorhandene minimale Prämienreserve dem natürlichen Zuwachse der Prämienreserve der älteren Versicherungen die Waage halten würde; das heisst der Durchschnittszuwachs der Reserve innerhalb des abgelaufenen Jahres müsste durch die Abnahme des Durchschnittes in Folge des Neuzuganges eine Ausgleichung erfahren oder mit anderen Worten, das Verhältniss der angewachsenen Reserve zur angewachsenen Versicherungssumme müsste das gleiche bleiben wie jenes der Prämienreserve zur Versicherungssumme zu Beginn des Jahres. Bei näherer Untersuchung dieses Falles gelangt man nun zu folgenden Conclusionen:

Erfährt die ursprüngliche Reserve R nach Ablauf eines Jahres den Zuwachs ΔR, beziehungsweise der ursprüngliche Versicherungsbestand S dementsprechend den Nettozuwachs ΔS, so ergibt sich obiger Voraussetzung zufolge nachstehende Relation

6) $$\frac{R}{S} = \frac{R + \Delta R}{S + \Delta S}$$

aus welcher die Gleichung

7) $$R . \Delta S = S . \Delta R$$

resultirt, deren Interpretation zu dem Ergebnisse führt, dass auch der Nettozuwachs der Versicherungssumme zum Zuwachs der Prämienreserve im gleichen Verhältnisse stehen muss, wie die ursprüngliche Versicherungssumme zur ursprünglichen Reserve, wenn das Maass an Durchschnittsrisico nach Ablauf eines Jahres ein unverändertes bleiben soll. Dies gilt mit Rücksicht auf die Beschaffenheit der Form 7) auch für eine beliebige Periode.

Bei rationeller Entwicklung der Versicherungsbank ist die Stabilität des Superrisicos während einer Anzahl von Jahren bei mässigem Umfange eines älteren Versicherungsstockes leicht zu erzielen, ebenso dürfte diese in den ersten Jahren der Thätigkeit einer Versicherungsbank bei genügender Rührigkeit als Norm auftreten. Sobald jedoch der Versicherungsstock ein

muss deshalb darauf bedacht sein, diesen Mangel auf irgend eine Art zu beseitigen, indem man entweder die Prämienrückgewähr für die Ueberlebenden in diese Combination einbezieht, oder dieselbe mit der einfachen Capitalsversicherung auf den Todesfall verbindet, um allen Versicherten einen solchen greifbaren Erfolg zu sichern.

Die Cumulirung dieser Combination mit der einfachen Capitals-Versicherung auf den Todesfall ist schon deshalb von Vortheil, weil hiedurch auch nach einer anderen Richtung hin der Vorsorge für die Hinterbliebenen Genüge geleistet wird, indem eine etwaige neue Belastung des Besitzes in Folge der nöthigen Abfindung der Miterben gänzlich oder wenigstens zum Theile vermieden werden kann.

Abgesehen hievon wird auch in versicherungstechnischer Hinsicht eine bessere Ausgleichung in der Leistung der Versicherten mit Rücksicht auf die Gegenleistung der Versicherungsbank erzielt, indem beim Ableben des Versicherten entweder die Rente in Form der Annuitäten oder im Falle der bereits vollzogenen Tilgung des Darlehens vor Eintritt des Todes die baare Versicherungssumme den Erfolg der Versicherung bildet.

Die günstigste diesbezügliche Combination ist diejenige der einfachen Rentenversicherung für den Todesfall mit Prämienrückgewähr im Falle des Ueberlebens der Darlehenstilgung.

Setzt man also die Rückgewähr der einmaligen Prämien ohne Verzinsung für die im $n$ten Jahre der Versicherung noch lebenden Mitglieder voraus, so ergibt sich als Baarwerth der Gesammtleistung der Versicherungsbank mit Rücksicht auf die Formel 1)

$$D_x \,.\, {}_nP'_x = nD_x - \Sigma D_{x+1} + \Sigma D_{x+n+1} + {}_nP'_x \,.\, D_{x+n}$$

demnach bedeutet

$$4) \qquad {}_nP'_x = \frac{nD_x - \Sigma D_{x+1} + \Sigma D_{x+n+1}}{D_x - D_{x+n}}$$

die einmalige Prämie für eine derartige Versicherung. Die jährliche Prämie ergibt sich sodann, indem die einmalige Prämie durch die Mise einer $n$jährigen vorschussweisen Leibrente dividirt wird. Mit Rücksicht auf die Formel 2) liefert dies den Ausdruck

$$5) \qquad \frac{{}_nP'_x}{{}_nM_x} = {}_np'_x = \left[\frac{(n+1)\,D_x - D_{x+n}}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n}} - 1\right] \frac{D_x}{D_x - D_{x+n}}$$

welcher einer Prämienleistung während der $n$jährigen Tilgungsdauer entspricht.

Setzt man nun weiter voraus, dass die unverzinste einmalige Prämie nach Belieben des überlebenden Versicherten entweder sofort rückerstattet oder als einmalige Leistung desselben für eine Capitalsversicherung auf den Todesfall seitens der Versicherungsbank zurückbehalten wird, so ergibt sich eine neue Combination der Hypothekar-Lebensversicherung. Dieselbe bildet eine Todesfall-Versicherung mit abgekürzter, der Tilgungsfrist des Darlehens entsprechender Prämienzahlungsdauer, deren Wesen darin besteht, dass im Falle des Ablebens des Versicherten während der Prämienzahlungsdauer

blos die Rente, hingegen im Todesfalle nach Ablauf der Prämienzahlungsdauer blos das Capital zur Auszahlung gelangt.

Ueber die Höhe des versicherten Capitales entscheidet einerseits die Höhe der einmaligen Prämie, andererseits das Alter des Versicherten zur Zeit der erfolgten Darlehenstilgung. Deshalb wird dasselbe mit Rücksicht auf die Verschiedenheit des Beitrittsalters der Mitglieder und der in Betracht kommenden Tilgungsfristen der Darlehen, sowie der Höhe derselben, stets ein Variables sein. Der Betrag desselben im Verhältnisse zur jeweilig versicherten Rente, lässt sich jedoch durch eine allgemeine Formel ausdrücken.

Berücksichtigt man nämlich die bekannte Formel der einmaligen Prämie für die einfache Capitals-Versicherung auf den Todesfall

6) $$P_x = S\left[1 + M_x\left(\frac{1}{r} - 1\right)\right]$$

und zieht hiebei die Verschiebung dieser Versicherung bis nach Ablauf der Tilgungsfrist des Darlehens in Betracht, laut welcher dieselbe erst nach n Jahren des Versicherungsbestandes in Kraft tritt, so entspricht der Werth der bezüglichen einmaligen Prämie der Form

7) $$P_{x+n} = S\left[1 + M_{x+n}\left(\frac{1}{r} - 1\right)\right]$$

Da nun dieser Werth gleich sein muss der einmaligen Prämie der ursprünglich abgeschlossenen Rentenversicherung auf den Todesfall, so gilt unter Zugrundelegung der Gleichung $P_{x+n} = {}_nP'_x$ folgende Form für das relative Ausmaass des Capitalwerthes im Verhältnisse zur versicherten Jahresrente 1. Demgemäss ist

8) $$S = \frac{(nD_x - \Sigma D_{x+1} + \Sigma D_{x+n+1})\, D_{x+n}}{(D_x - D_{x+n})\left[D_{x+n} + \left(\frac{1}{r} - 1\right)\Sigma D_{x+n}\right]}$$

jener Werth, welcher das versicherte Capital als Vielfaches der Jahresrente darstellt. Diese Rentenversicherung für den Todesfall mit abgekürzter Prämienzahlungsdauer gestattet es, dass der Versicherte im Falle des Ueberlebens der Tilgungsfrist sich darüber entscheidet, ob er auf die Rückgewähr der unverzinsten einmaligen Prämie oder auf eine entsprechende prämienfreie Capitals-Versicherung für den Todesfall reflectirt.

Eine andere diesbezügliche Combination ist jene, wo diese freie Disposition des Versicherten über die Rückgewähr der Prämie nicht stattfindet, da die Prämienzahlung auf die ganze Lebensdauer des Versicherten ausgedehnt und auf diese Weise neben der Rentenversicherung für den Todesfall gleichzeitig auch die Capitals-Versicherung für jene die Tilgungsfrist überlebenden Mitglieder von Vornherein stipulirt erscheint. Für diesen Fall wird die in der Formel 4) dargestellte einmalige Prämie ebenfalls Giltigkeit haben, so dass durch Division derselben, durch die Mise einer lebenslänglichen Leibrente sich die diesbezügliche jährliche, während der ganzen Lebenszeit zu leistende Prämie ergibt. Dieselbe gelangt in der Form

9) $$\frac{P'_x}{M_x} = p'_x = \frac{(nD_x - \Sigma D_{x+1} + \Sigma D_{x+n+1})\, D_x}{(D_x - D_{x+n})\, \Sigma D_x}$$

zum Ausdrucke und dürfte sich mit Rücksicht auf die längere Zahlungsdauer bedeutend mässiger gestalten als diejenige der früheren Combination, bei welcher diese Dauer auf n Jahre beschränkt ist, wobei allerdings auch die prämienfreie Capitals-Versicherung in Betracht kommt. Hervorzuheben ist der Umstand, dass auch für diese letztere Combination die Form 8) das relative Ausmaass des versicherten Capitalswerthes im Verhältnisse zur angeführten Jahresrente 1 zum Ausdrucke bringt. Dieses relative Ausmaass ist theils vom Beitrittsalter, theils von der Tilgungsdauer des Darlehens abhängig. Da der Werth einer derartigen Rentenversicherung mit der im Zeitpunkte des Versicherungsabschlusses in Betracht kommenden Tilgungsfrist des Darlehens sich ändert, so muss auch das für den eventuellen späteren Todesfall versicherte Capital ein veränderliches sein. Eine Rentenversicherung dieser Art, welche blos eine zwanzigjährige Tilgungsfrist zur Voraussetzung hat, wird offenbar eine geringere Prämienleistung beanspruchen wie eine solche mit dreissigjähriger Tilgungsdauer, weil die Sterblichkeit während dreissig Jahren eine viel grössere ist, als während zwanzig Jahren und überdies für die Versicherungsbank die Gefahr einer ungleich längeren Rentenleistung besteht. Hingegen wird das versicherte Capital in seinem relativen Ausmaasse sich im umgekehrten Verhältnisse zur Tilgungsdauer befinden, da bei längerer Tilgungsfrist die unverzinste, also sich stets gleichbleibende einmalige Prämie später die Capitals-Versicherung einleitet und naturgemäss bei höherem Alter des Versicherten ein kleineres Versicherungs-Capital repräsentirt. Dafür wird aber bei längerer Tilgungsfrist eine grössere Anzahl der Versicherten der Rente theilhaftig, so dass wieder nach dieser Richtung hin eine Ausgleichung des Versicherungserfolges eintritt.

Indem also jeder Versicherte sowohl für die Capitals-Versicherung wie für die Rentenversicherung beiträgt, wobei gleichzeitig diese Leistung auf die ganze Lebensdauer vertheilt wird, tragen die früher absterbenden Personen zur Capitals-Versicherung jener die Tilgungsfrist überlebenden Personen bei, während diese Letzteren wieder durch die anfänglich geleisteten Prämien theilweise die Rentenversicherung decken.

Die Erben des Versicherten haben daher entweder im Todesfalle desselben während der Tilgungsfrist auf die der Annuität des Darlehens entsprechende Jahresrente bis zur vollständigen Tilgung Anspruch oder bei Eintritt des Todes nach erfolgter Tilgung des Darlehens auf ein entsprechendes Capital. Auf diese Weise wird jenem Mangel abgeholfen, welcher sich für die ursprüngliche Versicherungs-Combination aus dem Entgange eines Versicherungs-Erfolges für jene die Tilgungsfrist des Darlehens überlebenden Mitglieder ergab. Gleichzeitig wird aber auch der Vorsorge für die Hinterbliebenen derart Genüge geleistet, dass eine etwaige neue Belastung des Besitzes in Folge der nöthigen Abfindung der Miterben vermieden werden kann, wodurch dem Zwecke dieser Versicherung nach jeder Richtung hin Genüge geleistet wird.

Die Verwaltungskosten tilgbarer Anlehen, berechnet nach Maassgabe der Capitals-Annuität.

II.

In der vorigen Lieferung haben wir die Untersuchung dieser Frage vom rein rechnerischen Standpunkte unternommen, ohne auf jene Bedingungen finanztechnischer Natur Rücksicht zu nehmen, welche das Wesen der Einrechnung der Verwaltungskosten und staatlichen Abgaben im praktisch bankmässigen Sinne beeinflussen. Handelt es sich blos darum, den Baarwerth der Verwaltungskosten nach einem bestimmten Percentsatze der jährlich noch ungetilgten Capitalien festzustellen, so genügen die Formen 10) bis 14) vollständig zur Ermittlung des gewünschten Resultates, und zwar insofern die Verwaltungskosten von der Bank selbst bestritten werden und mit Rücksicht hierauf beim Darlehenszinsfusse mit in Betracht gezogen sind. In diesem Falle ändert sich das Ausmaass des Zinsfusses mit den Umständen, unter welchen die Tilgung des Capitales sich vollzieht, wobei die jeweilig stipulirte Tilgungsfrist des Darlehens ausschlaggebend wirkt.

Ist jedoch ein fixer Zinsfuss für die von der Bank zu gewährenden Darlehen vorausgesetzt, indem derselbe die reine Capitalsnutzung bedingt, so werden die Verwaltungsgebühren in ihrer Gesammtsumme auf das Darlehencapital zugeschlagen werden müssen. In Folge dessen ist es nothwendig, deren Baarwerth im Zeitpunkte des Darlehensabschlusses auf Grundlage jenes fixen Zinsfusses zu ermitteln. Wohl ist es gleichgiltig, ob die Bestreitung der Verwaltungskosten durch den Darlehens-Contrahenten auf dem Wege eines Zinsen- oder Capitalzuschlages erfolgt, immerhin spielt dies jedoch vom Gesichtspunkte des praktischen Calculs eine Rolle, welche nach bankmässigen Begriffen nicht unbedeutend ist.

Wir wollen daher versuchen, die Ermittlung dieses Baarwerthes auf Grundlage eines fixen Zinsfusses mathematisch darzustellen und werden zu diesem Behufe die jeweiligen noch zu tilgenden Capitalien in den einzelnen Tilgungsjahren in Betracht ziehen.

Um nun diese Capitalswerthe mathematisch darzustellen, ist es nothwendig, vorerst die Tilgungsquote in den einzelnen Tilgungsjahren algebraisch zu bestimmen. Untersuchen wir daher, in welcher Weise die Jahresannuität R in den einzelnen Jahren zur Bestreitung der Capitalszinsen einerseits und der Tilgungsquoten andererseits herangezogen wird. Der sich hier vollziehende Process ist bekanntlich ein solcher, dass der durch die Tilgung stetig abnehmende Aufwand an Capitalszinsen zu einer stetig zunehmen
Tilgung wieder herangezogen wird, so dass die Jahresannuität st

gleiche bleibt. In Folge dessen ist die Annuität

im 1. Jahre $R = a + Kp$

„ 2. „ $R = a_1 + (K - a)\,p$

„ 3. „ $R = a_2 + (K - a - a_1)\,p$

„ 4. „ $R = a_3 + (K - a - a_1 - a_2)\,p$

„ 5. „ $R = a_4 + (K - a - a_1 - a_2 - a_3)\,p$

u. s. f.

im n. Jahre $R = a_{n-1} + (K - a - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - \ldots\ldots - a_{n-2})\,p$

und zwar bei einer Verzinsung von $P = 100\,p$ Percent, wobei $a, a_1, a_2, a_3, \ldots\, a_n$ die Tilgungsquoten am Schlusse der einzelnen Jahre bezeichnen, deren Werthe ermittelt werden sollen.

Für die Tilgungsquote am Schlusse des ersten Jahres ergibt sich nun der Werth

19) $$a = R - Kp$$

Es ist demnach nicht schwer, die übrigen Tilgungsquoten durch diesen Werth zum Ausdrucke zu bringen. Es bedeutet nämlich laut obiger Aufstellung

$$a + Kp = a_1 + (K - a)\,p$$

und demzufolge die Tilgungsquote am Schlusse des 2. Jahres

$$a_1 = a\,(1 + p)$$

ferner

$$a + Kp = a_2 + (K - a - a_1)\,p = a_2 + [K - a - a\,(1 + p)]\,p$$

daher die Tilgungsquote am Schlusse des 3. Jahres

$$a_2 = a\,(1 + p)^2$$

weiters

$$a + Kp = a_3 + (K - a - a_1 - a_2)\,p = a_3 + [K - a - a(1 + p) - a(1 + p)^2]\,p$$

somit die Tilgungsquote am Schlusse des 4. Jahres

$$a_3 = a\,(1 + p)^3$$

und in weiterer Folge dieses Rechnungsprocesses die Tilgungsquoten am Schlusse des 5., 6., 7., ... n. Jahres

$$a_4 = a\,(1 + p)^4,\ a_5 = a\,(1 + p)^5, \ldots\ldots\, a_{n-1} = a\,(1 + p)^{n-1}.$$

Wird nun der Umstand berücksichtigt, dass die Werthe der in den einzelnen Jahren noch zu tilgenden Capitalien durch folgende Relationen zum Ausdrucke gelangen, und zwar

zu Beginn des 1. Jahres $K = K$

„ „ „ 2. „ $K_1 = K - a$

„ „ „ 3. „ $K_2 = K - a - a_1$

„ „ „ 4. „ $K_3 = K - a - a_1 - a_2$

„ „ „ 5. „ $K_4 = K - a - a_1 - a_2 - a_3$

. . . .

zu Beginn des n. Jahres $K_{n-1} = K - a - a_1 - a_2 - a_3 - \ldots\ldots - a_{n-2}$

so gestattet das Ergebniss dieses rechnerischen Processes folgende der Lösung unserer Aufgabe entsprechende Zusammenstellung der bezüglichen Werthe. Es ist nämlich obigen Ausführungen zufolge

$$R - a = K.p$$
$$R - a\,(1 + p) = K_1.p$$
$$R - a\,(1 + p)^2 = K_2.p$$
$$R - a\,(1 + p)^3 = K_3.p$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$R - a\,(1 + p)^{n-1} = K_{n-1}.p$$

und da die Summe der Baarwerthe der in den einzelnen Jahren noch zu tilgenden Capitalien in dem Ausdrucke

$$\Sigma B_n = K + \frac{K_1}{1+p} + \frac{K_2}{(1+p)^2} + \frac{K_3}{(1+p)^3} + \ldots\ldots + \frac{K_{n-2}}{(1+p)^{n-2}} + \frac{K_{n-1}}{(1+p)^{n-1}}$$

zur Darstellung gelangt, so ergibt sich laut obiger Zusammenstellung hiefür folgende Relation

$$\Sigma B_n = \frac{R}{p}\left(1 + \frac{1}{1+p} + \frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(1+p)^3} + \frac{1}{(1+p)^4} + \ldots + \frac{1}{(1+p)^{n-1}}\right) - \frac{n.a}{p}$$

auf Grund welcher man zu der geschlossenen Form

20) $$\Sigma B_n = \frac{1}{p}\left[\left(\frac{(1+p)^n - 1}{(1+p)^n} \cdot \frac{1+p}{p}\right) R - n.a\right]$$

gelangt, deren Anwendung die Lösung der gegebenen Aufgabe bedingt.

Es wäre beispielsweise ein Capital von 10.000 Gulden bei vierpercentiger Verzinsung in 15 Jahren zu tilgen. Die Gebühr ist mit 1 Permille des zu Beginn eines jeden Jahres jeweilig noch zu tilgenden Capitales bemessen; wie hoch beläuft sich der Gesammtbaarwerth derselben?

Die einem solchen Darlehen entsprechende Annuität ergibt sich in dem Ausdrucke

$$R = \frac{10.000\ (1{\cdot}04)^{15}\ .\ 0{\cdot}04}{(1{\cdot}04)^{15} - 1} = 899{\cdot}46$$

die Tilgungsquote am Schlusse des ersten Jahres ist laut Form 19)

$$a = R - Kp = 899{\cdot}46 - 400 = 499{\cdot}46$$

demnach ist der Gesammtbaarwerth der in den einzelnen Jahren jeweilig noch zu tilgenden Capitalien

$$\Sigma B_{15} = \frac{1}{0{\cdot}04}\left[\frac{(1{\cdot}04)^{15} - 1}{(1{\cdot}04)^{15}} \cdot \frac{1{\cdot}04}{0{\cdot}04} \cdot 899{\cdot}46 - 15.499{\cdot}46\right] = 72704$$

und somit der Gesammtbaarwerth der Gebühr von 1 Permille

$$V = 72{\cdot}70$$

das ist 0·727 Percent des dargeliehenen Capitales von 10.000 Gulden.

Zur Tilgung des Capitales nebst Gebühren wird daher eine höhere Jahresannuität erforderlich sein, und gelangt dieselbe in dem Ausdrucke

$$R' = \frac{10.072{\cdot}70\ (1{\cdot}04)^{15}\ .\ 0{\cdot}04}{(1{\cdot}04)^{15} - 1} = 906$$

zur Darstellung.

Handelt es sich darum, den Baarwerth einer Gebühr zu ermitteln, welche von den jährlich eingehobenen Capitalszinsen zu leisten ist, so ist

es nothwendig, diese zur Grundlage der Berechnung anzunehmen, indem nach der gleichen Methode wie im vorhergehenden Falle vorgegangen wird. Da die Capitalszinsen im Vorhinein eingehoben werden, so werden dieselben folgendermaassen zur Darstellung gelangen; und zwar sind die Capitalszinsen

zu Beginn des 1. Jahres $Kp \;\; = R - a$
" " " 2. " $K_1 p = R - a\,(1+p)$
" " " 3. " $K_2 p = R - a\,(1+p)^2$
" " " 4. " $K_3 p = R - a\,(1+p)^3$
u. s. f.
zu Beginn des n. Jahres $K_{n-1} . p = R - a\,(1+p)^{n-1}$

Nun ist aber die Summe der Baarwerthe der zu Beginn der einzelnen Jahre eingehobenen Zinsen in dem Ausdrucke

$$\Sigma Z_n = Kp + \frac{K_1 p}{1+p} + \frac{K_2 p}{(1+p)^2} + \frac{K_3 p}{(1+p)^3} + \ldots\ldots \frac{K_{n-1} . p}{(1+p)^{n-1}}$$

zur Darstellung gebracht, so dass sich laut obiger Zusammenstellung die Relation

$$\Sigma Z_n = R\left(1 + \frac{1}{1+p} + \frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(1+p)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+p)^{n-1}}\right) - na$$

ergibt, welche die geschlossene Form

21) $$\Sigma Z_n = \frac{(1+p)^n - 1}{(1+p)^n} . \frac{1+p}{p} . R - na$$

liefert. Vergleicht man nun die beiden Formen 20) und 21), so gelangt man zu dem Schlusse, dass die Summe der Baarwerthe aller im Vorhinein eingehobenen Capitalszinsen gleich ist den einjährigen Zinsen der Summe der Capitalsbaarwerthe; das heisst

22) $$\Sigma Z_n = p . \Sigma B_n$$

Nach unserem Beispiele beträgt daher der Baarwerth der jährlich im Vorhinein eingehobenen Zinsen

$$\Sigma Z_{15} = 72704 . p = 2908{\cdot}16$$

ist daher die betreffende Gebühr beispielsweise mit 2 Percent der eingehobenen Zinsen bemessen, so ist der Baarwerth derselben

$$G = 58{\cdot}16$$

Nehmen wir nun an, dass nebst der Gebühr von 1 Permille der in jedem Jahre jeweilig noch zu tilgenden Capitalien gleichzeitig auf diejenige von 2 Percent der jährlich im Vorhinein eingehobenen Zinsen zu leisten wäre, so werden nebst dem Capitale von 10.000 Gulden noch die Gebühren $V = 72{\cdot}70$ und $G = 58{\cdot}16$ zu tilgen sein, demnach ergibt sich für Dieses die Annuität

$$R'' = \frac{10.130{\cdot}86\;(1{\cdot}04)^{15} . 0{\cdot}04}{(1{\cdot}04)^{15} - 1} = 911{\cdot}23$$

womit die Frage der Berechnung percentueller Gebühren, welche seitens des Darlehens-Contrahenten in Form eines Zuschlages zum Darlehenscapitale zu bestreiten sind, gelöst erscheint.

Zur Frage der Hypothekar-Lebensversicherung und ihre praktischen Lösung.

III.

Nachdem in der vorigen Abhandlung diejenigen Versicherungsform gekennzeichnet wurden, welche für das Wesen der Hypothekar-Lebensve sicherung sich besonders geeignet erweisen, mag in den folgenden Au führungen der Standpunkt der Zweckmässigkeit der einzelnen Combination sowohl in praktisch-assecuratorischer als auch in ökonomisch-rationell Beziehung in Betracht gezogen werden.

Von besonderer Wichtigkeit ist diesbezüglich der Umstand, dass zur Anwendung gelangenden Versicherungsformen einen greifbaren Erf auch jenen Versicherten gewährleisten, welche in Folge Ueberlebens Tilgungsfrist der Vortheile des eigentlichen Versicherungszweckes, welcl in der Sicherung der Annuitäten bei vorzeitigem Todesfalle besteht, nic theilhaftig werden.

Obwohl dieser Erfolg im Durchschnitte ein relativ geringerer als de jenige der vor Ablauf der Tilgungsfrist frühzeitig verstorbenen Mitgliede ist, so bildet derselbe dennoch ein immerhin entsprechendes Aequivaler da für jene in den letzten Jahren der Tilgungsfrist Verstorbenen relati noch weit geringere Chancen eines solchen bestehen. Diese letzteren Mi glieder sind also thatsächlich diejenigen, welche im Verhältnisse zu ihre Leistung blos eine oft sehr mässige Gegenleistung zu erwarten haben, den sie werden durch ihr Ableben vor Ablauf der Tilgungsfrist, welches oft nu die Zahlung einer einzigen Annuität durch die Versicherungsanstalt erheisch des Anspruches auf jene Versicherungssumme verlustig, welche allen di Tilgungsfrist überlebenden Mitgliedern im Todesfalle zukommt. Dieser Un stand bildet offenbar eine Anomalie, welche um so krasser hervortritt, sobal man die Versicherungserfolge zweier Mitglieder vergleicht, deren Ablebe in sehr kurzer Frist hintereinander erfolgt, jedoch bei dem einen wenig Tage vor, bei dem anderen wenige Tage nach Ablauf der Tilgungsfri Während nun der Tod des ersteren Mitgliedes blos die Vergütung eine einzigen Annuitätenquote zur Folge hat, ist mit dem Ableben des letztere der Anspruch auf die ungleich höhere Versicherungsumme verbunden. Ei um wenige Tage früher erfolgter Tod hat daher in diesem Falle einen empfindlichen Verlust für den Versicherten zur Folge.

Dieser Anomalie kann derart abgeholfen werden, dass der Versicherungs- erfolg von Vorneherein in seinem Minimum begrenzt wird, und zwar etwa in der Weise, dass die geringste Leistung der Versicherungsbank im Todesfalle des Versicherten in der unverzinsten einmaligen Prämie, welche nach Ablauf der Tilgungsfrist fällig wird, besteht. Stirbt daher ein Mitglied kurz

vor Ablauf der Tilgungsfrist, so dass die capitalisirte Summe der durch die Versicherungsbank zu leistenden Annuitäten den Werth der unverzinsten einmaligen Prämie nicht erreicht, so mag der noch fehlende Betrag nach erfolgter Tilgung des Darlehens an die Erben des Versicherten zur Auszahlung gelangen.

Es besteht nun die Frage, in welcher Weise dieser Voraussetzung versicherungstechnisch Rechnung getragen werden kann, ohne die betreffende Berechnungsform für die Prämie allzusehr zu compliciren.

Ist n die Tilgungsfrist und $n - k$ die Periode, nach deren Ablauf die capitalisirte Summe der noch zu leistenden Annuitäten den Betrag der einmaligen Prämie nicht mehr erreicht, so lässt sich laut Form 4) für die beiden Combinationen der Renten- und Capitals-Versicherung für den Todesfall obiger Voraussetzung in folgender Weise Rechnung tragen. Die Rentenversicherung für den Todesfall wird blos für die bis zum $n - k$ten Jahre der Tilgungsfrist Verstorbenen berücksichtigt, während von da ab bis zum $n$ten Jahre der Tilgungsfrist die Rückgewähr der unverzinsten, nach erfolgter Tilgung fälligen einmaligen Prämie im Falle des Todes stipulirt wird. Ebenso gilt nach Ablauf der Tilgungsfrist die Rückgewähr der einmaligen Prämie für alle Ueberlebenden, beziehungsweise die Verwendung derselben für eine Capitalsversicherung auf den Todesfall als Bedingung. Demnach ergibt sich als Baarwerth der Gesammtleistung der Versicherungsbank mit Rücksicht auf die Formel 1)

$$D_x \, . \, {}_nP_x'' = n D_x - \Sigma D_{x+1} + \Sigma D_{x+n-k+1} - k \, . \, D_{x+n-k} + D_{x+n} \, . \, {}_nP_x'' + \\ + (D_{x+n-k} - D_{x+n}) \, {}_nP_x'' \, . \, r^{-k}$$

und bedeutet daher

$$10) \qquad {}_nP_x'' = \frac{n \, . \, D_x - \Sigma D_{x+1} + \Sigma D_{x+n-k+1} - k \, . \, D_{x+n-k}}{D_x - D_{x+n} - (D_{x+n-k} - D_{x+n}) \, . \, r^{-k}}$$

die einmalige Prämie für eine derartige Versicherung. Nachdem jedoch k bestimmt werden muss, aus dem Verhältnisse der einmaligen Prämie ${}_nP_x''$ zur Annuität 1, der Werth der einmaligen Prämie aber durch die Unbekannte k bedingt ist, so haben wir es hier mit einer merkwürdigen versicherungstechnischen Form zu thun, deren Wesen transcendenter Beschaffenheit ist. Dessenungeachtet ist die Ermittlung der beiden Werthe durch diese Form eine verhältnissmässig einfache, weil für k auch die Bedingung gilt, dass dasselbe stets eine positive ganze Zahl bedeutet. In Folge dessen ist es nicht schwer k in seinem Werthe festzustellen, da es sich nur darum handeln kann, in dessen Werthe die äusserste ganze Zahl der Jahresannuitäten zu bestimmen, deren capitalisirter Werth kleiner als die unverzinste einmalige Prämie ist. Bedeutet daher 1 die Jahresannuität zur Tilgung eines Capitales innerhalb der Frist von n Jahren, so wird

$$11) \quad \frac{r^{k+1} - 1}{r^k \, (r-1)} > {}_nP_x'' > \frac{1}{r^{k-1}} + \frac{1}{r^{k-2}} + \frac{1}{r^{k-3}} + \ldots\ldots + \frac{1}{r} + 1 = \frac{r^k - 1}{r^{k-1} \, (r-1)}$$

diese Relation darstellen, wobei die Anzahl der jeweiligen Reihensummanden den Werth von k kennzeichnet. Der hier in Betracht kommende Zinsfuss

ist gleichbedeutend mit dem der Versicherung zugrunde gelegten und nicht mit demjenigen des Darlehens zu verwechseln.

Um einen Anhaltspunkt für die Bestimmung des Werthes k zu besitzen, wird laut Form 4) vorerst $_nP'_x$ berechnet und aus demselben laut Formel 11) durch die Anzahl der entsprechenden Reihensummanden k festgestellt. Dieser Werth von k wird nun in die Form 10) substituirt und $_nP''_x$ ermittelt, worauf abermals mit Hilfe der Formel 11) die correspondirende Anzahl der Reihensummanden untersucht und der endgiltige Werth von k auf diese Weise, eventuell durch Wiederholung des Processes, festgestellt wird.

Immerhin dürfte diese Methode für die praktische Anwendung wegen ihrer Complication sich nicht als geeignet erweisen, da die Ermittlung der Prämien für alle Beitrittsalter, sowie für die verschiedenen beziehungsweisen Tilgungsfristen sich sehr mühevoll gestalten müsste. Deshalb wollen wir es versuchen, eine einfachere Berechnungsart zu ermöglichen, welche den hier gestellten Anforderungen gleichfalls zu entsprechen vermag.

Für die Combination der Rentenversicherung auf den Todesfall mit Rückgewähr der einmaligen Prämie an jene die Tilgungsfrist überlebenden Mitglieder, sowie für die Combination der Renten- beziehungsweise Capitalsversicherung für den Todesfall wird die einmalige Prämie die Höhe von $^1/_2$ bis $^2/_3$ des Darlehenscapitales erreichen; und zwar je nach der Länge der Tilgungsdauer. Für die letztere Combination, nach welcher die Minimalleistung der Versicherungsbank in der unverzinsten einmaligen Prämie besteht, dürfte dieselbe sogar über $^3/_4$ des Darlehenscapitales sich steigern.

Dies entspricht mehr als der Hälfte der capitalisirten Annuitäten bei einer durchschnittlichen Tilgungsdauer von 20—40 Jahren. Auf Grund dieser Anhaltspunkte ist es möglich, einen Durchschnittswerth für k herzustellen, welcher allen Beitrittsaltern sowie den beziehungsweisen Tilgungsfristen annähernd Genüge leistet. Den hier angeführten Ergebnissen zufolge dürfte derselbe etwa mit der halben Tilgungsfrist nicht zu hoch gegriffen sein, das heisst der Werth $k = \frac{n}{2}$ bezeichnet annähernd diejenige Dauer, während welcher die nach Ablauf der Tilgungsfrist fällige unverzinste einmalige Prämie zur Bestreitung der fälligen Annuitäten vollends hinreichen und eher einen reichlichen Ueberschuss zu Gunsten der Versicherten als einen Abgang zu Ungunsten der Versicherungsbank nach Ablauf der Tilgungsfrist ergeben dürfte.

Wenn nun auch mit dieser Combination dem Versicherten nicht nur die Tilgung aller nach dem Ableben desselben noch fälligen Annuitäten beziehungsweise bei Eintritt des Todes in der zweiten Hälfte der Tilgungsfrist die Ergänzung des hiezu erforderlichen Aufwandes bis zur Höhe der unverzinsten einmaligen Prämie gewährleistet wird, sondern auch allen die Tilgungsfrist überlebenden Personen im Falle ihres später eintretenden Todes noch ein Versicherungs-Capital zufällt, welches mit Rücksicht auf das Beitrittsalter im Durchschnitte nahezu die Höhe des Darlehenscapitales

erreicht, so gestalten sich die Anforderungen, welche bei Erwerbung einer solchen Versicherung an den Candidaten gestellt werden, derart hoch, dass nur ausserordentlich günstige Erträgnisse der belehnten Güter, eine solche gestatten. Wir wollen daher versuchen, eine ähnliche Combination zu schaffen, welche bei mässigerer Gegenleistung des Versicherten wohl eine geringere Leistung der Versicherungsbank involvirt, jedoch dem Zwecke gleichfalls vollständig zu entsprechen vermag. Es lässt sich nämlich die letztere Versicherungs-Combination derart modificiren, dass für jene bis zur halben Tilgungsdauer Verstorbenen die Zahlung sämmtlicher noch fälliger Annuitäten, hingegen für alle in der zweiten Hälfte der Tilgungsdauer beziehungsweise nach deren Ablauf Verstorbenen die unverzinste einmalige Prämie in Rentenform resp. als Versicherungs-Capital für den Todesfall gewährleistet wird. Auf diese Weise wird die Leistung der Versicherungsbank hinsichtlich des Versicherungs-Capitales für den Todesfall nach Ablauf der Tilgungsfrist bedeutend herabgesetzt und in Folge dessen auch die Gegenleistung des Versicherten dementsprechend vermindert.

Die versicherungstechnische Form für eine derartige Combination lässt sich nach den Grundlagen der Form 10) ableiten. Die Leistung der Versicherungsbank für jene in der ersten Hälfte der Tilgungsfrist $n - k$ verstorbenen Mitglieder, welche in Tilgung sämmtlichen nach deren Tode noch fällig werdenden Annuitäten besteht, gelangt durch die Relation

$$Q = n \,.\, D_x - \Sigma D_{x+1} + \Sigma D_{x+n+1} - k D_{x+n-k} + \Sigma D_{x+n-k+1} - \Sigma D_{x+n+1}$$

zum Ausdrucke. Die Leistung der Versicherungsbank für die in der zweiten Hälfte der Tilgungsfrist beziehungsweise nach Ablauf derselben verstorbenen Mitglieder, welche in der Gewährleistung beziehungsweise baaren Auszahlung der unverzinsten einmaligen Prämie im Falle des Todes besteht, ist dargestellt durch die Relation

$$Q' = P_x \,.\, \Sigma \frac{T_{x+n-k}}{r^{x+n-k+1}} = P_x \left(D_{x+n-k} + \left(\frac{1}{r} - 1 \right) \Sigma D_{x+n-k} \right)$$

demnach bedeutet

$$P_x \,.\, D_x = n D_x - \Sigma D_{x+1} - k \,.\, D_{x+n-k} + \Sigma D_{x+n-k+1} + \\ + P_x \left(D_{x+n-k} + \left(\frac{1}{r} - 1 \right) \Sigma D_{x+n-k} \right)$$

die Gesammtleistung und

$$12) \qquad P_x = \frac{n\, D_x - \Sigma D_{x+1} - k \,.\, D_{x+n-k} + \Sigma D_{x+n-k+1}}{D_x - D_{x+n-k} + \left(1 - \frac{1}{r} \right) \Sigma D_{x+n-k}}$$

die einmalige Prämie dieser Versicherung, welche den gleichen Voraussetzungen hinsichtlich des Werthes k entsprechen dürfte wie die frühere Combination, da dem hier vorhandenen Ausfalle betreffs der Leistung des Versicherten, das Fälligwerden der baaren einmaligen Prämie, im Gegensatze zum abgezinsten Werthe derselben bei der früheren Combination, versicherungstechnisch vollständig die Waage hält.

Die Verwaltungskosten tilgbarer Anlehen, berechnet nach Maassgabe der Capitals-Annuität.

III.

Betrachtet man das Wesen der bisher dargestellten Formen betreffend den Baarwerth der in jedem Jahre jeweilig noch zu tilgenden Capitalien einerseits und den Baarwerth aller im Vorhinein eingehobenen Capitalszinsen andererseits, so lässt sich eine bedeutende Vereinfachung derselben herbeiführen, sobald man den Werth

$$K = \frac{(1 + p)^n - 1}{(1 + p)^n \cdot p} \cdot R$$

welcher aus der einfachen Form für die Tilgung eines Capitales hervorgeht, in Betracht zieht. Darnach können die bezüglichen Formen 20) und 21) durch Substitution des vorliegenden Werthes in dieselben folgendermaassen zum Ausdrucke gebracht werden

$$\Sigma B_n = \frac{1}{p} \left(K (1 + p) - n a\right)$$

und

$$\Sigma Z_n = K (1 + p) - n a.$$

Zieht man ausserdem die bekannte Relation

$$a = R - Kp$$

in Betracht, so ergeben sich für diese beiden Formen die Relationen

$$\Sigma B_n = \frac{1}{p} \left[K (1 + n) (1 + p) - n (K + R)\right]$$

$$\Sigma Z_n = K (1 + n) (1 + p) - n (K + R)$$

in welchen blos die gegebenen einfachen Werthe, und zwar das Capital K, die Annuität R, der Zinsfuss $P = 100 p$ und die Tilgungsfrist n in Berücksichtigung gelangen. Handelt es sich darum die semestrale Einhebung der Zinsen in den beiden Formen rechnungsmässig zu statuiren und zwar derart, dass der supponirte jährliche Zinsfuss unverändert bleibt, so ist es nothwendig den Semestralzinsfuss diesem entsprechend zu ermitteln. Dies erfolgt derart, dass der gesuchte Semestralzinsfuss auf zwei Termine mit dem Jahreszinsfusse auf einen Termin in Relation gebracht wird und es ergibt sich daher

$$(1 + q)^2 = 1 + p \text{ resp. } q = \sqrt{1 + p} - 1$$

als der dem Jahreszinsfusse p entsprechende Semestralzinsfuss. Die genannten Formen erleiden durch die semestrale Einhebung der Zinsen, welche auf Grundlage des unveränderten Jahreszinsfusses p erfolgt, keine Aenderung, da deren mathematische Werthbeschaffenheit durch diesen Umstand nicht tangirt wird. Nur dann, wenn der Semestralzinsfuss selbsständig supponirt wird und in dem halben Jahreszinsfusse zum Ausdrucke gelangt, werden

obige Formen eine entsprechende Veränderung erfahren, welche in der Verdoppelung der Termine sich äussert.

Denken wir uns beispielsweise ein Capital von 100.000 Gulden bei vierpercentiger jährlicher Verzinsung auf 25 Jahre in der Weise contrahirt, dass die Zinsen halbjährig, jedoch im rechnungsmässigen Ausmaasse zur ganzjährigen Verzinsung eingehoben werden, die Tilgung aber zu Ende der einzelnen Jahre erfolgt. Die Verwaltungsgebühr wird mit 2 Percent der jeweilig eingehobenen Zinsen und mit 1 Permille des jeweilig noch zu tilgenden Capitales bemessen; wie hoch beläuft sich der Baarwerth derselben?

Demnach ist $K = 100.000$, $P = 100\, p = 4$, $n = 25$ und demgemäss die rechnungsmässige Annuität $R = 6401{\cdot}20$.

Auf Grund der dargestellten Formen ergibt sich nun laut Rechnung

$$\Sigma B_n = 1{,}699.250$$
$$\Sigma Z_n = 67.970$$

daher der Baarwerth der Verwaltungsgebühr mit 1 Permille aller jeweilig noch zu tilgenden Capitalien

$$V = 1.699{\cdot}25$$

und der Baarwerth der Verwaltungsgebühr mit 2 Percent aller eingehobenen Zinsen

$$G = 1.359{\cdot}40$$

Sollen daher mit dem Capitale auf die Verwaltungsgebühren im Gesammtbetrage von 3058·65 getilgt werden, so wird sich die erforderliche Annuität um einen entsprechenden Betrag erhöhen und zwar um 195·79, so dass die Annuität für das Darlehenscapital nebst Verwaltungsgebühren durch

$$R' = 6596{\cdot}99$$

zum Ausdrucke gelangt. Die vierpercentige jährliche Verzinsung endlich entspricht einer semestralen Einhebung der Zinsen des jeweilig noch zu tilgenden Capitales mit $Q = 100 \,.\, q = 1{\cdot}9804$ Percent.

Es besteht nun weiter die Frage, in welcher Weise lässt sich die beim gewöhnlichen Boden- und Hypothekarcredit in Betracht kommende Differenz zwischen dem Darlehens- und Pfandbriefzinsfusse in Percenten der Capitalsannuität beziehungsweise des Baarwerthes der gesammten jeweilig noch zu tilgenden Capitalien oder des Baarwerthes der gesammten eingehobenen Zinsen zum Ausdrucke bringen.

Die Differenz zwischen Darlehens- und Pfandbriefzinsfuss repräsentirt die Provision respective den Aufwand für die Verwaltungskosten, welche die Bank für sich in Anspruch nimmt. Soll nun dieser Aufwand in Percenten der genannten Baarwerthe zur Darstellung gelangen, so ist es vorerst noth-

wendig den Baarwerth jener Differenz zwischen Darlehens und Pfandbriefzinsfuss, welche sich während der gesammten Tilgungsdauer ergibt, festzustellen. Wird daher der Darlehenszinsfuss mit $P = 100\,p$, der Pfandbriefzinsfuss hingegen mit $P_1 = 100\,p_1$ gekennzeichnet, so liefern die Formen

$$R = \frac{K\,(1 + p)^n \cdot p}{(1 + p)^n - 1} \text{ und } R_1 = \frac{K\,(1 + p_1)^n \cdot p_1}{(1 + p_1)^n - 1}$$

die Annuitäten für die Tilgung mittelst Darlehenszinsfuss einerseits und diejenige mittelst Pfandbriefzinsfuss andererseits.

In der Differenz der beiden Annuitäten $R - R_1 = r$ ergibt sich nun die von der Bank in Anspruch genommene Provision in jährlichen gleichen Quoten, deren Fälligkeit zum Schlusse eines jeden Tilgungsjahres in Betracht zu ziehen ist. Soll nun der Baarwerth sämmtlicher, während der Tilgungsfrist solchermaassen entfallenden Quoten ermittelt werden, so wird die entsprechende Rentenform zum Ziele führen, und zwar repräsentirt

$$b_n = \frac{(1 + p)^n - 1}{(1 + p)^n \cdot p} \cdot r$$

den Baarwerth sämmtlicher jährlich fälliger Annuitäten-Differenzen, daher den Baarwerth der gesammten, der Bank zufallenden Provision.

Der Percentsatz, in welchem dieser Baarwerth der gesammten Provision zum Baarwerthe der gesammten jeweilig noch zu tilgenden Capitalien sich befindet und den wir mit π bezeichnen wollen, gelangt nun durch die Form

$$\pi = \frac{100 \cdot b_n}{\Sigma B_n}$$

zum Ausdrucke, so dass es der Bank möglich wird, auf Grundlage desselben die jährliche Provision im Verhältnisse zum jeweiligen Capitalsausstande zu berechnen und solchermaassen auch das Verhältniss der staatlichen Gebühren und Abgaben zum Provisions-Erträgnisse festzustellen.

Eine Bank gewährt beispielsweise ein Darlehen von 100.000 Gulden bei $4^1/_2$percentiger ganzjähriger Verzinsung derart, dass dasselbe innerhalb 30 Jahren zu tilgen ist, wobei die Zinsen im rechnungsmässigen Ausmaasse zum ganzjährigen Zinsfusse semestral zu entrichten sind, die Tilgung jedoch jeweilig zum Jahresschlusse erfolgt. Die zur Deckung des Darlehens ausgegebenen Pfandbriefe repräsentiren dem Curse gemäss eine Jahresverzinsung von 4 Percent; in welchem Verhältnisse steht die zwischen dem Darlehens- und Pfandbriefzinsfusse sich ergebende Differenz als Provision, zur Summe der Baarwerthe der jeweilig noch zu tilgenden Capitalien?

Während dem Darlehenszinsfusse eine Annuitätenquote von $R = 6139{\cdot}15$ entspricht, liefert der Pfandbriefzinsfuss eine solche von . . . $R_1 = 5783{\cdot}01$ daraus ergibt sich die Differenz in dem Werthe

$$r = 356{\cdot}14$$

und somit der Baarwerth aller während der Tilgung fälligen Provisionsquoten

$$b_n = \frac{(1{\cdot}045)^{30} - 1}{(1{\cdot}045)^{30} \,.\, 0{\cdot}045} \,.\, 356{\cdot}14 = 5801{\cdot}13$$

Die Summe der Baarwerthe der jeweilig noch zu tilgenden Capitalien ist für obiges Beispiel

$$\Sigma B_n = \frac{1}{0{\cdot}045} \left(104.500 - 49.174{\cdot}50 \right) = 1{,}229.455{\cdot}50$$

daher der Percentsatz des Provisionsbaarwerthes von der Summe der Baarwerthe der jeweilig noch zu tilgenden Capitalien

$$\pi = \frac{580.113}{1{,}229.455{\cdot}50} = 0{\cdot}4718\%$$

Ferner ist die Summe der Baarwerthe sämmtlicher innerhalb der Tilgungsfrist eingehobenen Zinsen

$$\Sigma Z_n = 55.325{\cdot}50$$

daher der Percentsatz des Provisionsbaarwerthes von der Summe der Baarwerthe der innerhalb der Tilgungsfrist eingehobenen Zinsen

$$\pi_1 = \frac{100 \,.\, b_n}{\Sigma Z_n} = \frac{580.113}{55.325{\cdot}50} = 10{\cdot}48\%$$

Daraus ergibt sich nun folgende interessante Conclusion: Da der Darlehenszinsfuss $4\frac{1}{2}$ Percent, der Pfandbriefzinsfuss hingegen 4 Percent beträgt, so sollte eigentlich $\frac{1}{2}$ Percent auf die Provision entfallen. Nun ergibt sich aber nach obigem Resultate, dass von der Summe der Baarwerthe sämmtlicher innerhalb der Tilgungsfrist eingehobenen Zinsen, welche dem Zinsfusse von $4\frac{1}{2}$ Percent entsprechen, blos eine Quote von 0·4718 Percent auf den Provisionsbaarwerth entfällt, welche naturgemäss rechnungsmässig mit dem Percentsatz desselben von der Summe der Baarwerthe der jeweilig noch zu tilgenden Capitalien übereinstimmt. Diese Quote ist daher um 0·0282 Percent kleiner, als den gegebenen Voraussetzungen gemäss zu erwarten wäre. Dies ist nun auf den Umstand zurückzuführen, dass bei höherem Zinsfusse eine langsamere Tilgung des Capitales als bei niedrigerem Zinsfusse in Betracht kommt, wodurch eine Verschiebung in den Zinsendifferenzen herbeigeführt wird, welche den besagten Ausfall derselben rechtfertigt.

Selbstverständlich gilt obige Berechnung der percentuellen Provisionsquote für den Fall, wo dieselbe in dem Ausmaasse des Darlehenszinsfusses mit in Betracht gezogen ist; wird dieselbe dagegen als Aufschlag zum Pfandbriefzinsfusse behandelt, so dürfte sich deren Percentsatz im Verhältnisse zum Baarwerthe der jeweilig noch zu tilgenden Capitalien etwas höher stellen.

Zur Frage der Hypothekar-Lebensversicherung und ihrer praktischen Lösung.

IV.

Laut den bisherigen Untersuchungen liefert also die Form 12) die einmalige Prämie für eine Combination, welche dem vorhandenen Zwecke am besten zu entsprechen vermag, indem der Versicherungserfolg in seinem Minimum begrenzt, allen Versicherten in jenem Mindestausmaasse zutheil wird, welches in der baaren Nettoprämienleistung derselben besteht.

Im Wesen selbst repräsentirt diese Combination nichts Anderes, als ein unverzinsliches Darlehen des Versicherten bis zu dessen Tode im Betrage der Einmaligen Prämie an die Versicherungsbank, wofür dieselbe als eventuelle Gegenleistung das Risico der Zahlung aller rückständigen Annuitäten für ein entsprechendes bei einer Bodencreditbank contrahirtes Darlehen des Versicherten, im Falle des Ablebens desselben vor der halben Tilgungsfrist — vom Zeitpunkte der Versicherung an gerechnet — übernimmt, bei späterem Ableben des Versicherten jedoch den baaren Betrag der Einmaligen Prämie an dessen Erben zurückzustellen verpflichtet ist.

Der Umstand, dass bedingungsweise beim Ableben des Versicherten nach Ablauf der halben, jedoch vor Ablauf der ganzen Tilgungsfrist die Rückerstattung der Einmaligen Prämie in Form einer Rente in der Höhe der Annuität an die Bodencreditbank bis zur vollständigen Tilgung des Darlehens und nur der eventuelle Restbetrag baar an die Erben erfolgt, ist für das Wesen dieser Combination im Sinne obiger Darstellung irrelevant.

Ist die Differenz zwischen dem Zinsfusse, auf Grund dessen von der Bodencreditbank das Darlehen an den Versicherten gewährt wird, und dem der Versicherung zugrunde liegenden Zinsfusse keine bedeutende, so lässt sich die Versicherung mit der Darlehenscontrahirung derart cumuliren, dass die Bodencreditbank dem Darlehenswerber gleichzeitig mit dem stipulirten Darlehen auch die Mittel zur Leistung der Einmaligen Prämie für die obengenannte Versicherung zur Verfügung stellt, wofür derselben als Superdeckung die solchermaassen prämienfreie Police pfandweise überlassen wird. Die Tilgung und Verzinsung der Einmaligen Prämie erfolgt dann gleichzeitig mit dem Darlehen. Gegen diese Form spricht nur das eine Bedenken, dass der höhere Darlehenszinsfuss die Versicherung zu vertheuern geeignet ist.

Demnach wird die Leistung des Versicherten am günstigsten durch die Jahresprämie bewerkstelligt werden, welche sich entweder auf die ge-

sammte Lebensdauer desselben oder blos auf die Dauer der Tilgungsfrist im Erlebensfalle erstreckt, bei welch' letzterer Alternative naturgemäss die Prämie eine bedeutend höhere wird.

Die Jahresprämie mit beschränkter Zahlungsdauer bei Lebzeiten gelangt laut Form 12) durch die Relation

$$13)\quad {}_np_x = \frac{n\,.\,D_x - \Sigma D_{x+1} - k\,.\,D_{x+n-k} + \Sigma D_{x+n-k+1}}{D_x - D_{x+n-k} + \left(1 - \frac{1}{r}\right)\Sigma D_{x+n-k}} \cdot \frac{D_x}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n}}$$

zum Ausdrucke. Die Zahlung derselben hört auf mit dem Tode während der Tilgungsfrist, bei Lebzeiten jedoch nach deren Ablauf.

Die Jahresprämie mit lebenslänglicher Zahlungsdauer ergibt sich ferner in der Relation

$$14)\quad p_x = \frac{n\,D_x - \Sigma D_{x+1} - k\,.\,D_{x+n-k} + \Sigma D_{x+n-k+1}}{D_x - D_{x+n-k} + \left(1 - \frac{1}{r}\right)\Sigma D_{x+n-k}} \cdot \frac{D_x}{\Sigma D_x}$$

welche ihrer mässigen Höhe wegen sich für diese Versicherung am meisten geeignet erweist und thatsächlich auch allen sonstigen technischen Anforderungen am besten zu entsprechen vermag.

Denke man sich beispielsweise folgenden Fall: Ein 30jähriger Landwirth nimmt auf sein Gut bei einer Bodencreditbank ein Capital von 10.000 fl. bei $4^1/_2$percentiger Verzinsung auf 30 Jahre auf und versichert sich nach obiger Combination für den Todesfall derart, dass bei seinem Ableben vor Ablauf der halben Tilgungsfrist alle noch rückständigen Annuitäten von der Versicherungsbank zu zahlen sind, im Falle seines Todes nach Ablauf der halben Tilgungsfrist jedoch die Rückzahlung der rechnungsmässigen Einmaligen Prämie zu erfolgen hat, und zwar beim Ableben vor Ablauf der ganzen Tilgungsfrist in Form einer Rente in der Höhe der Annuität des Darlehens bis zu dessen vollständiger Tilgung, beziehungsweise beim Ableben nach erfolgter Tilgung des Darlehens, in Baarem an die Erben des Versicherten.

Für die Tilgung und Verzinsung obigen Capitales ist eine Jahresannuität von

$$R = 613{\cdot}92$$

nothwendig. Laut Formel 12) ergibt sich ferner für die Jahresannuität als Einmalige Prämie einer solchen Versicherung bei vierpercentiger Verzinsungsgrundlage

$$P_x = 15{\cdot}6192$$

d. h. die Einmalige Prämie ist in diesem Falle gleich der 15·6192fachen Jahresannuität und daher

$$P_x = 9588{\cdot}94$$

da nun laut dem gegebenen Beispiele $x = 30$, $n = 30$, $k = 15$ und $r = 1{\cdot}04$

ist, so liefert dies mit Rücksicht auf die entsprechende Mise einer lebenslänglichen Leibrente im Ausmaasse von 18·0396 die Jahresprämie

$$p_x = 531{\cdot}56.$$

Darnach hat der Versicherte bei Lebzeiten durch 30 Jahre zu leisten 613·92 Gulden als Jahresannuität an die Bodencreditbank, ferner 531·56 Gulden lebenslängliche jährliche Nettoprämie an die Versicherungsbank, hingegen hört bei dessen Ableben jede Leistung auf.

Stirbt derselbe vor Ablauf der halben Tilgungsfrist, so tilgt die Versicherungsbank das Darlehen des Versicherten, so dass den Erben ein vollständig schuldenfreies Gut verbleibt. Stirbt derselbe jedoch nach Ablauf der halben Tilgungsfrist, so übernimmt die Versicherungsbank nicht blos die vollständige Tilgung des Darlehens, sondern zahlt nach Ablauf der Tilgungsfrist überdies den von der Einmaligen Prämie unverwendeten restlichen Betrag an die Erben baar heraus. Stirbt der Versicherte schliesslich nach erfolgter Tilgung des Darlehens, so haben dessen Erben Anspruch auf die baare Auszahlung der Einmaligen Prämie. Nehmen wir nun beispielsweise an, der Versicherte würde nach dem fünften Jahre der Versicherung sterben, so wird derselbe im Ganzen 6 Jahresprämien im Gesammtbetrage von 3189·36 Gulden geleistet haben. Die Gegenleistung der Versicherungsbank jedoch besteht mit Rücksicht auf die im Nachhinein zu leistenden Annuitäten in 25 Jahresquoten im Gesammtbaarwerthe von 9590·66 fl. Stirbt der Versicherte nach dem 10. Jahre der Versicherung, so hat er 11 Jahresprämien entrichtet und war seine Gesammtleistung an die Versicherungsbank 5847·16 Gulden, dagegen ist diese zu einer Gegenleistung im Baarwerthe von 8343·17 Gulden verpflichtet.

Im Todesfalle des Versicherten nach 15 Jahren und mehr ist die Gegenleistung der Versicherungsbank constant mit der Rückzahlung der dem gegebenen Beispiele entsprechenden einmaligen Prämie im Baarbetrage von 9588·94 fl. bedingt, während der Baarwerth der eventuell noch zu bestreitenden 15 Annuitäten blos den Betrag von 6825·81 fl. repräsentirt. Dies gilt für den Fall, als die Versicherung gleichzeitig mit dem Darlehensabschlusse erfolgt. Wird dagegen die Versicherung mehrere Jahre nach Contrahirung des Darlehens abgeschlossen, so wird sich die Prämie naturgemäss mässiger gestalten.

Z. B. ein 30jähriger Landwirth versichert sich nach dieser Combination, nachdem er 10 Jahre vorher ein Darlehen von 10.000 fl. bei $4^1/_2$percentiger Verzinsung und 30jähriger Tilgungsfrist bei einer Bodencreditbank aufgenommen. Derselbe hat daher bereits 10 Annuitätenquoten und die letzten Semestralzinsen im Vorhinein auf sein Darlehen geleistet, weshalb blos mehr eine Tilgungsfrist von 20 Jahren bei der Versicherung in Betracht kommt; d. h. es sind noch 20 Annuitätenquoten abzüglich der Zinsen für den ersten Semester des 21. Tilgungsjahres zn leisten, für welche die Versicherungsbank das Risico übernimmt.

Die Jahresannuität ist hier die gleiche wie beim vorigen Beispiele, da es sich hier um das gleiche Capital unter gleichen Darlehensbedingungen handelt, daher

$$R = 613{\cdot}92.$$

Laut Formel 12) ergibt sich ferner für die Jahresannuität 1 als Einmalige Prämie einer solchen Versicherung bei vierpercentiger Verzinsungsgrundlage

$$P_x = 7{\cdot}965$$

d. h. die Einmalige Prämie ist in diesem Falle gleich der 7·965fachen Jahresannuität und entspricht daher dem Werthe

$$P_x = 4889{\cdot}89.$$

Da nun laut dem gegebenen Beispiele $x = 30$, $n = 20$, $k = 10$ und $r = 1{\cdot}04$ ist, so liefert dies mit Rücksicht auf die entsprechende Mise einer lebenslänglichen Leibrente im Ausmaasse von 18·0396 die Jahresprämie

$$p_x = 271{\cdot}06$$

demnach hat also der Versicherte zu leisten bei seinen Lebzeiten die Jahresprämie von 271·06 fl. nebst der jährlichen Annuitätenquote für das Darlehen innerhalb 20 Jahren, hingegen hört bei Eintritt des Todes jede Leistung auf.

Stirbt nun der Versicherte nach 5 Jahren, so hat er an die Versicherungsbank 6 Jahresprämien im Betrage von 1626·36 fl. geleistet, dagegen beträgt in diesem Falle die Gegenleistung in ihrem Baarwerthe 6825·81 fl.

Stirbt derselbe jedoch nach 10 Jahren, also knapp nach Ablauf der halben noch in Betracht kommenden Tilgungsfrist, bestand dessen Leistung in 11 Jahresprämien im Betrage von 2981·66 fl. Dagegen hat er die Rückerstattung der vollen einmaligen Prämie im Baarbetrage von 4889·89 zu beanspruchen, aus welcher die an die Bodencreditbank noch schuldigen restlichen 10 Annuitäten abzüglich der Zinsen für den ersten Semester des 21. Tilgungsjahres zu bestreiten sind.

Der Baarwerth dieser 10 Annuitäten im Zeitpunkte der ersten Fälligkeit nach Ableben des Versicherten beträgt 4881·80 fl.; hievon kommen in Abzug die vom Versicherten noch zu dessen Lebzeiten bezahlten Zinsen für den ersten Semester des 21. Tilgungsjahres, beziehungsweise des 11. Versicherungsjahres, so dass die einmalige Prämie reichlich die restliche Tilgung und Verzinsung des Darlehens deckt. Bei etwaigem späteren Ableben des Versicherten wird daher ausserdem noch ein baarer Betrag zu Gunsten der Erben entfallen, welcher desto grösser wird, je mehr beim Tode des Versicherten die Tilgung des Darlehens vorgeschritten ist.

Aus diesen Untersuchungen ist unzweifelhaft die besondere Eignung der vorliegenden Combination für die Hypothekar-Lebensversicherung zu erkennen.

Mathematische Untersuchungen über die qualitative Beschaffenheit eines Versicherungsstockes.

V.

Auf Grund der bisherigen Ausführungen lässt sich also die jeweilige Qualität eines Versicherungsstockes von Fall zu Fall feststellen, beziehungsweise in ihrem Wesen mit Rücksicht auf das normale Verhältniss zwischen der Prämienreserve-Summe und der Gesammt-Versicherungssumme einer Untersuchung unterziehen.

Hat man es mit einem Versicherungsstocke zu thun, welcher allen Anforderungen Rechnung trägt, die vom versicherungstechnischen Gesichtspunkte an denselben gestellt werden können, so wird die Erfüllung gewisser Bedingungen diese seine Beschaffenheit kennzeichnen.

Neben der Vertheilung der Risken nach Altersclassen entsprechend der zugrunde gelegten Sterbetafel unter gleichzeitiger Beobachtung eines richtigen Verhältnisses zwischen Versicherungen mit kürzerem und längerem Versicherungsbestande, sowie einer angemessenen Vertheilung der Risken in quantitativer Hinsicht kommt noch die Auswahl der Versicherungen in Betracht. Diese letztere blieb bisher bei diesen Untersuchungen unberücksichtigt, weil sie sich praktisch blos in den Ergebnissen einer mehr oder minder hohen Unter- oder Uebersterblichkeit äussert, dagegen an und für sich hier mathematisch in keiner Weise zum Ausdrucke gelangt. Anlässlich der Aufzählung jener Merkmale, welche die Qualität eines Versicherungsstockes kennzeichnen, wird deren Einfluss gleichfalls mit in Rechnung kommen, und zwar als Ausdruck des Verhältnisses zwischen den gesammten und jenen durch die flüssig werdenden Prämienreserven gedeckten Fälligkeiten, in welchem dieselbe neben anderen qualitativen Einflüssen sich geltend macht. Unter normalen Umständen ist nämlich das Verhältniss der durch die flüssig werdenden Prämienreserven gedeckten Fälligkeiten zu den Gesammtfälligkeiten in einem beliebigen Zeitpunkte im Durchschnitte stets gleich dem Verhältnisse der Prämienreserve-Summe zur Gesammt-Versicherungssumme; d. h. es gilt hier die Relation

9) $$\frac{{}^{\alpha}R}{S} = \frac{du}{S.da}$$

worin ${}^{\alpha}R$ bekanntlich die zur Zeit vorhandene Prämienreserve-Summe, S die Gesammt-Versicherungssumme, du jene durch die flüssig werdende Prämienreserve gedeckten momentanen Fälligkeiten und $S.da$ die beziehungsweisen momentanen Gesammtfälligkeiten darstellt. Uebersteigt nun das Maass der

Gesammtfälligkeiten das normale Niveau, so wird diese Relation sich folgendermaassen gestalten:

10) $$\frac{{}^{\alpha}R}{S} > \frac{du}{S\,.\,d\alpha}$$

In dieser Relation kommt also neben der unregelmässigen Vertheilung der Risken nach Altersclassen und Quantität auch deren unzureichende Qualität zum Ausdruck. Indem die Ueberschreitung der normalen Gesammtfälligkeiten aus einer mehr oder weniger hohen Uebersterblichkeit entspringt, so muss sich dieselbe naturgemäss in einem Missverhältnisse der rechnungsmässigen zu den wirklich eingetretenen Fälligkeiten kundgeben, woraus sich die Ungleichheit im Wesen der Relation 10) ergibt.

In ähnlicher Weise äussert sich in dieser Form das Wesen der Untersterblichkeit, sobald diesfalls die Gesammtfälligkeit in einem bestimmten Zeitpunkte das normale Niveau, welches durch obige Relation gekennzeichnet ist, unterbietet. Für diesen Fall wird die Form lauten

11) $$\frac{{}^{\alpha}R}{S} < \frac{du}{S\,.\,d\alpha}$$

welche auf diese Art einen wichtigen Anhaltspunkt für die fallweise Beurtheilung eines Versicherungsstockes bietet.

Aus dieser Relation entspringen jedoch noch weitere Conclusionen, welche für diese Untersuchung von nicht zu unterschätzender Bedeutung sind. Betrachtet man die Form 9) näher, so findet man, dass die Höhe der Gesammtversicherungs-Summe S für die Giltigkeit derselben irrelevant ist, so dass unabhängig von dieser folgendes mathematische Gesetz für die normale Beschaffenheit eines Versicherungsstockes Geltung besitzt:

12) $${}^{\alpha}R = \frac{du}{d\alpha} \text{ respective } u = \int {}^{\alpha}R\, d\alpha + Const.$$

Da nun laut Formel 4) dieser Abhandlung die allgemeine Relation

$${}^{\alpha}R = S\,(1 - \cos\alpha)$$

die zu einer beliebigen Zeit vorhandene Prämienreserve-Summe darstellt, so ergibt sich nach vollzogener Substitution dieses Werthes in die Form 12)

13) $$u = S\,.\int (1 - \cos\alpha)\, d\alpha + Const. = S\,.\,\alpha - S\,.\sin\alpha + Const.$$

Es ist nun die Frage, welche Bedeutung diesen Formen zugrunde liegt. Unterwerfen wir das Wesen der einzelnen Werthbegriffe einer näheren Untersuchung, so finden wir, dass die Werthe u und $S\,.\,\alpha$ identische Begriffe darstellen müssen mit den Werthen du und $S\,d\alpha$. Nun bedeutet aber du jene durch die flüssig werdende Prämienreserve gedeckten momentanen Fälligkeiten, daher muss in u der durch die jeweilig verfügbar werdende Prämienreserve gedeckte Theil des zu einem beliebigen Zeitpunkte vorhandenen Gesammtrisicos erblickt werden. Hingegen bedeutet $S\,.\,d\alpha$ die momentane jeweilige Gesammtfälligkeit, demnach wird $S\,\alpha$ das in einem beliebigen Zeitpunkte jeweilig zu tragende Gesammtrisico im engeren Sinne des Wortes

darstellen, und gewissermaassen den baaren Werth aller in der Zukunft sich ergebenden Fälligkeiten kennzeichnen. Wird nun erwogen, dass in der Differenz des jeweilig zu tragenden Gesammtrisicos und jenes Theiles desselben, welcher durch die nach und nach verfügbar werdende Prämienreserve gedeckt erscheint, das Risico sich birgt, welches dem Baarwerthe der aus dem momentanen Versicherungsstocke entspringenden zukünftigen Gesammt-Prämieneinnahme entspricht, so muss laut Form 13) in dem Ausdrucke $S \,.\, sin\ \alpha$ dieses letztere Risico zur Darstellung gelangen.

Es erübrigt nun noch den in der Form 4) dargestellten Werthbegriff $S \,.\, cos\ \alpha$ zu präcisiren, derselbe stellt die Differenz zwischen der Gesammt-Versicherungssumme und der Prämienreserve-Summe dar und muss daher unbedingt den Gesammtbetrag der ferneren facultativen Prämieneinnahmen repräsentiren. Nachdem nun sämmtliche hier vorhandenen Werthbegriffe versicherungstechnisch gekennzeichnet sind, so frägt es sich, in welcher Beziehung die beiden Formen 4) und 13) zu einander stehen. Die beiden bezüglichen Gleichungen

14) $${}^{\alpha}R = S\,(1 - cos\ \alpha) \text{ und } u - C = S\,(\alpha - sin\ \alpha)$$

repräsentiren offenbar in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit das Wesen der Function eines analytisch geometrischen Gebildes, wobei α die vermittelnde Variable zwischen ${}^{\alpha}R$ und u bildet.

Zieht man dieselben näher in Betracht, so ist es unschwer, hier die Gleichung einer Cycloide zu constatiren, deren Abscisse $u - C$ und deren Ordinate ${}^{\alpha}R$ ist. Darnach bedeutet also S den Radius des bildenden Kreises und α den Winkel des zwischen dem jeweiligen Cycloidenpunkte und dem Berührungspunkte des Kreises mit der horizontalen Geraden eingeschlossenen Kreisbogens.

Handelt es sich daher um die Untersuchung eines Versicherungsstockes hinsichtlich seiner Qualität in einem bestimmten Zeitpunkte, so wird der Radius des bildenden Kreises als constant angenommen werden müssen, da einem bestimmten Zeitpunkte der Untersuchung nur eine bestimmte unveränderliche Versicherungssumme S entprechen kann. Soll jedoch die Untersuchung sich auf die Entwicklung eines Versicherungsstockes beziehen, das heisst die qualitative Verbesserung oder Verschlechterung desselben während eines längeren Zeitabschnittes beurtheilt werden, dann muss der Veränderlichkeit des Versicherungsstockes Rechnung getragen werden, indem der Radius des bildenden Kreises als variabel vorausgesetzt wird. Man hat es sodann mit einer Cycloide mit veränderlichem Radius des bildenden Kreises zu thun. Beschränken wir uns vorläufig auf die Untersuchung eines Versicherungsstockes in einem bestimmten Zeitpunkte und setzen mit Rücksicht hierauf die Versicherungssumme S als constant voraus.

In diesem Falle erhalten wir durch Differentiation der Form

15) $${}^{\alpha}R = S\,(1 - cos\ \alpha) \text{ den Ausdruck } \frac{d\,{}^{\alpha}R}{d\,\alpha} = S \,.\, sin\ \alpha = {}^{\alpha}R'$$

bei welchem die merkwürdige Erscheinung zutage tritt, dass hier jenes durch den Baarwerth der zukünftigen Prämieneinnahmen gedeckte Risico durch den Differential-Quotienten der Prämienreserve-Summe zur Darstellung gelangt.

Ferner ergibt sich durch weitere Differentiation dieser Form der Ausdruck

16) $$\frac{d^2\,{}^{a}R}{d\,a^2} = S\,.\,cos\;a = S - {}^{a}R = {}^{a}R''$$

welcher nichts anderes bedeutet, als dass der Gesammtbetrag der ferneren facultativen Prämieneinnahmen gleich ist dem zweiten Differential-Quotienten der Prämienreserve-Summe. Die naturgemässe relative Kleinheit des Winkels a macht es mit Rücksicht auf das Wesen desselben als Maassstab der jeweiligen durchschnittlichen Bestandesdauer sämmtlicher Versicherungen erklärlich, dass obige Differential-Quotienten, deren Derivation nach der Grösse dieses Winkels erfolgt, solch' bedeutenden Werthen entsprechen.

Diesen Ergebnissen zufolge bedeutet nun ${}^{a}R$ die Prämienreserve-Summe, ${}^{a}R''$ als zweiter Diverential-Quotient derselben nach besagter Derivation die Summe der ferneren facultativen Prämieneinnahmen, daher die Differentialgleichung

17) $${}^{a}R + {}^{a}R'' = S$$

in welcher die Gesammt-Versicherungssumme durch die Prämienreserve-Summe zum Ausdrucke gelangt.

Ferner ist nach den Formen 13) und 14) die Summe des durch Baarwerth der ferneren Prämieneinnahme und die Prämienreserve-Summe gedeckte Risico

18) $${}^{a}R' + u - C = S\,a$$

das ist das gesammte durch den Versicherungsstock repräsentirte momentane Risico in einem bestimmten Zeitpunkte.

Handelt es sich darum, den natürlichen Reservezuwachs eines fixen Versicherungsstockes während einer unendlich kurzen Frist in ein Verhältniss zu jener durch die normalen Fälligkeiten flüssig werdenden Reserve innerhalb der gleichen Frist zu bringen, so erreicht man dies durch die Form

19) $$\frac{d\,{}^{a}R}{du} = \frac{S\,.\,sin\;a}{S\,(1 - cos\;a)} = cotg\,\frac{a}{2} = tg\,\frac{\pi - a}{2}$$

welche nichts weniger besagt, als dass obiges Verhältniss durch die Cycloidentangente zur Darstellung gelangt.

Diese unsere Ausführungen lassen erkennen, dass die Anhaltspunkte für die qualitative Untersuchung eines Versicherungsstockes hauptsächlich in den Verhältnissen der rechnungsmässigen Ergebnisse zu den thatsächlichen bestehen, deren systematische Anordnung das Wesen der hier dargestellten Methode bildet.

Reflexionen über das Steigen des Zinsfusses im ursächlichen Zusammenhange mit den wirthschaftlichen Verhältnissen.

I.

Unter dem Begriff des Capitals vom volkswirthschaftlichen Gesichtspunkte muss das gesammte Vermögen, so weit es bei der Production mitwirkt, verstanden werden. Dem wirthschaftenden Individuum hingegen gilt das Capital einfach als Erwerbsmittel, ob es nun wirklich Productionsmittel ist oder nicht. Die menschliche Thätigkeit ist eine capitalsbildende, indem sie einerseits den nichtproductiven Consum in einen productiven verwandelt oder jenen durch diesen ersetzt und andererseits nicht blos für die Gegenwart schafft durch Anhäufung von Vorräthen, sondern auch durch Schaffung neuer Productionsmittel die Production der Zukunft steigert. Das Capital selbst ist aber vom individuell wirthschaftlichen Standpunkte blos Erwerbsmittel und erfüllt in seiner Nutzung den Zweck. Die Nutzung des Capitals ist also wirthschaftlich gerechtfertigt und kann gegen eine vereinbarte Vergütung, welche in Form der Zinsen entrichtet wird, auch auf Andere übertragen werden.

Der Zinsfuss ist der proportionale Ausdruck der relativen Capitalsverwerthung. Die Höhe des Zinsfusses ist bedingt durch das Verhältniss von Angebot und Nachfrage nach Capitalien.

Das Capital trägt zur Förderung der Arbeit bei und kann daher ohne Einbusse seiner absoluten Menge ebenfalls eine Arbeit verrichten, welche auch entsprechend entlohnt werden muss. Den verhältnissmässigen Antheil, welchen das Capital an dem Nutzen der Gesammtarbeit (Production) für deren Förderung nimmt, kann man als einen dem Zinsfusse entsprechenden Aequivalenten betrachten. Dort wo die Production durch das Capital gefördert wird, ist daher dessen Leistung zumeist eine afficirende und liegt in dieser seine eigentliche Nützlichkeit. Dieser Antheil an der Förderung der Production ist jedoch einer periodischen Veränderlichkeit unterworfen, die in den allgemeinen wirthschaftlichen Verhältnissen, mit denen die Erspriesslichkeit der Production und somit auch der jeweilige Capitalsbedarf zusammenhängt, zum Ausdrucke kommt. Die Nutzbarmachung des Arbeitszweckes, welche von Angebot und Nachfrage abhängig ist, kann daher als maassgebender Factor für die Leistungsintensität des Capitals in Verbindung mit der Arbeit angesehen werden, indem der jeweilige Stand der Arbeitsergiebigkeit, das ist des Productions-Erträgnisses und der mit derselben zunehmenden wirthschaftlichen Leistungsintensität den Capitalsbedarf steigert. In Folge dessen ergibt sich durch erhöhte Nutzbarmachung des Arbeitszweckes eine Steigerung der relativen Capitalsverwerthung, womit selbstverständlich auch die Eventualität einer besseren Verzinsung des Capitals zusammenhängt. Bei geringerer Arbeitsergiebigkeit hingegen wird sowohl die nackte Arbeitskraft, als auch

das zu deren Förderung nöthige Capital an relativer Verwerthungserspriesslichkeit verlieren.

Die mehr oder minder grosse Inanspruchnahme des Productivcredits ist aber auch von örtlichen und zeitlichen Umständen abhängig und kann daher ein mittlerer, überall maassgebender Zinssatz nur unter der Voraussetzung sich bilden, dass die Concurrenz auf dem Capitalsmarkte eine voll wirksame ist. Aus diesem Grunde werden durch eine ausgebreitete Organisation des Credits jene Factoren gefördert, welche eine regelmässige und rasche Ausgleichung von Angebot und Nachfrage möglich machen. Ebenso werden durch Ausdehnung und Verbesserung des gesammten Verkehrswesens jene Extreme einander genähert, innerhalb deren der Zinsfuss zeitlich und örtlich zu schwanken pflegt.

Mit der industriellen und verkehrspolitischen Entwicklung des letzten Jahrhunderts, welche eine continuirliche Steigerung des Volksvermögens hervorbrachte, sowie mit der allgemeinen wirthschaftlichen Entfaltung und ökonomischen Kräftigung des Staatswesens im Allgemeinen, welche sich im Laufe der letzten Decennien vollzogen hat, ist die relative Höhe des Zinsfusses in einem nicht unbedeutendem Maasse gesunken. Durch eine rationelle Systemisirung und Sicherung der Einnahmsquellen haben nicht nur die Staatsschulden überhaupt, sondern auch die öffentlichen Privatschulden an Securität gewonnen, und indem mit der wirthschaftlichen Kräftigung auch eine gewisse staatliche Controle über die Einhaltung der rechtlichen Vorträge bei Privatschulden immer mehr sich Geltung verschaffte und auf diese Art die Sicherheit des mobilen Eigenthums gehoben wurde, nahm der Zinsfuss eine desto grössere Bewegung nach abwärts, je mehr das sich stetig häufende Capital verzinsliche Anlage suchte. Die ersten Phasen dieser Erscheinung reichen in diejenige Zeit, wo die ersten bedeutenden industriellen Betriebsgesellschaften sich zu bilden anfingen. Unser Jahrhundert ist es, welches durch seine Erfindungen auf allen Gebieten das Capital zwang, in Action zu treten. Der Ersatz der Landstrassen durch Eisenbahnen verursachte in dieser Beziehung einen nie geahnten Aufschwung, die Welt rückte mit diesem neuen Communicationsmittel immer näher zusammen, wodurch Handel und Verkehr in jeder Weise gehoben wurden und bedeutende Reformen auch auf anderen Gebieten des Verkehrs durch Schaffung neuer Institutionen nach sich ziehen mussten. Hiedurch kam der Werth der Arbeit auf allen Gebieten immer mehr zu seiner wahren Geltung. Das Capital als fördernder Motor derselben suchte die industrielle Investition und bildete sich auf diese Weise ein ganz neues Verhältniss dieser beiden wirthschaftlichen Factoren heraus. Hiezu hatte nicht wenig der Ausbau eines geordneten finanzwirthschaftlichen Systems und die mit demselben verbundene zielbewusste Gründung verschiedener wirthschaftlichen Zwecken dienender Bank- und Creditinstitute beigetragen. Diese übten besonders jenen Einfluss aus, welcher nothwendig war, um Angebot und Nachfrage nach Capital in vollem Maasse zur Geltung kommen zu lassen. Hieraus zog nun auch der Productivcredit Vortheil. Das rapide

Anwachsen des mobilen Capitals und der mit demselben verbundene förmliche Wettkampf um eine geeignete sichere Capitalsanlage hatte die Prätensionen des öffentlichen Gläubigers bedeutend herabgedrückt. Bis vor wenigen Jahren hatte es daher in der ganzen Welt den Anschein, als ob wir uns in einer Zeit dauernd herabgehender Zinssätze befänden. Dieses Verhältniss wurde hervorgerufen durch eine längere Friedensperiode, durch die Beendigung des Ausbaues der hauptsächlichen Eisenbahnnetze und durch sonstige wirthschaftliche Momente.

Für die Höhe des Zinsfusses ist bestimmend nebst der Quantität des Capitalsbedarfes auch die Summe der vorhandenen Circulationsmittel. Diese aber waren in jener Periode in übermässiger und unnatürlicher Weise durch zufällige Factoren vermehrt worden. Amerika war auf Grund der verhängnissvollen Silbergesetze gezwungen, Monat für Monat ganz ohne Rücksicht auf den Bedarf des Landes an neuen Circulationsmitteln Silber anzukaufen und daraus neues amerikanisches Geld zu fabriciren. Die Folge davon war ein continuirlicher grosser Goldexport aus den Vereinigten Staaten, der die Circulation der anderen Länder alimentirte. Portugal ging, als Consequenz des finanziellen Zusammenbruches, von einer praktisch bestandenen Goldwährung zu einer reinen Papierwährung über und führte successive wohl den ganzen im Lande vorhanden gewesenen Goldvorrath aus; man schätzte diesen auf circa 12 bis 15 Millionen Pfund Sterling. Spanien trat ununterbrochen als Käufer für Silber auf, münzte dieses zu Geld um und exportirte dagegen Gold. Auch aus anderen, und zwar überseeischen Ländern (Argentinien, Brasilien u. s. w.) strömte aus ähnlichen Gründen dem Weltmarkte Gold zu. Wir waren also in jener Zeit des sinkenden Zinsfusses nicht etwa nur auf die normale Goldproduction angewiesen; es standen dem Geldmarkte vielmehr aus den angeführten Quellen so reichliche Zuflüsse zu Gebote, dass nicht nur die grossen Centralbanken ihre Goldbestände verstärken, sondern auch die für die Währungsaction Oesterreich-Ungarns und Russlands erforderlichen Goldmengen ohne Beengung der Märkte beschafft werden konnten. Da sich gleichzeitig die Productionsziffern des gelben Metalls in aufsteigender Richtung bewegten, so war man leicht dazu verführt, diesen Umstand nebst der natürlichen fortwährenden Capitalsvermehrung als einzig ausschlaggebend für die Bewegung des Zinsfusses anzusehen. Man war geneigt, die Richtung des sich immer mehr ermässigenden Leihwerthes des Capitals als für alle Zukunft feststehende natürliche Entwicklung zu betrachten.

Die ganze wirthschaftliche Entwicklung unserer modernen Zeit ist auf die Capitals-Association aufgebaut. Grosse Werke, die nach früheren Begriffen jahrzehntelange Arbeit erfordert hätten, werden heutzutage, Dank der neuen Macht der Capitals-Vereinigung, mit einer Leichtigkeit in Angriff genommen, die vergangenen Generationen titanenhaft erschienen wäre. Nur den technischen Schwierigkeiten wird noch Rechnung getragen. Haben aber einmal die Fachleute, die Ingenieure irgend ein noch so gigantisches Unternehmen für durchführbar erklärt, dann ist auch das letzte Wort gesprochen. Die

Geldfrage ist zur Nebensache geworden, sobald die Wahrscheinlichkeit der Rentabilität nachgewiesen erscheint. Selbst die staatssocialistischen Tendenzen der neueren Gesetzgebung haben hieran nur wenig ändern können; ohne wesentlichen Erfolg sind bis jetzt alle Maassregeln geblieben, die der Entwicklung der capitalistischen Unternehmungen hemmend in den Weg treten sollten.

Niedriger Zinsfuss und leichte Geldbeschaffung gestatteten speciell in Deutschland den städtischen Verwaltungen und anderen Behörden, ihr Augenmerk auf nothwendige und nützliche Verbesserungen zu lenken. Eine grosse Anzahl neu aufgenommener Stadtanleihen bezeichnet die Verwendungszwecke der neuen Mittel, Assanirungen, Errichtung von Schlachthäusern, Anlage von elektrischen Werken u. A. m. Die weitere Verbesserung der Verkehrswege und der Bau von Eisenbahnen nimmt einen neuen Aufschwung. Eine ausgedehnte Thätigkeit entfaltet sich im Kleinbahnwesen und in der Anlage von elektrischen Bahnen. Aber auch in anderen Ländern wird durch die Thätigkeit finanzieller Kreise der Eisenbahnbau unterstützt, und dieser bringt direct und indirect dem Capital und der Industrie neue Beschäftigung. Dies Alles erfordert aber ungeheuere Capitalien.

Können wir uns wundern, dass alle diese Momente der herabgehenden Zinsfussbewegung endlich ein Halt geboten haben? Es ist aber noch eine Anzahl anderer gewichtiger Factoren hinzugetreten und hat einen starken Einfluss ausgeübt, um die Bewegung in eine veränderte Richtung zu leiten. Es ist ein alter Erfahrungssatz, dass durch die Werthezerstörung, welche Kriege hervorbringen, und durch die Neuanschaffungen, die ihnen auf dem Fusse folgen, die wirthschaftliche Thätigkeit eine Anregung empfängt, die zur Erhöhung der Zinssätze drängt. Die letzten Jahre haben uns hinter einander den japanisch-chinesischen, den griechisch-türkischen und den amerikanisch-spanischen Krieg gebracht. Eine ganz neue Industrie — die elektrische — ist entstanden und hat eine um so bedeutendere Entwicklung genommen, als sie sich zugleich drei grossen Zwecken, der Beleuchtung, der elektrischen Traction und der Kraftübertragung widmete, wobei als vierter noch die Elektrochemie hinzutritt. Speciell in Deutschland bindet die elektrische Industrie sehr bedeutende Capitalsmengen, da ihre Thätigkeit sich durchaus nicht auf das Inland beschränkt, sie es vielmehr verstanden hat, sich in fast allen europäischen Staaten und auch in überseeischen Ländern einen weiteren Wirkungskreis zu erobern. Es steht wohl mit den vorerwähnten kriegerischen Ereignissen im Zusammenhange, dass überall die Eisen- und Stahlindustrie ebenso wie der Schiffsbau durch die vergrösserten Rüstungen eine ausgedehnte und lohnende Beschäftigung erhalten.

Wir haben also hier eine grosse Anzahl von Elementen, welche sämmtlich dem Capital neue oder verstärkte Erwerbsquellen eröffnen. Die sonstige Thätigkeit der Industrie und des Handels hat ebenfalls vermehrte Umsätze gebracht, es ist daher nur natürlich, wenn eine Steigerung der relativen Capitalsverwerthung eintritt.

Empirische Grundlagen für die Altersversicherung.

Es ist von nicht geringer Bedeutung für die versicherungstechnischen Berechnungen der Beamtenpensionsfonde und Altersversorgungscassen der verschiedenen Berufsarten, dass dieselben auf einer richtig gewählten Grundlage beruhend, vorgenommen werden. Eine systematische Zusammenstellung solcher Grundlagen nach dem bestehenden Quellenmateriale wurde seinerzeit bei Gelegenheit der Ausarbeitung der Normen für die Altersversorgung eidgenössischer Beamten und Angestellten von Dr. G. Schärtlin [1]) veranlasst und wir halten es für zweckmässig, in unserem Werke jenes werthvolle Materiale zum allgemeinen Gebrauche festzuhalten, indem wir dasselbe hier wiedergeben.

Die Gründe, welche die Versetzung in den Ruhestand veranlassen: Gebrechlichkeit, durch Krankheit oder durch Unfälle hervorgerufene Leibesschäden, beschleunigen auch das Absterben der Dienstunfähigen. Die Sterbetafel der Dienstunfähigen muss demzufolge von der der allgemeinen Bevölkerung, welche die Diensttauglichen und die Dienstunfähigen umfasst, und noch mehr von derjenigen der Diensttauglichen allein, stark abweichen. Man erkennt zum vornherein, und die Erfahrung bestätigt es, dass die Abweichung im jugendlichen Alter, wo nur schwere Störungen des Organismus zur Dienstunfähigkeit führen, am stärksten sein muss.

Die Erhebungen haben gezeigt, dass die Sterbenswahrscheinlichkeit Dienstunfähiger, statt mit dem wachsenden Alter zuzunehmen, bis gegen das Alter 55 fällt, um erst von dort an langsam zu steigen. Sterbetafeln für Dienstuntaugliche haben hergeleitet Kaan, Caron, Küttner, Gerkrath, Wiegand, Behm, Kinkelin und Zimmermann. Im Berichte, welchen Kaan „über die im Auftrage des Ackerbauministers vorgenommenen Berechnungen betreffend die österreichischen Bruderladen" 1885 erstattet, sind für die österreichischen Bergarbeiter die Sterbenswahrscheinlichkeiten der Dienstuntauglichen mitgetheilt; die der preussischen Bergarbeiter von Caron in seiner Schrift „die Reform des Knappschaftswesens und die allgemeine Arbeiterversicherung", Berlin 1882. Küttner, „die Invalidität und Invaliditätsversicherung der Steinkohlenbergleute", in der Zeitschrift für das Berg-, Hütten- und Salinenwesen 1881, XXIX. Band, gibt die entsprechenden Werthe für die in Frage stehenden Arbeiter. Die folgenden Tafeln beziehen sich sämmtlich auf die Erhebungen, welche vom Verein Deutscher Eisenbahnverwaltungen angestellt und von Wiegand, Behm und Zimmermann verarbeitet worden sind.

---

[1]) Siehe „Zeitschrift für schweizerische Statistik": Ueber die Höhe der finanziellen Belastung, welche durch die Altersversorgung der eidgenössischen Beamten und Angestellten voraussichtlich hervorgerufen wird.

Die Wiegand's [2]) bezieht sich auf die Jahre 1868/69, die vom Behm [3]) auf 1868 bis 1873, die Gerkrath's [4]) auf 1878; Kinkelin [5]) hat die Jahre 1868 bis 1879 und Zimmermann [6]) endlich 1868 bis 1884, also volle 15 Jahre zusammengefasst. Die folgende Zusammenstellung gibt eine kleine Uebersicht über die Ergebnisse dieser Tafeln.

Alter	Sterbenswahrscheinlichkeit der Dienstunfähigen bei den							
	Deutschen Eisenbahnen in den Jahren					Steinkohlenbergleuten nach Küttner	Preussischen Bergarbeitern nach Caron	Oesterreichischen Bergarbeitern nach Kaan
	1868/69 nach Wiegand	1868/73 nach Behm	1878 nach Gerkrath	1868/79 nach Kinkelin	1868/84 nach Zimmermann			
25	.	0·1548	0·0738	0·1149	0·0831	0·0471	0·0603	0·1881
30	.	0·0851	0 0602	0 0628	0·0656	0·0399	0 0513	0·1034
35	0·0812	0·0540	0·0824	0·0612	0·0639	0·0495	0·0527	0·0656
40	0·0735	0 0713	0·0643	0 0625	0·0622	0·0515	0·0576	0 0866
45	0·0475	0·0545	0·0679	0 0559	0·0530	0·0573	0·0651	0 0662
50	0·0499	0·0503	0·0515	0·0536	0·0510	0·0597	0·0673	0·0612
55	0·0628	0·0469	0 0550	0 0500	0·0485	0·0610	0·0687	0·0569
60	0·0688	0·0580	0·0625	0·0577	0·0512	0·0677	0·0760	0·0705
65	0·0842	0·0686	0·0676	0 0664	0 0629	0·0979	0 0939	0·0834
70	0·0800	0·0804	0 0729	0·0768	0·0780	0·1111	0·1157	0·0977
75	.	0·1165	0·0920	0·1157	0·1068	0·1235	0·1512	0·1416
80	.	0·1408	0·2778	0·1689	0·1626	0·1496	0·2485	0·1933

Am passendsten erscheint für unseren Zweck die Tabelle von Zimmermann. Ihre Brauchbarkeit wird durch den Umstand, dass die Dienstunfähigen der Eisenbahnen eine etwas hohe Zahl von solchen Personen aufweisen, die durch einen Unfall dienstuntauglich geworden und daher schneller absterben, nur wenig geschmälert. Denn die Zahl dieser Personen ist im Verhältnisse zu der der Dienstuntauglichen überhaupt doch eine beschränkte.

In den Jahren 1877 bis 1886 [7]) waren bei den deutschen Eisenbahnen von je 100 Dienstunfähigen, welche mit Ruhegehalt entlassen wurden, nur 6 Percent solche, deren Rücktritt durch einen Unfall verursacht wurde. Da auch im Post- und Telegraphendienst Berufsunfälle keineswegs selten sind, so wird man keinen Anstand nehmen, die Zahlen Zimmermann's als für die Dienstuntauglichen zutreffend anzunehmen. Eher noch könnte ein anderer Einwand erhoben werden. Das Absterben der Dienstuntauglichen wird, nachdem in den ersten Jahren des Rücktrittes die an Gebrechen oder an den Folgen von Unfällen schwer Leidenden weggestorben, sich mehr und mehr dem der gewöhnlichen Bevölkerung nähern, im hohen Alter mit ihm übereinstimmen oder sogar noch günstiger sein. Statistische Erhebungen, welche sich auf die Zeit unmittelbar nach dem Rücktritte beschränken, müssen folglich zu hohe Sterbenswahrscheinlichkeiten liefern. Zimmermann hat deshalb im III. Heft seiner Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeits- und Sterbensstatistik unter der Annahme, dass ein x jähriger Dienstunfähiger, seit dessen

[2]) Journal des Collegiums für Lebensversicherungs-Wissenschaft, Band II.

[3]) Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- und Morbiditäts-Verhältnisse bei dem Beamtenpersonale der deutschen Eisenbahnverwaltungen, 1876, Tab. XV.

[4]) Ueber die Höhe der Beiträge für die Arbeiter-Versicherung, Berlin 1881.

[5]) In einem ungedruckten Gutachten über die Hilfscassen der Jura-Bern-Luzern-Bahn.

[6]) Ueber Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältnisse, Berlin 1886.

[7]) Zimmermann, Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeits- und Sterbensstatistik, Berlin 1888.

Entlassung schon 2 oder mehr Jahre vergangen sind, die Lebenswahrscheinlichkeit λ_x, wenn dagegen seit der Entlassung noch nicht zwei Jahre verflossen sind, die Lebenswahrscheinlichkeit $(1-\varepsilon)\lambda_x$, wo ε eine für alle Alter gleichbleibende Constante bezeichnen soll, Tafeln für die Sterbenswahrscheinlichkeiten gekräftigter und nicht gekräftigter Ruhegehaltsempfänger bestimmt. Das folgende Täfelchen gibt die erhaltenen Resultate.

Berechnete Sterbenswahrscheinlichkeiten für

Alter Jahre	gekräftigte Ruhegehaltsempfänger	nicht gekräftigte Ruhegehaltsempfänger	Alter Jahre	gekräftigte Ruhegehaltsempfänger	nicht gekräftigte Ruhegehaltsempfänger	Alter Jahre	gekräftigte Ruhegehaltsempfänger	nicht gekräftigte Ruhegehaltsempfänger
25	0·0178	0·1062	49	0·0223	0·1103	73	0 0791	0·1620
26	0·0156	0·1042	50	0·0223	0·1103	74	0 0872	0·1693
27	0·0139	0·1026	51	0·0223	0·1103	75	0·0960	0·1774
28	0·0128	0·1017	52	0·0223	0·1103	76	0·1070	0·1874
29	0·0124	0·1013	53	0·0223	0·1103	77	0·1176	0·1970
30	0 0127	0·1016	54	0·0223	0·1103	78	0·1311	0·2093
31	0 0138	0·1025	55	0·0223	0·1103	79	0·1424	0·2196
32	0·0156	0·1042	56	0·0223	0·1103	80	0·1574	0·2332
33	0·0182	0·1066	57	0·0223	0·1103	81	0·1676	0·2425
34	0·0199	0 1081	58	0 0232	0 1111	82	0·1811	0·2548
35	0·0212	0 1092	59	0 0242	0·1120	83	0·1951	0·2675
36	0·0223	0·1103	60	0·0253	0·1131	84	0·2117	0·2827
37	0 0223	0·1103	61	0 0274	0·1150	85	0·2305	0·2997
38	0·0223	0·1103	62	0·0301	0·1174	86	0·2518	0·3191
39	0·0223	0·1103	63	0·0331	0 1201	87	0·2762	0·3414
40	0·0223	0·1103	64	0·0369	0·1235	88	0·3045	0·3671
41	0·0223	0 1103	65	0·0408	0·1272	89	0·3377	0·3973
42	0·0223	0 1103	66	0·0445	0·1305	90	0·3772	0·4332
43	0·0223	0·1103	67	0·0487	0·1343	91	0·4254	0·4771
44	0·0223	0·1103	68	0·0526	0·1379	92	0·4861	0·5324
45	0·0223	0·1103	69	0·0568	0·1417	93	0·5668	0·6058
46	0 0223	0·1103	70	0·0612	0·1457	94	0·6858	0·7140
47	0.0223	0·1103	71	0 0661	0·1501	95	1·0000	1·0000
48	0.0223	0·1103	72	0 0721	0·1556			

Die Annahme, welche Zimmermann mangels statistischer Unterlagen zu machen gezwungen ist, also die Voraussetzung, dass sich die Dienstunfähigen immer in zwei Gruppen nach der seit der Entlassung verflossenen Zeit eintheilen lassen, die Constanz der Grösse ε für alle Alter, die willkürliche Festsetzung dieser Constanten auf 0·009, das alles sind Hypothesen, welche, wie übrigens der Autor selbst hervorhebt, noch der Bestätigung durch die Erfahrung bedürfen.

Was das Eintreten der Dienstunfähigkeit betrifft, so ist dasselbe nicht, wie das Absterben, ein zu einer bestimmten Zeit eintretendes, vom Willen losgelöstes Ereigniss. Eine gewisse Willkür, eine in der Natur der Sache liegende Unsicherheit bei der Beurtheilung, ob ein Beamter dienstunfähig sei, ist schwer zu vermeiden. Zufälligkeiten, individuelle Anschauungen werden dabei nicht zu beseitigen sein. Das spiegelt sich denn auch in den Zahlen wieder, welche den Gang der Dienstunfähigkeit darstellen sollen. Immerhin besitzen sie doch so viel Regelmässigkeit, dass sie der Rechnung zur Unterlage dienen können.[8]) Wir geben zur Vergleichung die folgende Uebersicht.

[8]) Die für die verschiedenen Berufsarten hergeleiteten Tafeln finden sich aus besprochen und zusammengestellt in der Denkschrift, welche dem Deutschen „Ent Gesetzes betreffend die Alters- und Invaliditäts-Versicherung“ beigegeben ist.

Wahrscheinlichkeit im nächsten Jahre dienstunfähig zu werden.

Alter	der Eisenbahnbeamten in den Jahren: 1868 bis 1873 nach Behm (für das Zugspersonal)	1868 bis 1884 nach Zimmermann (für das Zugspersonal)	1868 bis 1873 nach Behm (für das Gesammtpersonal)	1868 bis 1884 nach Zimmermann (für das Gesammtpersonal)	nach Behm (für das Nichtzugspersonal)	1868 bis 1884 nach Zimmermann (für das Nichtzugspersonal)	1868 bis 1879 nach Kinkelin für das Gesammtpersonal	1882 bis 1884 nach Zimmermann für Bureau-Beamte	der Bergarbeiter: des preussischen Steinkohlenbergbaues in den Jahren 1874 bis 1878 nach Küttner	des preussischen Steinkohlenbergbaues 1869 bis 1883 nach Küttner	des preussischen Bergbaues 1870 bis 1879 nach Caron	des preussischen Bergbaues 1868 bis 1878 nach Morgenbesser	des österr. Bergbaues nach Kaan	der Maschinenbau- & Metallarbeiter nach Zillmer	der Arbeiter verschiedener Berufe nach Behm
20	0·00052	0·00031	0·00022	0·00021	0·00038	0·00021	0·00034	0·00020	0·00310	0·00220	0·00295	.	0·00037	0·00100	0·00019
25	0·00117	0·00118	0·00053	0·00072	0·00044	0·00054	0·00081	0·00038	0·00420	0·00320	0·00373	0·00259	0·00092	0·00132	0·00038
30	0·00218	0·00281	0·00125	0·00153	0·00084	0·00096	0·00152	0·00079	0·00530	0·00600	0·00472	0·00421	0·00215	0·00183	0·00076
35	0·00342	0·00447	0·00212	0·00284	0·00172	0·00220	0·00257	0·00181	0·00890	0·00900	0·00754	0·00787	0·00362	0·00267	0·00152
40	0·00671	0·00740	0·00382	0·00474	0·00326	0·00382	0·00456	0·00314	0·01860	0·01650	0·01278	0·01383	0·00652	0·00410	0·00305
45	0·01005	0·01129	0·00662	0·00811	0·00662	0·00698	0·00821	0·00463	0·03580	0·02460	0·02332	0·02219	0·01130	0·00663	0·00609
50	0·01897	0·02159	0·01217	0·01557	0·01272	0·01375	0·01550	0·01012	0·06960	0·06650	0·04335	0·05104	0·02076	0·01129	0·01218
55	0·03568	0·04163	0·02317	0·02935	0·02558	0·02687	0·02983	0·01544	0·11060	0·11200	0·08056	0·09566	0·03953	0·02023	0·02437
60	0·05618	0·07623	0·03928	0·05728	0·04651	0·05427	0·05584	0·03353	0·22800	0·19710	0·10331	0·16729	0·06709	0·03815	0·04873
65	0·09765	0·12207	0·06763	0·10002	0·07426	0·09752	0·09132	0·07630	0·39500	0·28660	0·13249	0·25823	0·11564	0·07571	0·09747
70	0·15789	0·18165	0·10153	0·16023	0·10633	0·15781	0·12952	0·15509	0·58280	0·43230	0·25989	0·28294	0·17330	0·15814	0·19493
75	0·72022	0·28962	0·13306	0·20704	0·13782	0·20617	0·16506	0·33091	0·10000	0·58430	0·50979	0·61885	0·22883	0·39580	0·38986
80	.	.	0·40255	0·23134	0·25822	0·23134	0·24750	0·74399	.	0·91470	1·00000	1·00000	0·70291	.	0·77972
85	.	.	.	0·25914	0·62453	0·25914	.	.	.	.	.	.	.	.	.
90	.	.	.	0·80000	.	0·80000	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Zur Frage einer gemeinschaftlichen Statistik in der Feuerversicherung.

Das Bedürfniss nach einer auf umfassendem statistischem Materiale fussenden Grundlage für die Prämienbemessung in der Feuerversicherung tritt an die Anstalten, welche diesen Assecuranzzweig cultiviren, mit stets grösserer Nothwendigkeit heran. Die Zeit des gewinnbringenden Geschäftes scheint für die Feuerversicherung vorüber zu sein, denn die Anstrengungen derselben, die in Folge Concurrenzirung über das Maass jeder Zulässigkeit reducirte Prämie wieder auf ein den Anforderungen entsprechendes Niveau zu bringen, sind nur ein Beweis dafür, dass die Grenze zwischen Verlust und Gewinn im Feuerversicherungs-Geschäfte eine immer weniger definirbare wird. So lange die Prämien reichlich genug bemessen waren, um für alle Fälle genügende Sicherheit für jene durch Brand verursachten Verluste zu gewähren, konnte man es für überflüssig halten, neben den vorhandenen, empyrisch kaum zulänglichen Behelfen noch andere technisch verlässlichere bei der Prämienbemessung zu Rathe zu ziehen. Doch als die stets wachsende Concurrenz die Prämie auf ein tieferes Niveau herabzudrücken begann, fing man an den Werth der Statistik für die Feuerversicherung zu begreifen, und traf Anstalten, aus dem vorhandenen Materiale, Conclusionen für die Prämienbemessung zu ziehen. So entstand die Hausstatistik der einzelnen Feuerversicherungs-Anstalten, welche jedoch getrennt auf einem relativ mässigen Materiale basirend, nur unzureichende Resultate zu liefern vermag. Immer deutlicher macht sich daher das Bedürfniss wahrnehmbar, eine Statistik auf breiterer Grundlage zu schaffen und die Erfahrungen sämmtlicher Brandschaden-Versicherungs-Gesellschaften eines oder mehrerer Länder dem gemeinsamen Zwecke zu unterordnen. Von nicht geringer Bedeutung ist diesbezüglich der Umstand, dass seit Jahren bereits eine vollständige auf wissenschaftlichen Normen beruhende versicherungstechnische Basis zur Ermittlung der Feuerprämie vorhanden ist,*) dieselbe jedoch mit Rücksicht auf die unzureichenden statistischen Hilfsmittel nicht recht zur Anwendung zu gelangen vermag, denn nur mit Hilfe eines umfassenden statistischen Materiales wäre es möglich, den relativen Einfluss der einzelnen Gefahrmomente für die Entstehung eines Brandes und dessen Verbreitung zuverlässig festzustellen. Die functionelle Darstellung des Einflusses der einzelnen Gefahrmomente auf das Risico erfolgt nach unserer Methode mit Hilfe bestimmter Zahlenäquivalente, welche in vier Intensitätenclassen zerfallend, dessen jeweilige Abstufung darstellen. Auf dem Wege der einfachen Summirung der äquivalirten Gefahrmomente

*) Siehe „Mathematische Limitirung der Feuerversicherungs-Prämie" II. Lieferung dieses Werkes.

wird sodann die relative Höhe des zu übernehmenden Risicos durch eine Zahl (Gefahren-Aquivalentensumme) festgestellt, mit deren Hilfe schliesslich unter Berücksichtigung einer bestimmten Grundprämie die gesuchte Prämie rechnungsmässig zur Ermittlung gelangt. Es handelt sich also darum, auf statistischem Wege die Beschaffenheit der einzelnen Gefahrmomente nach ihrer Intensität zu bestimmen.

Nachdem wir die Nothwendigkeit und den Nutzen einer gemeinschaftlichen Statistik der Feuerversicherungs-Gesellschaften genügend erörtert, mag die nachfolgende Untersuchung der zweckmässigsten Art der Verwirklichung einer solchen Einrichtung gelten:

Möglich sind zwei Wege; gemeinsame Voraussetzung beider ist die Constituirung eines statistischen Centralbureaus; ihr Unterschied besteht darin, ob man den Schwerpunkt der statistischen Arbeit in die Bureaus der einzelnen Gesellschaften verlegt, so dass diesen die statistische Zergliederung ihres eigenen Geschäftes nach gemeinsamen Grundsätzen und Formularen überlassen bliebe und das Centralbureau nur als Sammelstelle des fertig bearbeiteten Materiales zu dienen hätte, oder ob die Bearbeitung des Rohmateriales, welches jede Gesellschaft für ihr Geschäft dem Centralbureau zu liefern hätte, dem Letzteren obliegen soll. Erwägt man aber, dass die Methode jeder wissenschaftlichen Statistik, das Zählkartensystem, die einzige ist, welche allen Anforderungen gerecht zu werden vermag, und die einzige, welche eine mit der Zeit nothwendig werdende Fortbildung der Feuerversicherungs-Statistik ermöglicht, so ergibt sich die Nothwendigkeit der Uebertragung der eigentlich statistischen Arbeiten an ein Centralbureau. Wenn man von anderer Seite ein sogenanntes Listensystem empfohlen hat, so geschah es offenbar nur, um den Gesellschaften die Anregung zu systematischer Statistik innerhalb des eigenen Geschäftskreises zu geben; ein Zweck, welcher mit den Listen nicht von vornherein beabsichtigt wäre, könnte auch niemals erreicht werden, es sei denn, dass man das Urmaterial von A bis Z wieder durcharbeitete. Der lebendige Fortschritt der Verhältnisse wird aber immer wieder neue Gesichtspunkte heranrücken. Die statistische Ausbeutung der Zählkarten würde die Vereinigung gründlicher Kenntniss der Feuerversicherungs-Technik mit statistischer Bildung in einer Person bedingen und dies ist ein Grund, wegen dessen die Ausführung einer solchen Statistik nicht wohl den einzelnen Gesellschaften überlassen werden kann, denn nicht jeder und namentlich nicht den kleineren dürfte eine solche Kraft zur Verfügung stehen. Ein zweiter nicht minder zwingender Grund für die Ueberweisung der eigentlichen statistischen Arbeit an ein Centralbureau ist die ganz bedeutende Kostenersparniss, welche dadurch erzielt würde; derartige Arbeiten lassen sich eben nur durch eine zweckmässige Centralisation ohne drückende Opfer für die einzelnen Theilnehmer durchführen, ganz abgesehen davon, dass die eigentliche Anwendung der statistischen Beobachtungsgrundsätze leidet und die Richtigkeit der Ergebnisse dadurch ungünstig beeinflusst werden könnte. Es wird ungefähr zutreffen, dass das zehnfache Arbeitsquantum durch die

doppelte Anzahl derjenigen Arbeitskräfte, welche eine Gesellschaft für die statistische Bearbeitung ihres Geschäftes nöthig hätte, durch ein Centralbureau geleistet werden kann.

Praktisch würde sich die Sache etwa folgendermaassen gestalten: Jede der zu einer statistischen Vereinigung zusammengetretenen Gesellschaften hätte nach einheitlichem Verfahren auf gemeinsamen Formularen, Zählkarten anzufertigen: 1. für jede neue Police mit sorgfältiger Beschreibung des Objectes hinsichtlich der Gefahrmomente, 2. für jeden Nachtrag zu diesen Policen, sofern damit eine Veränderung der der statistischen Beobachtung unterliegenden thatsächlichen Momente verbunden ist, 3. für iede einfache Prolongation dieser Policen, 4. für jede vor dem natürlichen Ablauf dieser Policen eingetretene vorzeitige Annulation derselben, 5. für jeden bezahlten Schaden mit Rücksicht auf dessen Umfang, 6. für jeden Schaden, der bei Schluss der statistischen Beobachtungs-Periode — des Jahres — noch nicht bezahlt ist (interimistische Zählkarte). Sämmtliche Karten müssten etwa quartaliter dem Centralbureau eingesandt werden. Damit wäre dann die Thätigkeit jeder einzelnen Gesellschaft, abgesehen von der Erledigung etwaiger Rückfragen des Centralbureaus abgeschlossen.

Das Centralbureau hätte seinerseits dann die weitere Bearbeitung dieses Materiales dergestalt vorzunehmen, dass die Zergliederung und Feststellung der sich daraus ergebenden Resultate 1. für den Gesammtbestand der Beobachtungsobjecte und 2. für den Bestand jeder theilnehmenden Gesellschaft, erfolgt. Die Tabellen, Zahlen und Schlüsse für den Gesammtvorstand wären zur Mittheilung an alle Theilnehmer respective an die Oeffentlichkeit bestimmt, während die gleichen Angaben für das Sondergeschäft jeder Gesellschaft nur dieser bekannt gegeben werden dürften. Bei dieser Einrichtung würde das berechtigte Sonderinteresse jeder Gesellschaft bis zum Aeussersten gewahrt sein. Eine Verletzung desselben durch Preisgabe von Geschäftsgeheimnissen der einzelnen Gesellschaft, bei einer gemeinsamen Statistik ist ohnehin schwer denkbar, weil die Namen der Versicherten für die statistische Beobachtung gleichgiltig sind und auf den Zählkarten nicht zu erscheinen brauchen. Zu allem Ueberflusse könnten die Beamten des Centralbureaus noch ausdrücklich zur Verschwiegenheit verpflichtet werden.

Eine besondere Erwägung beansprucht noch die Frage, ob die von jeder theilnehmenden Gesellschaft, für ihr Geschäft genommene Rückversicherung in die statistischen Ermittlungen einbezogen werden soll. Die Frage dürfte, da es für jede Gesellschaft ungemein werthvoll ist, zu erfahren, ob ihre Rückversicherungs-Maassregeln für alle Risicogruppen die richtigen gewesen sind, und bei welchen Gruppen respective wie viel bei jeder die Rückversicherer gewonnen oder verloren haben, andererseits aber ein allgemeines Interesse für fragliche Einbeziehung nicht vorhanden ist, dahin zu beantworten sein, dass die Ausdehnung der Statistik auf die Rückversicherung zwar in den Formularen vorgesehen, es aber dem Ermessen jeder Gesellschaft überlassen wird, ob sie für ihr Geschäft eine solche Ausdehnung der Statistik

eintreten lassen will. Die betreffenden Zahlen und Ergebnisse würden sich natürlich ebenfalls nur zur Mittheilung an die respectiven einzelnen Gesellschaften eignen.

In weitergehende Erörterungen über die Classificirung der Risiken, welche der Statistik zugrunde gelegt werden müsste, und über die thatsächlichsten Momente, welche in den verschiedenen Zählkartenformularen Aufnahme finden müssten, einzutreten und darnach Formularentwürfe aufzustellen, würde hier zu weit führen. Es mag deshalb nur der Kostenpunkt der vorgeschlagenen Einrichtung noch berührt werden. Bezüglich desselben ist ohneweiters klar, dass sich die Kosten für die einzelne Gesellschaft um so geringer stellen, je mehr Theilnehmer sich finden. Bei einer Anzahl von zum Beispiel 20 Gesellschaften dürften die Kosten für jede, abgesehen von dem ersten Jahre, in welchem die ersten Einrichtungskosten wohl einen etwas höheren Betrag erfordern würden, schwerlich 800—1000 Gulden jährlich durchschnittlich übersteigen. Einen solchen, verhältnissmässig kleinen Betrag, das Gehalt eines einzigen gering dotirten Beamten darstellend, könnte jede Gesellschaft zu dem Zwecke, für die Gesammt-Institution eine gemeinsame wissenschaftliche Grundlage zu schaffen, unbedenklich opfern, zumal diejenigen Gesellschaften, welche jetzt schon für sich statistische Ermittlungen vornehmen, die dafür gehaltenen Arbeitskräfte zum Theil sparen würden. Ein Modus der Vertheilung der Gesammtkosten auf die einzelnen Gesellschaften würde sich unschwer finden lassen, z. B. nach der Anzahl der von jedem Theilnehmer eingelieferten Zählkarten, wobei etwa diejenigen Karten, in welchen die Rückversicherung mit berücksichtigt ist, der damit verbundenen doppelten Arbeit wegen, doppelt gerechnet werden könnten.

Möge diese erneute Anregung, ob nun die gemachten Vorschläge im Einzelnen Beobachtung finden oder nicht, wenigstens den Anstoss dazu geben, dass die Angelegenheit energisch, gründlich und bald von den dazu Berufenen in die Hand genommen wird. Eine fortgesetzte Unthätigkeit oder dilatorische Lässigkeit auf diesem Gebiete könnte von den heutigen zahlreichen, doch wahrlich nicht zu unterschätzenden Gegnern der Privat-Feuerversicherung zu einer scharfen Waffe gegen dieselbe und zwar dann mit vollem Rechte gemacht werden. Man zeige, dass die Institution entwicklungsfähig ist und sie wird weiter bestehen und gedeihen trotz Allem, denn verloren ist nur der, welcher die Grundbedingungen seiner Existenz dauernd missachten zu können vermeint oder sie nicht versteht.

Die „Safe Depositories" und ihre volkswirthschaftliche Bedeutung.

In der Institution des Bankwesens besitzt die moderne Volkswirthschaft das entsprechende Mittel, dem Handels- und Geldverkehre diejenige Elasticität und Sicherheit zu verleihen, welche für die gedeihliche Entwicklung derselben nothwendig ist. Im Bankwesen ist das System eines höheren wirthschaftlichen Organismus zur Geltung gebracht, in welchem die gesammten Fäden des wirthschaftlichen Getriebes zusammenlaufen, die natürliche Regelung desselben befördernd. Was im Körper eines Lebewesens durch die Functionen der einzelnen Organe bewirkt wird, lässt sich in ökonomischer Beziehung mit der Aufgabe der Banken im Staatswesen vergleichen, dessen wirthschaftliche Entwicklungsstufe durch den Fortschritt des bankmässigen Verkehres ebenso bedingt ist, wie der höhere Organismus in der besonderen Ausbildung der einzelnen Organe. Der gesammte Handels- und Geldverkehr erfährt durch diese Institution jene Regelung, ohne welche eine rationelle wirthschaftliche Thätigkeit im modernen Sinne nicht bestehen kann.

Die wirthschaftliche Entwicklung der Völker, welche angewiesen ist, mit der culturellen gleichen Schritt zu halten, konnte nur langsam jene Stufe erreichen, auf welcher sich dieselbe heute befindet. Die Fortschritte auf politisch-socialem Gebiete waren es jedoch hauptsächlich, welche den wirthschaftlichen Verkehr in diejenigen Bahnen lenkten, innerhalb welcher die Schaffung aller jener wirthschaftlich vortheilhaften Institutionen gemeinnütziger Art möglich wurde, welche in unserer Zeit dem ökonomischen Getriebe den Stempel der vorgeschrittenen Entwicklung aufprägen. Die fortschreitende Erkenntniss von der eminenten Bedeutung aller auf dem culturellen Fortschritte beruhenden wirthschaftlichen Schöpfungen musste dazu beitragen, auf allen Gebieten des socialen Strebens neue Gesichtspunkte zu schaffen. Die Institution des Bankwesens ist es insbesondere, welche dem Wesen des socialen Getriebes im Laufe der letzten Decennien ein vollständig verändertes Gepräge verliehen hat. Eine ganze Reihe neuer, für die wirthschaftliche Wohlfahrt der Gesellschaft wichtiger Schöpfungen wurde in's Leben gerufen und hatte eine Fülle neuer Anforderungen an die geistige Thätigkeit des Menschen zur Folge. Blos nach einer Richtung hin, und zwar in dem Bestreben nach absoluter Sicherheit des Eigenthums blieb die Menschheit nach wie vor unbefriedigt, mag in dieser Hinsicht auch mancher entschiedene Fortschritt zu verzeichnen sein.

Von jeher drängte sich an die besitzende Menschheit das Bedürfniss heran, dem immer kühner werdenden Verbrecherwesen, welches die grössten

Erfindungen auf dem Gebiete der Sicherheitsmaassregeln in Betreff Eigenthums mit einer bewunderungswerthen Findigkeit zu Schanden mac einen mächtigen Riegel vorzuschieben. Amerika, das Land der praktis Neuerungen, war es, welches zu allererst das Mittel in der Form e Institution fand, welches nunmehr seit langer Zeit in jedem grösseren dustrie-, Handels- und Speculations-Emporium der neuen Welt einen i grirenden Theil des daselbst ausgedehnten und hochentwickelten Deposi Geschäftes ausmacht. Die Art und Weise, wie diese Institution in's Le gerufen wurde und worauf sich ihre Thätigkeit und Einrichtung beschrä verdient es, dieselbe einer genaueren Untersuchung zu unterziehen. Es um jeden Preis, nachdem sich alle bisher angewendeten Mittel zur Sic heit des Eigenthums als unzureichend erwiesen hatten, eine Art du greifende Maassregel zu treffen, welche geeignet war, für eine verhält mässig geringe Entlohnung Schmuck, Werthpapiere und andere gröss Werth repräsentirenden Gegenstände in absolut sicheres Gewahrsam bringen. Zu diesem Behufe bildeten sich anfangs Consortien, welch hierzu geeigneten unterirdischen Localitäten, nachdem dieselben in sprechender Weise hergerichtet worden waren, feuerfeste Cassen aufstel in welchen die betreffenden Schätze untergebracht wurden. Für die dirungs- und Erhaltungskosten hatten die hierbei Betheiligten particip aufzukommen und war die Art der Gewährleistung eine wechselseitige. der Zeit traten diesen Consortien neue Theilnehmer bei, welche natürlic weise eine entsprechende Summe zu zahlen hatten, um aller aus Unternehmen entspringender Beneficien sich erfreuen zu können. Auf d Weise bildete sich langsam ein Fond, der genügend war, um mittelst zinsung die Erhaltungs- und Verwaltungskosten zu decken. Die Gew leistung der Theilnehmer hörte auf und stand es Jedem frei, für ein sprechendes Entgelt der Vortheile, die aus dieser Institution erwuch theilhaftig zu werden.

Die „Safe Deposit-Banks", dies der Name jener Institution, erfre sich bald einer solchen Beliebtheit, selbst in Kreisen des Privatpublic dass England angesichts dessen nicht lange auf sich warten liess und selben probeweise einzuführen begann; natürlich dachte Niemand da dass diese praktische Neuerung sich auch hier in einer verhältnissmä sehr kurzen Zeit nicht blos einbürgern, sondern zu einer unumgäng nothwendigen Einrichtung für die Gesammtheit der besitzenden Clas Englands heranbilden werde. London weist gegenwärtig über ein ha Dutzend solcher im grossartigen Stile angelegter „Safe Depositories" und die Mehrzahl der bedeutenderen englischen Provinzstädte folgt sei dem von der Hauptstadt gegebenen guten Beispiele, indem sie der richtung genannter wirthschaftlicher Anstalten jedmöglichen Vorsc leistet.

Es dürfte wohl nicht nothwendig sein, zu bemerken, dass die Lond „Safe Deposit-Banks" durchaus nichts mit jenen zahlreichen hier

überall etablirten mächtigen Depositenbanken gemeinschaftlich haben, deren hauptsächlicher Zweck es ist, Capitalisten Gelegenheit zur Aufbewahrung brachliegender Gelder zu geben, dem handel- und gewerbetreibenden Publicum die verzinsliche Niederlegung der Capitalien zu ermöglichen etc.; aber auch mit jenen grossen und internationalen Creditvermittlungs-Anstalten haben diese Sicherheits-Depositenbanken kaum etwas gemein, deren nationalökonomische Bestimmung darin sich manifestirt, dass sie Depositen zur Benützung annehmen und verzinsen und aus der sorgfältigen Pflege dieser Thätigkeit ein wesentliches, wenn nicht gar ihr hauptsächliches Geschäft machen.

Heute sind die „Safe Deposit-Banks" grosse öffentliche Erwerbsunternehmungen, welche sich strenge auf die älteste Form des Depositen-Geschäftes beschränken, indem sie die Aufbewahrung von Werthgegenständen übernehmen, um sie dem Hinterleger jederzeit in natura zurückzuerstatten. Blos hierin lässt sich eine gewisse Aehnlichkeit mit den auch in anderen Ländern schon seit Langem bestehenden Depositencassen, wie diejenige der Oesterreichisch-ungarischen Bank, der Bank von Frankreich, der Bank von England etc. und vieler grosser Privatbanken erkennen, die gewissermaassen derselben Geschäftsthätigkeit obliegen. Bei diesen Anstalten sogenannte offene Depots zu hinterlegen, heisst jedoch, wie allgemein bekannt ist, einen grossen Luxus treiben, denn die Verwahrungsgebühren sind bedeutend und die vexatorischen Regeln und Vorschriften, die beim Hinterlegen, Zurückziehen und beim blossen Revidiren der Depots beobachtet werden müssen, sind kaum danach angethan, diesen Depositencassen die Gunst des besitzenden Publicums zuwendig zu machen. Ueberdies betrachten diese von staatswegen errichteten Depositencassen es als eine grosse Gunstbezeugung, wenn sie ihre feuersicheren Gewölbe und einbruchsicheren Cassen einem der Kauf- oder Handelswelt angehörenden Individuum oder sonstigen Privaten behufs Aufbewahrung von Depositen zur Verfügung stellen.

Die Einführung und Errichtung von „Safe Depositories" als ein neues, gemeinnütziges, wirthschaftliches Institut seitens einer Privat-Erwerbsgenossenschaft musste vor allem den Interessen der Allgemeinheit sich anzupassen trachten, wenn sich die neue Institution allerseits profitreich gestalten sollte. Daher wurde auch von allem Anfange an darnach gestrebt, das Unternehmen öffentlicher „Safe Depositories" nach amerikanischem Muster sowohl in technischer als in geschäftlicher Richtung auf breitester Basis anzulegen.

In technischer Beziehung sind dies öffentliche Anstalten, deren Hauptconstructionen, die Gewölbe, mit Hilfe aller modernen Erfindungen und Besserungen gegen Feuer, Diebstahl und Einbruch geschützt sind. Die Grundmauern sind in der Regel bis zum Grundwasser hinabgeführt, um jede unterirdische Arbeit von aussenhin unmöglich zu machen. Eisen und Stahl bilden die hauptsächlichsten Bestandtheile dieser unterirdischen Ge-

wölbe, die in verschiedenen Abtheilungen getrennt sind. Jede Abtheilung hat genau die Form einer in gigantischem Stile erbauten feuer- und einbruchsicheren Casse im Gewichte von 500—600 Tonnen, wovon auf die Thüren allein je 2—3 Tonnen Gewicht entfallen. Einige dieser Abtheilungen sind in 4000—6000 separate eiserne Cassen getheilt, die verschiedener Grösse sind, und demgemäss zu verschiedenen Abonnementpreisen vermiethet werden. Für die jährliche Pachtsumme von 1 Guinee (1 Pfd. St. 1 Sh.) erhält man eine Casse, etwa 1/2 Meter lang, 12 Centimeter breit und 15 Centimeter hoch mit genügendem Raum, um Millionen, sei es in Titeln, sei es in Edelsteinen oder sonstigen Werthobjecten aufzubewahren. Für räumlichere Cassen werden 2—6 Guineen per Jahr gefordert. Diese letzteren werden vielfach von Eisenbahn- und Versicherungs-Gesellschaften, sowie von Actiengesellschaften im Allgemeinen gemiethet, um daselbst ihre Actien, Effecten und sonstigen Werthpapiere in sicherem Gewahrsam zu halten; während die kleineren Abtheilungen meist von Kaufleuten und Privatpersonen gepachtet werden, um Baargelder, Privaturkunden, Schuldscheine, Sparcassebücher, Cassenscheine, Versicherungspolicen, Depotscheine, Verträge etc. aufzubewahren. Ein Gewölbe ist reservirt für die temporäre oder permanente Aufbewahrung von Gold- und Silbergegenständen, Schmuckkästchen, auch können für entsprechendes Entgelt Cassa-, Gewölbe- und Bureauschlüssel jeden Abend dort aufbewahrt und Morgens wieder abgeholt werden.

Die Deponenten haben das Recht, so oft es ihnen beliebt, ihre Cassen zu revidiren, dieselben ihres kostbaren Inhaltes zu entleeren oder mit neuen Gegenständen zu füllen. Dabei hat keine einzige jener zahlreichen üblichen Formalitäten durchgegangen zu werden, die jedesmal mit mehr oder weniger Zeitverlust verbunden sind. Der Einleger gibt beim Betreten des Sicherheits-Institutes sein selbstgewähltes Losungswort ab, wird zur Cassa geführt, die er mit Beihilfe eines Wächters, der ebenfalls einen besonderen Schlüssel besitzt, öffnet. Diese bequemen Einrichtungen, sowie die Leichtigkeit, mit welcher man ein beträchtliches Depot zu einem billigen Preise bei einer Gesellschaft, welche in jeder Beziehung ausreichende Garantie bietet, hinterlegen kann, tragen nicht wenig dazu bei, diese „Safe Despositories" zu einer ebenso beliebten als wirthschaftlich-nothwendigen Institution zu erheben. Nach den statistischen Aufschreibungen der englischen Polizei haben Einbruchsdiebstähle in Cassen in grossem Maasse abgenommen, da es angesichts der mühevollen und riskirten Arbeit die Gauner nicht der Mühe werth finden, der kleineren Beträge halber, die in Privatcassen erliegen, einen Einbruch auszuführen. Seit wenigen Jahren gelangt in Folge dessen diese Institution auch auf dem europäischen Continente zur Einführung.

Zur Frage der Versicherung minderwerthiger Leben.

I.

In der Lebensversicherung gelangt jenes Postulat socialwirthschaftlichen Strebens zum Ausdrucke, welches auf der ökonomischen Association der wirthschaftenden Individuen beruhend, in seiner letzten Consequenz die Lösung der socialen Frage in sich birgt.

Die Idee der Lebensversicherung liegt in dem Naturgesetze, welches in der Absterbe-Ordnung sich äussert, indem jede Generation erst nach einer gewissen Zeit vollständig abstirbt, so dass die in derselben enthaltenen Leben als ein Leben aufgefasst, jener Gesetzmässigkeit Rechnung tragen, die nothwendig ist, um eine verlässliche Grundlage für jene Gesammtleistung zu liefern, welche zur Erreichung eines für die betheiligten Individuen gleichen wirthschaftlichen Zieles erforderlich ist.

Der Gedanke, jene durch den Tod des Ernährers hervorgerufenen wirthschaftlichen Nachtheile durch Vertheilung der Lasten an die Mitglieder einer, gemeinsame Ziele anstrebenden Vereinigung zu paralisiren, ist sehr alt und wurde das Bedürfniss von Capitals-Versicherungen auf den Todesfall lange vorher gefühlt, bevor Lebensversicherungen im heutigen Sinne entstanden. Doch erst als sich die Statistik zu einer Wissenschaft herausbildete und insbesondere die Bevölkerungs-Statistik Schule zu machen begann, wurde es mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung möglich, der Lebensversicherung eine Grundlage zu geben. Das Mortalitätsgesetz lag der menschlichen Beobachtungsgabe am nächsten, wenigstens insoweit, als dessen Wirkungen sich statistisch nachweisen liessen. Unter Zuhilfenahme der Wahrscheinlichkeitsrechnung bot dasselbe die relativ sicherste Grundlage für assecuratorische Operationen.

Immerhin erhielt die Lebensversicherung eine vollständig verlässliche Basis erst durch die Ausgestaltung der Sterbetafeln auf Grund der selbstgesammelten Erfahrungen der Lebensversicherungs-Gesellschaften, welche im Laufe der Zeit über ein bedeutendes Materiale verfügten. Dasselbe umfasste naturgemäss ausschliesslich ausgewählte Leben, da aus naheliegenden Gründen kränkliche Personen zur Versicherung nicht zugelassen wurden. Jener der Lebensversicherung innewohnende socialwirthschaftliche Gedanke wirkte jedoch allmälig auch in dieser Hinsicht bahnbrechend und man befasste sich damit, Normen zu schaffen, um unter gewissen Bedingungen auch minderwerthige Leben der Versicherung theilhaftig werden zu lassen. Insbesondere in den letzten Jahrzehnten wird in Fachkreisen dieser Frage besondere Aufmerksamkeit zugewendet, umsomehr als mit der mächtigen Ausbreitung der Lebensversicherung der Percentsatz der Abgelehnten eine stetige Steigerung aufweist. Man hält deshalb diese Frage für besonders wichtig, ja vielleicht für eine der bedeutendsten, welche gegenwärtig auf dem Gebiete der Lebensversicherung sich geltend macht, da man von der Lösung derselben sich eine wesentliche Förderung dieser Institution erhofft. Die Einwendung des Mangels jeder Statistik in dieser Richtung ist nicht

ernst zu nehmen, denn dieser Mangel kann nicht als absolutes Hinderniss angesehen werden, wenn man in Betracht zieht, dass die gewöhnliche Lebensversicherung in ihren Anfängen auch über keine zuverlässige Rechnungsgrundlage verfügte und mehr experimental verfuhr. Ja man kann mit Fug und Recht behaupten, dass wir gegenwärtig mehr Erfahrung über minderwerthige Leben haben, wie vor hundert Jahren die damaligen Versicherungs-Techniker über normale Lebensrisken, In einer Debatte, welche im Jahre 1886 bei der Gelegenheit der Ueberreichung von Mr. Chisholm's Abhandlung über die „Schätzung von Lebensrisken" im Institute der Versicherungs-Mathematiker in London abgehalten wurde, wies man, wie selbsverständlich, auf das Wünschenswerthe des Besitzes genauer statistischer Informationen in dieser Richtung hin. Doch schien bereits damals jenen englischen Fachkreisen eine näherliegende praktische Lösung der Frage durchführbar. Bei näherer Betrachtung ergibt sich, dass das speculative Element bei Versicherung minderwerthiger Leben keineswegs immer in ungerechtfertigter Weise hervortritt. Das Beispiel einer bedeutenden englischen Lebensversicherungs-Actiengesellschaft hat sogar bewiesen, dass die vorsichtigsten und conservativsten Anstalten das Risico in grossem Maassstabe ohne Bedenken auf sich nehmen können. Freilich muss unter den gegebenen Umständen mangels einer Statisik dem ausserordentlichen Risico in anderer Weise Rechnung getragen werden. Die Methoden, welche dabei zur Anwendung kommen können, sind mannigfachster Art, doch dürften sich jene am geeignetsten erweisen, welche der praktischen Acquisition minderwerthiger Leben am wenigsten Schwierigkeiten bereiten. Zwei Wege waren für die Versicherungstechnik, die natürlich nur mit dem praktisch durchführbaren rechnen durfte, gangbar, um unter Wahrung der Stabilität der Gesellschaft das hier offenbar vorhandene grössere Risico zu paralysiren. Entweder eine entsprechende Erhöhung der Beiträge mit möglichst sicherer Garantie für die Gewährung der vollen Versicherungssumme, oder Beibehaltung der normalen Prämiensätze mit Vorbehalt der Kürzung der Versicherungssumme. Uberwiegend wurde für die Versicherung minderwerthiger Leben der letztere Modus acceptirt und hat man sich hiebei mit einigen Abweichungen eines Systemes bedient, dessen Wesen in der I. Lieferung dieses Werkes (1886) zur Darstellung gelangte. Es war dies ein selbstständiger Vorschlag behufs Lösung dieser zu jener Zeit actuell gewordenen Frage. Im Falle nämlich ein Risico als abnormal und der Gesundheitszustand als unter dem gewöhnlichen Niveau stehend angesehen wird, so dass eine Annahme nur zu erhöhter Prämie erfolgen könnte, empfiehlt es sich, nach Maassgabe der Krankheitskategorie und dem Grade des Fortschrittes derselben (Gefahrenclasse) die Versicherung auf ein entsprechend höheres Alter als dasjenige des zu Versichernden einzugehen und zwar so, dass derselbe zwar blos die seinem Alter entsprechende, normale Prämie bezahlt, der Mehrbetrag derselben jedoch als Schuldenlast auf der Police lastet und von Jahr zu Jahr abnimmt. Die Berechnung wird auf die Weise gemacht, dass den einzelnen Krankheitskategorien gewisse Wahrscheinlichkeiten der minderen Lebensdauer zugrunde gelegt werden, wobei die Gefahrenclasse den Percentsatz der höchsten Krankheits-

entwicklung angibt. Aus dem Verhältnisse der normalen zur rechnungsmässig ermittelten Erlebens-Wahrscheinlichkeit des zu Versichernden für sein wirkliches Alter ergibt sich nun diejenige Anzahl Jahre, um welche das Alter des zu Versichernden höher angenommen werden muss.

Unter den Versicherungs-Candidaten besteht eine ausgesprochene Abneigung, eine höhere als die Normalprämie zu entrichten, und dieser Abneigung muss vor Allem so weit als thunlich Rechnung getragen werden. Jeder Plan, welcher einen eventuellen Abzug im Falle frühzeitigen Todes anstatt einer Erhöhung der Normalprämie im Auge hat, verdient den Vorzug, weil er im einzelnen Falle das Risico in den ersten Jahren theilweise von der Assecuranz-Gesellschaft auf den Versicherten abwälzt, was namentlich dann wichtig ist, wenn zur Versicherung minderwerthiger Leben specielle Gruppen gebildet werden. Zudem scheint uns im vorliegenden Falle, wenigstens zu Beginn, ein Zusammengehen sämmtlicher Lebensversicherungs-Anstalten nicht nothwendig geboten. Der Zudrang minderwerthiger Leben zu denjenigen Gesellschaften, welche zuerst diese Combination in Anwendung bringen, wird ohne Zweifel ein nicht unbedeutender sein und die Erreichung stabiler durchschnittlicher Mortalitätsziffern möglich machen. Ferner wäre zu berücksichtigen, dass die Productionskosten des Portefeuilles bei minderwerthigen Leben um ein Namhaftes geringer sich gestalten werden, wie bei normalen Risken, da jeder Agent froh sein muss, für ein abgelehntes Risico überhaupt eine Versicherungs-Gelegenheit zu finden. Schliesslich sei noch bemerkt, dass wir uns vom Standpunkte der Theorie wohl der Modificationsfähigkeit des erwähnten Versicherungs-Systemes in gewissen Ausnahmsfällen bewusst sind, wo dann, wenn das Extrarisico hauptsächlich in die ersten Jahre der Versicherung fällt, ein Prämienzuschlag für gewisse Dauer gerechtfertigt werden kann.

Einen ähnlichen Modus haben denn auch drei deutsche Gesellschaften bei der Einführung dieser Versicherung gewählt. Sie verpflichten sich zur Auszahlung der vollen Summe ohne Vorbehalt nur im Erlebensfalle, wo also ein Risico nicht gegeben ist; im Uebrigen behalten sich dieselben Kürzungen vor, die sich nach der grösseren Zahl der Sterbefälle in dieser Abtheilung richten und aller Voraussicht nach in einem Verbande, der sich nur aus nicht normal veranlagten Mitgliedern zusammensetzt, öfter eintreten und namentlich in den späteren Jahren zunehmen werden. Ein kleiner Unterschied zwischen den genannten Anstalten, der nicht ganz übergangen werden darf, besteht eigentlich nur insofern, als die eine dieser Gesellschaften im Todesfall zunächst und sofort nur die volle Prämienreserve garantirt, während von anderer Seite mindestens die Hälfte der Versicherungssumme gewährleistet wird, was indessen in der Praxis in allen den Fällen ohne Belang ist, wo die Prämienreserve in Folge längeren Bestehens der Versicherung der letzteren Summe gleichkommt. Die Restzahlung aber erfolgt bis zur vollen Höhe der Versicherungssumme nur dann, wenn, wie bemerkt, die wirklich eingetretenen Todesfälle die angenommene normale Zahl nicht überschreiten.

Von anderen Grundsätzen liess sich bei der Wahl ihres Versicherungsmodus eine vierte Anstalt leiten, deren Bestreben vor allen Dingen darauf gerichtet

erscheint, den in dieser Abtheilung Versicherten eine möglichst weitreichende Garantie für die jedesmalige Auszahlung der vollen Versicherungssumme zu bieten und damit einen fast vollwerthigen Ersatz für die normale Lebensversicherung zu schaffen. Sie erhöhte zu diesem Zwecke die normalen Prämiensätze in mässiger Weise. Die Wirkung dieser Methode äussert sich nun gegenüber derjenigen der vorgenannten Gesellschaften zunächst darin, dass letztere Anstalt die Auszahlung der vollen Versicherungssumme nicht nur im Erlebensfalle, sondern auch im Todesfalle dann garantirt, sobald die Versicherung bei Ableben des Versicherten bereits 15 Jahre in Kraft besteht oder ein Unfall (der in den Bedingungen näher präcisirt wird) den Tod herbeiführte. Darf diese Mehrleistung der Anstalt in Anbetracht des bei einer derartigen Versicherung immerhin noch vorhandenen erheblichen Risicos nicht unterschätzt werden, so wird dieselbe noch dadurch erhöht, dass von ihr auch in anderen Fällen für die Gewährung der vollen Versicherungssumme fast mit Sicherheit garantirt werden kann, da für ihre rechnerischen Grundlagen eine so scharfe Sterbe-Ordnung gewählt worden ist, dass eine Uebersterblichkeit so gut wie ausgeschlossen erscheint. Nur in letzterem Falle aber würde eine Kürzung der Versicherungssumme eintreten, die aber selbst unter aussergewöhnlich ungünstigen Verhältnissen kaum von Bedeutung sein wird, da die Versicherten ausserdem Antheil am Gewinne dieser Abtheilung haben, der im Laufe der Jahre eine ganz ansehnliche Höhe erreicht. Diese (von der Sterblichkeit unabhängige) Gewinnbetheiligung wird übrigens auch von den anderen Gesellschaften zugestanden, wodurch die Verminderung des versicherten Capitals ebenfalls beschränkt wird, kann aber bei diesen in Anbetracht der sonstigen Gegenleistungen naturgemäss nicht in demselben Grade ausgleichend wirken.

Fasst man alle die vorgeführten Gesichtspunkte zusammen, so wird man sich der Ueberzeugung nicht verschliessen können, dass mit der Versicherung der Abgelehnten eine hochbedeutsame Erweiterung der bislang ausgeübten Versicherungspraxis und eine ebenso humane wie zeitgemässe Neuerung geschaffen worden ist, die sich hoffentlich recht rasch einbürgern wird, und bei solider Führung wenigstens die moralische Unterstützung auch solcher Gesellschaften verdient, die sich mit derartigen Risken nicht befassen. Wenn das thatsächliche Ergebniss den Erwartungen in ersterer Beziehung nach den bisherigen, allerdings erst kurzen Erfahrungen noch nicht vollständig entsprochen hat, so dürfte dies einestheils dem Umstande beizumessen sein, dass ein gewisses Gefühl der Unlust die von einer normalen Lebensversicherung Abgelehnten vielfach einem weiteren Antrage abgeneigt macht, was aber dem wohlverstandenen eigenen Interesse direct widerspricht, anderenfalls dürfte ein Grund hiefür jedenfalls darin zu suchen sein, dass diese Versicherungsart noch nicht allgemein genug bekannt ist. Im Interesse der Sache hielten wir desshalb für angezeigt, hierüber Aufklärung und eine im Wesentlichen erschöpfende Darstellung zu geben.

Ueber das Wesen des Zinsfusses beim bankmässigen Credit.

III.

In der Function, welche dem Wesen des Disconto-Zinsfusses entspricht, spielt den bisherigen Untersuchungen gemäss, die Securität der zu verzinsenden Darlehen eine bedeutende Rolle. Diese ist jedoch wieder abhängig von der Function einer geordneten Geldwirthschaft, in deren Vorhandensein die Gewähr für die Aufrechterhaltung eines gesunden Wirthschaftslebens liegt. Ein geordneter Geldverkehr, verbunden mit einer vernünftigen Bankpolitik, ist geeignet, die Entwicklung etwaiger wirthschaftlicher Krisen im Keime zu ersticken und solchermaassen die Zerstörung wirthschaftlicher Kräfte zu verhindern. Hiedurch wird das Schwanken der Securität, welches durch den Einfluss ungünstiger ökonomischer Zustände auf dieselbe hervorgebracht wird, zum grossen Theil vermieden.

Die Vervollkommnung der Geldwirthschaft hat sich im Laufe der Zeit nur langsam vollzogen. Das Steigen des Geldbedarfes bei lebhafterem wirthschaftlichen Verkehre in einzelnen Jahresperioden, führte zu der Erkenntniss, dass hier ein allgemeines wirthschaftliches Gesetz waltet, indem der Geldbedarf eines Landes von dem Umfange des Waarenverkehres und Productenaustausches abhänge und sich daher, den Bedürfnissen desselben anpassend, von selbst regle. Bald sollte sich jedoch auch eine Ergänzung dieses wirthschaftlichen Gesetzes ergeben. Man fand nämlich, dass bei zeitweiser die Verhältnisse übersteigender Geldfülle die Waarenpreise stiegen und einen lebhaften Import begünstigten, welcher den überschüssigen Geldumlauf wieder absorbirte, und umgekehrt war knappes Geld wieder die Ursache des Sinkens der Waarenpreise, wodurch der Export begünstigt und ein Einströmen fremden Geldes bewirkt wurde. Auf diese Weise entwickelte sich nach und nach jenes wirthschaftliche System, welches später auf die Geldpolitik der Staaten von hervorragendem Einflusse werden sollte. Diese aus der Erfahrung entspringenden Wahrnehmungen wurden zur Grundlage weiterer Forschungen, aus denen sodann die weiteren Consequenzen in finanzpolitischer Beziehung gezogen wurden. Die Notenbanken, welchen ursprünglich nur geringer Einfluss auf das Wirthschaftsleben beigemessen wurde, wurden zum Gegenstande allgemeiner Aufmerksamkeit. Man hatte erkannt, dass diese Institution in ihrem Wesen berufen sei, für die Regelung des Geldverkehres und des gesammten inneren Wirthschaftslebens eines Landes von grosser Wichtigkeit zu werden, da alle Fäden des wirthschaftlichen Getriebes dort zusammenlaufen mussten, wo die Notenausgabe erfolgte. Es konnte daher nur von hier aus der Geldumlauf jenen Grenzen unterordnet werden, welche das jeweilige wirthschaftliche Bedürfniss von Fall zu Fall gezogen hatte. Bald gelangte nämlich die Erkenntniss zum Durchbruche, dass man die Regelung des Geldumlaufes nur bis zu einem gewissen Grade sich selbst überlassen dürfe, da jene durch dieselbe hervorgebrachten oft plötzlichen Preisveränderungen der Waaren schädigend auf das wirthschaftliche Getriebe einzuwirken geeignet seien. In Folge dessen nahm man Anlass, sich immer mehr mit jenen Normen zu befassen, welche die Noten-

ausgabe und deren Metalldeckung derartig zu regeln geeignet wären, um auf diese Weise eine Art Ventil für die jeweilige Notencirculation zu schaffen.

In dieser Beziehung bildeten sich nun in England zwei verschiedene Richtungen heraus, von denen die eine von Normann und Lord Overstone, sowie auch von R. Peel propagirt wurde. Es war dies die unter dem Namen Currencytheorie (Currency principle) bekannte Lehre, nach welcher Münzen und Banknoten miteinander das Landesgeld repräsentiren. Ein Land könne nur eine bestimmte Menge von Umlaufsmitteln (Münzen und Noten) beschäftigen. Werde dieselbe durch übermässige Ausgabe papierener Zahlungsmittel vermehrt, so würden die Waarenpreise steigen, und da die edlen Metalle, nicht aber auch die Noten, überall Abnehmer fänden, würden erstere aus dem Lande abfliessen. (Schlechtes Geld verdrängt das gute.) Da nun Münze das beste Umlaufsmittel sei, so müsse die Ausgabe von Banknoten beschränkt werden, d. h. die consequenten Vertreter der Theorie verlangen, dass nur metallisch voll bedeckte Banknoten ausgegeben werden dürfen. In England wurde dieses Ziel durch die Peelsacte erstrebt, und zwar mittelst Contingentirung.

Im Gegensatze zur Currencytheorie vertritt die Bankingtheorie (Banking principle) den Standpunkt, dass die Menge der in einem Lande erforderlichen Umlaufsmittel jeweilig durch das Verkehrsbedürfniss bestimmt werde. Darum müsse die Bank sich nur von letzterem leiten lassen und in der Lage sein, bei steigenden Waarenpreisen mehr Noten auszugeben. Eine Beschränkung sei entbehrlich, wenn nur die sonstigen Mittel zur Einlösung immer bereit seien und die Einlösungspflicht strenge eingehalten werde. Sie sei auch unnöthig, weil die Bank die Scheine nicht beliebig vermehren könne, sondern lediglich dem Begehr nach Darlehen und dem Wechseldiscont folgen müsse. Habe ein lebhafter Aufschwung des Verkehres zu einer ungewöhnlich starken Notenemission geführt, so fliesse in ruhigen Zeiten der nichterforderliche Betrag an Noten zur Bank zurück. Bis zu einem gewissen Maasse hatte jede dieser beiden Lehren eine Berechtigung und, wie gewöhnlich, lag auch hier das richtige in der Mitte. Es hatte sich nämlich bald herausgestellt, dass die Currencytheorie in ihren schärfsten Consequenzen eine Verschwendung des Volksvermögens hätte nach sich ziehen müssen, nachdem die metallische Vollbedeckung der Noten die Thätigkeit der Notenbank wirthschaftlich unterbunden hätte und überdies der angestrebte Zweck nicht immer erreicht worden wäre, weil bei zunehmenden Reichthume, also bei wachsender Menge der Deckungsmittel, dennoch der gesunde Geldbedarf eine relative Verschiebung hätte erfahren können. Bei der Bankingtheorie ergab sich wieder die Schwierigkeit, den wirklichen Circulationsbedarf zu beurtheilen, da nicht Alles und Jedes, was das Vertrauen der Bank in Anspruch nahm, berücksicht werden konnte, sonst aber auch Manches mit unterlaufen mochte, was ausserhalb des Rahmens des gesunden wirthschaftlichen Getriebes stehend, den Notenumlauf ungerechtfertigter Weise zu vermehren geeignet war. Es mussten daher gewisse Anhaltspunkte geschaffen werden, an denen allgemein wahrgenommen werden konnte, ob etwa eine das zulässige Maass überschreitende Menge an Noten sich im Umlaufe befinde.

In dieser Beziehung nahm man nun Veranlassung, Beobachtungen anzustellen und hatte bald herausgefunden, dass sich der Eintritt eines starken Metall-Abflusses vorher schon durch ein sogenanntes Ungünstigwerden der Wechselcurse ankündigte. Ein solches Ereigniss konnte nur durch übermässig grosse Verbindlichkeiten an das Ausland hervorgebracht worden sein, welche wieder blos die Folge einer vorhergegangenen starken Einfuhr an Waaren sein konnten. Nun wusste man aber, dass eine übermässige Notencirculation zur Vertheuerung der Waarenpreise beitrage und den Import begünstige und so war man dazu gelangt, aus dem Ungünstigwerden der Wechselcurse indirect auf eine Inflation des Notenumlaufes zu schliessen. Sobald also die Wechselcurse sich ungünstig gestalten, also ein Abströmen des Metalles sich ankündigt, weiss die Bank, dass sie zu viele Credite gewährt, zu viele Noten emittirt hat. Um nun diese einzuschränken, wird der Zinsfuss (Discontosatz) erhöht, wodurch sich die Geschäftswelt genöthigt sieht, in ihren Speculationen einzuhalten, respective mit den Waarenpreisen und Effectencursen herunterzugehen. Der Export wird begünstigt, während der Import Einbusse erleidet, so dass wieder Metall vom Auslande einzuströmen beginnt.

Auf diese Art wurde successive ein System geschaffen, welches die Voraussetzungen einer gesunden Bankpolitik in sich schloss und auf diese Weise das gesammte Verkehrs- und Productionsleben in die Gewalt der von der Bankpolitik geübten Regulirungsfunction brachte. Heute verrichtet die englische Bankpolitik die Functionen eines den Geldumlauf mit Strenge beherrschenden Organismus, in welchem sich ein hoher wirthschaftlicher Geist offenbart, indem dieselbe bestimmend nicht nur auf das innere Getriebe des Landes, sondern auf den gesammten Weltverkehr einwirkt, in welchem England mit seinen Milliarden-Anlagen im Auslande eine dominirende Stellung einnimmt. In anderen Ländern war man ebenfalls bestrebt, das wirthschaftliche Getriebe in eine ähnliche Form zu bringen, doch musste man sich anfänglich mit blossen Surrogaten dieses Systemes begnügen, da erst nach und nach jene Prämissen geschaffen werden konnten, welche das Eingreifen der Bankpolitik in das Wirthschaftsleben mit Erfolg ermöglichen.

„Man kann,“ sagt der bekannte Nationalökonom W. Neurath, „drei Hauptphasen in der Entwicklung der Geldcirculation der Länder unterscheiden, welche sich besonders in unserer Zeit scharf von einander abheben. Länder im Stadium der beginnenden Circulationsentwicklung beschränken sich leicht auf den Gebrauch des Weltgeldes (Metalles) allein. Die Circulation ist noch eine schwache, der Credit im Verkehre des Landes ist wenig entwickelt. Es gibt eigentlich mehr einen Export- um Importhandel, als einen inneren Geld- und Güterumlauf. Ist das Land von Natur sehr reich, wie dies bei Ländern der warmen Zone der Fall ist, dann ist der Handel, was die Geldbilanz betrifft, ein activer. Man empfängt Geld aus den civilisirten Ländern und dieses wird grösstentheils aufgehäuft. Nach dem Südost Asiens kam durch Jahrhunderte fort ein Metallstrom aus dem Westen. So lange dieses Handelsbecken nicht zu grossen Culturinvestitionen moderner Art und zu einer Hebung des Consumes bei den mittleren und

unteren Ständen übergeht, wird der Westen Metall dahin senden müssen, um die von dort bezogenen Waaren zu bezahlen. Diese Länder können trotz ihrer grossen Entwicklung leicht eine Ergänzung des Metalles durch Papier noch entbehren.

In die zweite Classe der Länder zählen wir in dieser Beziehung jene Gebiete der Culturwelt, welche mit Hilfe ausländischer Capitalien grosse Investitionen ausführen und zur Reifestufe merkantilen Lebens emporsteigen. Die innere Circulation wächst schnell an, der innere Verkehr beginnt über den Aussenhandel die Oberhand zu gewinnen; aber das Verschuldetsein dem Auslande gegenüber gestaltet die Zahlungsbilanz noch passiv. Es fehlt die Kraft durch blosse Disconto-Erhöhungen den Abfluss des Metalles zu verhindern.

Wenn es solchen Ländern gelingt, ihr Geldwesen zu regeln, so sind sie doch nicht imstande, mit den wirthschaftlich vollgereiften Staaten den Kampf um's Gold durch das Mittel der Discontraten-Erhöhung leicht zu führen. Denn diesen kann es nicht gelingen, durch Abstossung von verbilligter Waare und im Curse reducirter Werthpapiere das Abströmen des Metalles zu hindern, wenn Länder, wie England, eben diese Waffe anwenden. Das erst reifende Land besitzt eben nicht die grossen Massen in aller Welt leicht absetzbarer Artikel, besitzt nicht aufgespeicherte Zinspapiere fremder Länder, hat keine Aussenstände in anderen Ländern, die gekündigt werden könnten, um das Gold in's Land zu ziehen.

Discont-Erhöhungen und Crediteinschränkungen würden jedoch nach Innen traurige Wirkungen erzeugen. Nicht der Export würde wachsen, sondern die Production würde gehemmt werden. Die Bankpolitik solcher Länder muss also anders geartet sein, als jene in vollgereiften Ländern. Ihr Verfahren muss milder und schützender Art sein. Es muss derselben auch eine grössere Freiheit der Action eingeräumt sein, als ihr nach der Peel'schen Art etwa zustehen würde. Aber in dem Maasse, als die Zinspflichtigkeit dem Auslande gegenüber abnimmt, die meisten Zinspapiere wieder in die reicher gewordene Heimat zurückkehren, das Land activ wird, muss das Geldwesen einen strengeren und strammeren Charakter annehmen, wenn das Land zu kraftvoller, activer Theilnahme am Welthandel und zur Eroberung jüngerer Absatzgebiete mächtig vorschreiten soll. Ist dies gelungen, so ist das Stadium der wirthschaftlichen Reife, also die dritte Phase der Entwicklung erreicht.“

In dieser Beziehung gilt es also in erster Linie, die Bedingungen eines geregelten Geldwesens überhaupt zu erfüllen, was sich nur langsam mit der Entwicklung der socialpolitischen und wirthschaftlichen Verhältnisse der einzelnen Staaten zu vollziehen vermag. Und ist diese Voraussetzung zur Duchführung einer rationellen Bankpolitik gegeben, dann müssen alle wirthschaftlichen Factoren mitwirken, um dieselbe zur Geltung gelangen zu lassen.

Betrachtungen über die willkürliche Beeinflussung der Preisbildung mit Rücksicht auf die börsemässige Speculation.

Seit jeher bildete die willkürliche Beeinflussung der Waarenpreise das odiose Mittel, dieselben zum einseitigen Vortheile der Speculation auszubeuten. Die Möglichkeit, die reguläre Entwicklung der Preise durch verschiedene Manipulationen künstlich zu beeinträchtigen und dieser eine bestimmte durch das Wesen einer Speculation bedingte Richtung zu geben, liegt besonders in den Umständen, denen der börsemässige Verkehr unterworfen ist. Diese sind es auch, welche es gestatten, die Chancen der Speculation dem legitimen wirthschaftlichen Einflusse zu entziehen und dieselbe dem Interesse Einzelner zu unterordnen. Das Princip, demzufolge die Preise im börsenmässigen Verkehre durch Nachfrage und Angebot geregelt werden, gilt nur insolange, als jene den natürlichen wirthschaftlichen Bedingungen des Marktes entsprechen. Ist jedoch Angebot oder Nachfrage auf künstlichem Wege hervorgebracht, dann entbehren auch die Preise jener Rechtfertigung, welche sich in einem mehr oder minder grossen Bedarf an Waaren manifestirt. Die Formen, in welchen Angebot oder Nachfrage einer willkürlichen Beeinflussung unterworfen werden können, sind mannigfacher und oft complicirter Art, weshalb es nothwendig ist, auf die Beschaffenheit des börsenmässigen Verkehres näher einzugehen, um das Wesentliche dieser Formen zu kennzeichnen.

Was den Begriff der Speculation betrifft, so wird unter derselben der Kauf und Verkauf von Waaren ohne Specification verstanden. Es wird geschäftlich zum Zwecke eines zu erzielenden Gewinnes eine Conjunctur ausgenützt, welche eine für den Speculanten günstige Preisveränderung voraussetzen lässt. Im allgemeinen volkswirthschaftlichen Sinne bedeutet Speculation so viel, als auf Grundlage der Kenntniss und der Vortheile über die Gesammtheit der bestehenden wie der zu erwartenden Markt- und Wirthschaftsverhältnisse geschäftlich vorgehen und operiren, beziehungsweise auf solcher Grundlage zu produciren, zu kaufen, zu verkaufen, Productionen zu erweitern oder einzuschränken und den Capitals- und Arbeits-Investitionen ihre Richtung zu geben. Im börsenmässigen Sinne wird jedoch unter dem Begriffe derselben der Kauf und Verkauf von Waaren verstanden, welche als Gegenstände des Gross- und Welthandels gelten und nach Muster oder blosser Qualitätsangabe gehandelt werden können, wie Getreide, Spiritus, Petroleum, Kaffee, Roheisen, Wolle etc.; ferner Valuten und Zahlungsmittel verschiedener Länder, sowie Urkunden über investirte Capitalien, sogenannte Geldeffecten (Rentenpapiere, Obligationen, Actien, Wechsel und Devisen) und zwar unter Berücksichtigung sowohl zeitlicher als auch örtlicher Umstände. Diesbezüglich lässt sich dieselbe nach mehreren Richtungen hin qualificiren, und zwar unterscheidet man: 1. Die Locospeculation, unter welcher die Ausbeutung der bestehenden zeitlichen Preisbildung verstanden wird. 2. Das Hausse- und

Baisse-Geschäft, welches die Ausbeutung der voraussichtlichen zeitlichen Preisdifferenzen repräsentirt. 3. Das Arbitrage-Geschäft, welches die Ausbeutung der bestehenden örtlichen Preisdifferenzen umfasst.

Die Locospeculation lässt sich in ihrer Form derart charakterisiren, dass man in derselben jenen Factor wahrnimmt, durch welchen die Situation des localen Marktes bezüglich des Angebotes und der Nachfrage ausgenützt wird. Der Locospeculant kauft bei grösserem Angebot, um etwa bei späterer grösserer Nachfrage mit Nutzen zu verkaufen. Diese Speculationsart ist wirthschaftlich von grosser Bedeutung für die Preisbildung, weil dieselbe grosse Preisvariationen nicht zum Durchbruche kommen lässt. Bei grossem Angebot würde die Waare tief im Preise sinken und so der Producent geschädigt werden, wenn der Speculant nicht eine erhöhte Nachfrage erzeugen würde. Hingegen würde bei grosser Nachfrage der Preis übermässig steigen und solchermassen der Consument geschädigt werden, wenn der Speculant nicht mit der aufgespeicherten Waare im entscheidenden Momente das Angebot vermehren würde. Die Locospeculation hat daher die wirthschaftliche Aufgabe, auf die Preisvariation ausgleichend zu wirken. Beim börsenmässigen Geschäfte mit Geldeffecten und Schuldurkunden trifft dieser Umstand umsomehr ein, als die auf diese Weise verhinderte allzugrosse Werthschwankung ihrer nachtheiligen Wirkung auf den öffentlichen Credit entkleidet wird. In Bezug auf die Beschaffenheit der Locospeculation lässt sich dieselbe nach Tages- und Zeitgeschäften eintheilen. Während namentlich bei Tagesgeschäften die Lieferung und Zahlung gleichzeitig, d. i. am selben Tage erfolgt, wird bei Zeit- oder Termin-Geschäften der thatsächliche Vollzug des abgeschlossenen Geschäftes auf einen späteren Termin, welcher der speculativen Absicht eines der Contrahenten entspricht, verschoben. Auf diese Weise ist der Speculant in der Lage, seinen etwaigen Bedarf an Waaren zu einer Zeit zu decken, wo ihm der Preis derselben ein günstiger scheint, ohne dieselbe sofort zu beziehen und zahlen zu müssen.

Die nächste Art der Speculation, das Hausse- und Baisse-Geschäft beruht auf der Verschiedenheit der Meinungen, bezüglich einer steigenden oder fallenden Preisbildung. In die Kategorie dieser Geschäfte fällt auch das sogenannte Differenzgeschäft, welches dann eintritt, wenn Lieferung und Bezug der Waare ganz ausser Betracht kommen und bloss die Differenz des Kauf- und Verkaufspreises berücksichtigt wird, wobei gewöhnlich zwischen Kauf und Verkauf sehr kurze Zeitintervalle, u. zw. höchstens ein oder zwei Tage verstreichen. Dieses Geschäft repräsentirt das sogenannte Börsenspiel und hat mit der Speculation nichts zu thun. Es können aber derartige Geschäfte auch auf ängere Fristen zum Abschlusse gelangen, sogenannte Lieferungsgeschäfte, wobei es den beiden Contrahenten durchaus nicht um die Lieferung oder den Bezug der Waare oder der Geldeffecten zu thun ist, sondern es wird stillschweigend von beiden Seiten auf eine solche verzichtet und bloss die Differenz der zwischen den jeweiligen Zeitpunkten notirten Preise von demjenigen Contrahenten in Anspruch genommen, dessen Voraussetzungen thatsächlich ein-

getroffen sind. Hier vermag die unreelle Speculation zu allererst und direct jene Wirkung auszuüben, deren sie zur willkürlichen Beeinflussung der Preise bedarf. Einerseits durch Verbreitung falscher Nachrichten, anderseits durch Aufkaufen oder Abgeben grosser Mengen von Werthpapieren (Waaren) wird der Markt gewaltsam der einseitigen Speculation dienstbar gemacht. Um diese Art Börsenspiel einzuschränken, wurde das sogenannte Arrangement an den Effecten-Börsen eingeführt. Die Stückezahl der Effecten, welche an der Börse im Laufe einer gewissen Frist zum Zwecke des Differenzspieles gekauft und verkauft wird, übersteigt weit die vorhandene Menge und muss daher in gewissen festgesetzten Terminen das Revirement des Börsengeschäftes arrangirt werden. Dieser Vorgang besteht nun darin, dass die von ein und derselben Person einerseits lieferbaren und anderseits zu beziehenden Stücke in sich ausgeglichen werden, hingegen der Ueberschuss der Ersteren oder Letzteren effectiv geliefert, beziehungsweise übernommen werden muss. Auf diese Weise wird das Börsenspiel von Zeit zu Zeit in die legalen Grenzen der Speculation zurückgedrängt. Da nun zumeist die Geldmittel der Speculation nicht ausreichen, um die lieferbaren respective zu beziehenden Stücke baar zu beschaffen oder gegen baar zu beziehen, so muss der Bankcredit in Anspruch genommen werden, indem auf dem Wege des Report- und Deportgeschäftes den Anforderungen Genüge geleistet wird.

Durch die Effectenbelehnung im börsenmässigen Sinne wird es möglich, effectiv übernommene Stücke durch einen Bruchtheil ihres Werthes zu begleichen, beziehungsweise zu liefernde Stücke sich zu beschaffen. Dieser Vorgang, unter welchem die sogenannte „Effectenversorgung" verstanden wird, bildet eine der wichtigsten Bedingungen für die reguläre Börsenspeculation.

Eine wirthschaftlich nicht minder wichtige Art der Speculation ist das Arbitragegeschäft. Das Wesen desselben besteht in der Ausnützung der Preisdifferenzen auf verschiedenen Märkten. Was die einfache Speculation in localer Beziehung bewirkt, gilt von der Arbitrage in Bezug auf den grossen Weltverkehr.

Das Wesen der Speculation bringt es schon unter normalen Umständen mit sich, dass die Voraussetzungen, welche dem Speculanten bezüglich der voraussichtlichen Preisbildung zur Grundlage dienen, infolge etwaiger plötzlicher Veränderung der Verhältnisse eine gegenseitige Wirkung herbeiführen können, so das die auf eine bestimmte Richtung der Preisbildung berechnete Speculation durch das unvermuthete Eintreffen der entgegengesetzten Richtung zu erheblichen Verlusten führen kann. Um wieviel mehr ist diese Möglichkeit geboten, sobald gegen jede Berechtigung die Preisbildung gewaltsam beeinflusst und mit der Speculation Missbrauch getrieben wird. In einem solchen Falle ist jedes Calcul vergeblich und jede Voraussicht, mag dieselbe noch so begründet sein, muss ihre Wirkung verfehlen. Die Speculation, welche ihre Interessen einseitig vertritt, hat die Tendenz, abnormale Preise zu erzielen und sucht dies auf dem Wege der Verleugnung des thatsächlichen Bedürfnisses zu erreichen. Hier wird das wirthschaftliche Gesetz von Nachfrage und

Angebot einer Fälschung preisgegeben, indem auf künstlichem Wege die Preisbildung im Interesse einzelner Speculanten beeinflusst wird. Eine solche Manipulation einzelner Speculanten ist geeignet, grosse Gefahren für das gesammte wirthschaftliche Getriebe heraufzubeschwören, da sie oft die übrige Speculation mitreisst, eine Art Ueberspeculation erzeugend, deren Opfer zumeist das Privatcapital wird. Das Engagement der Speculation nimmt in solchen Fällen Dimensionen an, welche die Mittel derselben weit übersteigen, so dass ein Zurückdämmen in ihre legalen Grenzen grossen Capitalsaufwand erfordert. Die Mittel der Banken werden durch die übermässige Anschwellung des Reportgeschäftes in einer Weise in Anspruch genommen, dass oft ausserordentliche Massnahmen ergriffen werden müssen, um eine Krise zu verhüten. Diesbezüglich bildet der bankmässige Report-Zinsfuss eines jener Hauptventile zur Vermeidung von Ueberspeculation.

Die mobilen Geldmittel der Banken unterliegen in ihrem Umfange ebenso einer Veränderlichkeit, wie diejenigen der allgemeinen Speculation, da die Bankinstitute bloss als vermittelnde Factoren zwischen ihren Creditoren und Debitoren fungiren. Infolge dessen macht sich hier die Wirkung geltend, dass bei grösserem Abströmen von Baarmitteln zu Lombard- und Reportzwecken der diesbezügliche Zinsfuss steigt, wodurch die Bedingungen der Geldbeschaffung erschwert und solchermassen auch der Speculation Schranken gesetzt werden.

Dieses sonst legale Mittel findet jedoch manchmal auch dann Anwendung, wenn die Bedingungen hiefür gar nicht vorhanden sind, so dass auf indirectem Wege die Preisbildung willkürlich beeinflusst wird, indem ohne jede Nothwendigkeit, die zu Reportzwecken dienenden Capitalien der Börse plötzlich entzogen werden und auf diese Weise die Speculation aus ihrer Position verdrängt wird. Die Banken haben die Gepflogenheit, die im laufenden Geschäfte für die Kundschaft, für Gründungen und Emissionen nicht verwendeten Mittel in die Börse förmlich hineinzupumpen. Die Vorschüsse auf Effecten werden als Geschäftsreserve behandelt. Ist nun viel Geld vorhanden, muss schon die ungewohnte Leichtigkeit des Credits zur Ausdehnung der Engagements verleiten. Vermehrt sich der Bedarf, so wird plötzlich das Capital der Börse entzogen, wenn auch die Bedingungen einer Ueberspeculation vollständig mangeln. Daraus entsteht der sonderbare Widersinn einer Creditform, welche die Speculation zwingt, gerade in jenen Augenblicken das Geld aus dem Geschäfte zu ziehen, in denen es am schwersten flüssig zu machen ist. Der Credit wird in jenen Zeiten am stärksten beschränkt, in denen er am nöthigsten ist. Die Börse ist daher in einer sclavischen Abhängigkeit von den Banken, deren Creditpolitik sehr häufig für Steigen oder Fallen der Preise massgebend wird.

Auf diese Weise wird eine Unsicherheit im börsenmässigen Verkehre erzeugt, deren Ursachen in schweren inneren Gebrechen der Organisation der Börsen, in einem leichtfertigen Handelscredite und einem missbräuchlich angewendeten Geldcredite zu suchen sind.

DIE MATHEMATIK

im

Dienste der Nationalökonomie

unter Rücksichtnahme auf die

praktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik

mit einigen, durch selbständige wissenschaftliche Errungenschaften auf dem Gebiete der reinen Mathematik begründeten, neuen Fundamenten der politischen Arithmetik

für Versicherungs- und Bank-Institute, sowie auch Lehrkräfte höherer Bildungsanstalten besonders geeignet.

Supplementband zum gleichnamigen Werke.

Verfasst

von

Dr. LUDWIG GROSSMANN

Inhaber des Ersten Wiener mathematischen Bureau und Herausgeber der Fachschrift „Controle".

Zwölfte Lieferung.

WIEN 1900.

Im Selbstverlage des Verfassers.

III., Sofienbrückengasse Nr. 14.

Druck von Josef Bayer & Comp., Wien, I., Wollzeile 25.

INHALT.

Druckfehler und Correcturen.

Auf Seite 7 unterhalb der Formel 10) soll es richtig lauten: . . . . je zwei Gleichungen zwischen k und x.
Auf derselben Seite zweite Zeile von unten soll es lauten anstatt: $z = \mathfrak{f}(z, h)$, richtig $z = \mathfrak{f}(x, h)$.
Auf Seite 9, Form. II soll es lauten anstatt: $k = \mathfrak{F}(k, x)$, richtig $k = \mathfrak{F}_1(k, x)$
Auf Seite 11, Formel 26) fehlt die Schlussklammer.
Auf derselben Seite neunte Zeile von unten soll es lauten anstatt: positive Zahlen beliebiger Grösse, richtig: positive Zahlen, welche kleiner als 1 sind.
Ferner fünfte Zeile von unten soll es richtig lauten: $d = d_1 = 1$.
Auf der 12. Seite in Formel 30) soll der Nenner des innerhalb der eckigen Klammer stehenden Bruches richtig lauten: $\dfrac{1 - k_0}{e^{1 + k_0^2}} . 2 \cdot 602.$

Auf Seite 15, Formel 5) soll es richtig lauten: $\dfrac{lA}{lB} = \dfrac{dA}{dB}$, anstatt $\dfrac{lA}{lB} \cdot \dfrac{dA}{dB}$.

Nachtragscorrectur zur Lieferung VIII: Auf Seite 61, sechste Zeile ist in Klammern eingeschaltet: „Die Gleichung II ist, wie bereits bemerkt worden, mit Rücksicht auf ihre functionelle Beschaffenheit imaginär". Dies gilt nur für negative Werthe von t; sind diese jedoch positiv, liefert die bezügliche Form reelle Werthe.

Die Mathematik

im

Dienste der Nationalökonomie.

Lieferung I—VI nebst Supplement-Lieferung VII—XII.

Gesammt-Inhalt.

Allgemeine mathematische Theorien.

Versicherungstechnik.

Lebensversicherung:

Die Prämie für Langlebigkeit. Lieferung III.

Untersuchungen über die gemeinschaftliche Grundlage der Lebens-, Renten-, Invaliditäts- und Altersversicherung. Lieferung IV.

Untersuchungen über die Beschaffenheit der Prämienreserve. Lieferung II.

Zur Theorie und näherungsweisen Berechnung der Prämienreserve eines Versicherungsstockes. Lieferung V und VI.

Die Beziehung zwischen der Todesfall-Versicherungsprämie und der Mise einer lebenslänglichen Leibrente. Lieferung VI.

Untersuchungen über die geometrisch-analystische Darstellung des Absterbegesetzes. Lieferung VI.

Noch einige mathematische Grundlagen für den steigenden Gewinnantheil bei Lebensversicherungen. Lieferung VII.

Der Storno und dessen Einfluss auf die Zuschlagsprämie bei der Versicherung mit steigendem Gewinnantheil. Lieferung VIII.

Der sinkende Zinsfuss und dessen Einfluss auf die garantirte Rente Lieferung VIII.

Die Beziehung der einmaligen Prämie zur Leibrenten-Mise mit Rücksicht auf den zugrunde gelegten Zinsfuss. Lieferung VIII.

Die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden als Element einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und die hieraus entspringenden Conclusionen. Lieferung VIII.

Die allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und deren Bedeutung für die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie. Lieferung VIII und IX.

Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln. Lieferung IX.

Reflexionen über unsere Formel, betreffend die exacte Ausgleichung der Sterbetafeln. Lieferung IX, X und XII.

Die Analogie im Wesen der mathematischen Beziehung zwischen den discontirten Zahlen der Lebenden und den Leibrenten-Misen mit jenen der grundlegenden Relation des allgemeinen Absterbegesetzes. Lieferung X.

Nähere Untersuchungen über das Wesen der Mortalitätscurven und deren mathematisch-analytische Beschaffenheit. Lieferung X.

Mathematische Untersuchungen über die qualitative Beschaffenheit eines Versicherungsstockes. Lieferung XI.

Zur Frage der Hypothekar-Lebensversicherung und ihrer praktischen Lösung. Lieferung XI.

Zur Frage der Versicherung minderwerthiger Leben. Lieferung XI.

Die Sterblichkeits-Statistik, ihre Entwicklung und Anwendung für die Construction von Sterbetafeln. (Mathematisch-exacte Darstellung des Absterbegesetzes.) Lieferung XII.

Alters- und Invaliditätsversicherung:

Eine technische Basis für die Alters- und Invaliditätsversicherung. Lieferung III.

Untersuchungen über das Wesen der Invalidität vom Standpunkte des Absterbegesetzes. Lieferung IV.

Die Prämienberechnung für die Alters- und Invalidenrente. Lieferung IV.

Die Versicherung für den Fall der Invalidität in Folge Kräfteverfalles. Lieferung V.

Combination der Lebens- und Invaliditätsversicherung. Lieferung V.

Eine empirische Approbation unserer Hypothese, betreffend die mathematisch-physiologische Ableitung des Validitätsverlaufes beim Menschen aus dem Absterbegesetze. Lieferung VII.

Reflexionen über Zweck und versicherungstechnische Anwendung der Methode, betreffend die mathematisch-physiologische Ableitung des Validitätsverlaufes beim Menschen aus dem Absterbegesetze. Lieferung VII.

Ueber die geometrisch-analytische Beschaffenheit der Curve der Invaliden nach den Ergebnissen unserer Methode, betreffend die mathematisch-physiologische Ableitung des Validitätsverlaufes beim Menschen aus dem Absterbegesetze. Lieferung X.

Empirische Grundlagen für die Altersversicherung. Lieferung XI.

nfall-Versicherung:

Eine Methode für die Cumulirung homogener, auf statistischen Daten ungleicher Frequenz beruhender Wahrscheinlichkeiten. Lieferung VII.

Das mathematische Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit. Lieferung XII.

euerversicherung:

Mathematische Limitirung der Feuerversicherungsprämie. Lieferung II.

Mathematische Anleitung zur Schätzung der Brandschaden-Reserven. Lieferung II.

Reflexionen über die Eventualität eines minimalen Brandschaden-Ergebnisses. Lieferung III.

Systematische Riskenschätzung in der Brandschadenversicherung. Lieferung III.

Rückdeckung, Austausch und Theilung der Brandschaden-Risken. Lieferung III.

Ueber das Verhältniss der Feuerversicherungsprämie zum Risiko. Lieferung IV.

Zur Methode einer rationellen Handhabung der Brandschadenversicherung. Lieferung VI.

Zur Frage einer gemeinschaftlichen Statistik in der Feuerversicherung. Lieferung XI.

ersicherung gegen Verlosungsverlust:

Die Verlustchance verzinslicher Lospapiere. Lieferung VI.

Die Riskengrenze bei der Versicherung gegen Verlosungsverlust. Lieferung VII.

Finanztechnik.

inanzwesen:

Anwendung der Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen auf die Zinseszins- und Rentenrechnung. Lieferung I.

Zinseszins- und Rentenrechnung mittelst Hilfstabellen. Lieferung V.

Die anticipative und decursive Verzinsung und ihre praktische Anwendung. Lieferung IV.

Untersuchungen über die gebräuchliche anticipative Verzinsungsform im Bankwesen. Lieferung IV.

Mathematische Principien für die Conversion von Tilgungsrenten. Lieferung II.

Staats- und Prioritätsanlehen. Lieferung II.

Fragmente finanzieller Disciplinen. Lieferung III.

Zur Conversion öffentlicher Anlehen. Lieferung VI.

Ueber die relative Werthbestimmung verzinslicher Lospapiere. Lieferung VI.

Das Wesen der Prämienpfandbriefe und deren Bedeutung für den Boden- und Hypothekar-Credit. Lieferung VII.

Finanztechnische Anleitung für die planmässige Tilgung der auf Ausgbabe von Hypothekarobligationen, Pfandbriefen und Schuldverschreibungen beruhenden Los- und Prämien-Anlehen. Lieferung VII.

Ueber die Wahrscheinlichkeit des zu erreichenden Zeitpunktes der Conversionsreife einer öffentlichen Schuld. Lieferung VII.

Die Coursreserve als Präventivmittel gegen die Schwankungen der Capitalsrentabilität infolge sinkenden Zinsfusses. Lieferung VIII.
Das börsenmässige Prämien- und Stellage-Geschäft in seiner Bedeutung vom assecuratorischen Gesichtspunkte. Lieferung X.
Ueber das Wesen des Zinsfusses beim bankmässigen Credit. Lieferung XI.

Bankwesen:

Mathematische Reflexionen über den Boden- und Hypothekarcredit. Lieferung II.
Reflexionen über den Einfluss des sinkenden Zinsfusses auf den Boden- und Hypothekarcredit. Lieferung III.
Betrachtungen über die Correlation zwischen Zinsfuss und Tilgungsfrist bei Boden- und Hypotekar-Darlehen. Lieferung III.
Reflexionen über den Einfluss der Veränderung des Provisionspercentes auf das Gewinnerträgniss beim Boden- und Hypotekarcredit. Lieferung IV.
Die Creditvereine und ihre innere Organisation. Lieferung II.
Der Duchschnittszinsfuss im Escompte. Lieferung IV.
Eine praktische Methode zur Ermittlung der Portefeuille-Vortragszinsen im Escompte Lieferung VI.
Betrachtungen über die Effectenbelehnung vom Standpunkte des bankmässigen Verkehres. Lieferung VI.
Landwirthschaftliche Creditvereine und Genossenschaften. Lieferung IX.
Reflexionen über die wirthschaftliche Bedeutung des Giro- und Checkverkehres. Lieferung IX.
Mathematische Darstellung der Capitalsaufzinsungsform unter Voraussetzung eines veränderlichen Zinsfusses. Lieferung IX.
Ueber das Wesen des wahrscheinlichen Werthes ungewisser Güter und Anwartschaften. Lieferung IX.
Die Verwaltungskosten tilgbarer Anlehen, berechnet nach Maasgabe der Capitals-Annuität. Lieferung X und XI.
Die „Safe Depositories" und ihre volkswirthschaftliche Bedeutung. Lieferung XI.
Betrachtungen über die wirthschaftlichen Functionen der Banken und deren Entwicklung. Lieferung XII.

Staatswissenschaft und Geldwesen:

Beiträge zur Lösung der Währungsfrage. Lieferung II.
Erörterungen über den Zinsfuss vom volkswirthschaftlichen Standpunkte. Lieferung III.
Mathematische Begriffe staatswirthschaftlicher Finanzpolitik. Lieferung III.
Zinsfuss und Securität vom staatswissenschaftlichen Standpunkte. Lieferung IV.
Finanzpolitische und staatswissenschaftliche Reflexionen. Lieferung IV.
Finanzpolitische Reflexionen vom Standpunkte des Staatssocialismus. Lieferung V.
Zur Frage der Valutaregulirung. Lieferung V.
Finanzpolitische und staatswissenschaftliche Betrachtungen über die Valutaregulirung in Oesterreich-Ungarn. Lieferung VI.
Die wirthschaftliche Seite der Valutaregulirung in Oesterreich-Ungarn. Lieferung VI.
Zur Lösung der Silberfrage. Lieferung VIII.
Die Silberfrage und der Bimetallismus. Lieferung IX.
Reflexionen über die Veränderung des relativen Werthes und der couranten Kaufkraft des Geldes. Lieferung X.
Reflexionen über das Steigen des Zinsfusses im ursächlichen Zusammenhange mit den wirthschaftlichen Verhältnissen. Lieferung XI.
Betrachtungen über die willkürliche Beeinflussung der Preisbildung mit Rücksicht auf die börsemässige Speculation. Lieferung XI.

Theorie und Lösung der irreductiblen transcendenten Gleichungen.

VII.

Transcendente Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Nachdem wir in den früheren Capiteln die Lösung der transcendenten Gleichungen mit zweien Unbekannten ausführlich genug erörtert haben, so wollen wir zu denen mit mehreren Unbekannten übergehen, wobei wir die Gleichungen mit logarithmischen, wie auch cyclometrischen und trigonometrischen Functionen in ein System zusammenfassen; da die bereits festgesetzten Bestimmungen der einzelnen Arten auch bei diesen Gleichungen in Anwendung gebracht werden können, und es daher überflüssig wäre, dieselben nochmals zu specialisiren. Die bisherigen Untersuchungen hinsichtlich dieser Frage lassen darauf schliessen, dass auch die Gleichungen mit mehreren Unbekannten vermittelst der Substitutions- und Eliminations-Methode löslich sein dürften; es wird daher auch hier eine dieser Lösungsarten im entsprechenden Falle angewendet werden können. Ausser diesen beiden Methoden werden aber hier noch andere in Betracht kommen müssen; da es oft vorkommt, dass die ersteren Methoden bei einer oder der anderen Gleichung zu keinem Ziele führen. Diesbezüglich können drei verschiedene Fälle berücksichtigt werden.

Bekanntlich sind zur Bestimmung einer Gleichung mit n Unbekannten n Gleichungen nothwendig, welche im Wesen verschiedenartig beschaffen sein können. Und eben von dieser Beschaffenheit hängt auch die Anwendbarkeit jener Methoden in besonderen Fällen ab.

Die beiden ersteren Methoden werden nämlich blos in solchen Fällen Anwendung finden können, wo in einer jeden der n Bestimmungsgleichungen je nur zwei Unbekannte vorhanden sind. In Anbetracht dessen wird also eine der beiden allgemeinen Methoden nach Maassgabe der mehr oder minder grossen Einfachheit des durch die Eine oder Andere sich ergebenden Resultates, aus welchem sodann die Ersatzgleichungen der jeweiligen Unbekannten entspringen, in Anwendung gebracht werden müssen, wobei jedoch hauptsächlich die Continuität der sich ergebenden Substitutionsgleichungen in Betracht gezogen werden muss.

Sind jedoch in den Bestimmungsgleichungen mehr als zwei Unbekannte vorhanden, so werden die obigen allgemeinen Methoden nicht in Anwendung gebracht werden können, sondern es wird hier ein besonderer Vorgang zur Auffindung der Werthe der vorhandenen Unbekannten dienen.

Diese beiden Arten transcendenter Gleichungen können übrigens blos Functionen von je einer einzigen Unbekannten als Summanden enthalten, wesshalb wir

Wenn wir nun für die obigen rechter Hand stehenden Ausdrücke entsprechende Abkürzungen wählen, und dieselben durch die Functionen

$$x = A\,(a, b, c, d, \dots q, p, x) \qquad z = B\,(a, q, p, \dots d, c, b, z)$$
$$x = \Psi\,(q, p, \dots d, c, b, a, x)\,, \qquad z = \Gamma\,(b, c, d, \dots p, q, a, z)\,,$$
$$u = \Delta\,(b, a, q, p, \dots d, c, u) \qquad r = \Phi\,(q, a, b, c, d, \dots p, r)$$
$$u = E\,(c, d, \dots p, q, a, b, u)\,, \dots\, r = \Theta\,(p, \dots d, c, b, a, q, r)$$

ausdrücken, sind

$$x = \mathop{\mathbf{E}}^{m=k} A\,(a, b, c, d, \dots q, p, [m]) = \mathop{\mathbf{E}}^{m=k} \Psi\,(q, p, \dots d, c, b, a, [m])$$
$$z = \mathop{\mathbf{E}}^{n=k} B\,(a, q, p, \dots d, c, b, [n]) = \mathop{\mathbf{E}}^{n=k} \Gamma\,(b, c, d, \dots p, q, a, [n])$$
$$u = \mathop{\mathbf{E}}^{l=k} \Delta\,(b, a, q, p, \dots d, c, [l]) = \mathop{\mathbf{E}}^{l=k} E\,(c, d, \dots p, q, a, b, [l]) \dots$$
$$\text{u. s. f. } r = \mathop{\mathbf{E}}^{o=k} \Phi\,(q, a, b, c, d, \dots p, [o]) = \mathop{\mathbf{E}}^{o=k} \Theta\,(p, \dots d, c, b, a, q, [o]),$$

die denselben entsprechenden Ersatzgleichungen, wobei die Werthe m, n, l . . . . . . o die hiezugehörigen ersten Näherungswerthe bedeuten, weshalb sie zum Unterschiede von den Uebrigen mit Klammern versehen sind. Offenbar hat uns hier hauptsächlich die Substitutionsmethode zum Ziele geführt und entspricht dieselbe auch in Betreff der Einfachheit und Continuität der Ersatzgleichungen unseren Anforderungen. Der nächsterwähnte Fall behandelt jene Gleichungen, deren Bestimmungsgleichungen drei oder mehrere Functionen einzelnen Unbekannten in sich fassen. In diesem Falle wird also die allgemeine Gleichung folgendermaassen dargestellt werden müssen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} a &= \alpha\,(x) + \beta\,(y) + \gamma\,(z) + \delta\,(u) \dots \\ b &= \varepsilon\,(x) + \lambda\,(y) + \mu\,(z) + \nu\,(u) \dots \\ c &= \omega\,(x) + \varsigma\,(y) + \sigma\,(z) + \tau\,(u) \dots \\ d &= \varkappa\,(x) + \varphi\,(y) + \psi\,(z) + \chi\,(u) \dots \end{aligned}$$

Um nun die Lösung dieser Gleichung durchführen zu können, müssen wir vor allem die Näherungswerthe der vorhandenen Unbekannten auffinden, welches dadurch ermöglicht wird, dass wir in der Gleichung für die Werthe aller Unbekannten eine einzige mögliche Zahl t einsetzen, wodurch wir eine Relation erhalten, welche uns das Verhältniss der Summen der verschiedenen Functionen ein und derselben Unbekannten angibt, d. h.:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \alpha\,(x) + \varepsilon\,(x) + \omega\,(x) + \varkappa\,(x) \dots &= k_0 \\ \beta\,(y) + \lambda\,(y) + \zeta\,(y) + \varphi\,(y) \dots &= k_1 \\ \gamma\,(z) + \mu\,(z) + \sigma\,(z) + \psi\,(z) \dots &= k_2 \\ \delta\,(u) + \nu\,(u) + \tau\,(u) + \chi\,(u) \dots &= k_3 \end{aligned} \qquad x = y = z = u = \dots = t$$

u. s. f.

wobei $k_0 + k_1 + k_2 + k_3 = P$ ist. Soll nun P der Summe der Grössen $a, b, c, d, \dots$ gleichkommen, so müssen wir den Quotienten $\frac{B}{P} = p$ in Rechnung bringen, wobei $B = a + b + c + d \dots$ ist. Es wird demgemäss

$$k_0 \cdot p + k_1 \cdot p + k_2 \cdot p + k_3 \cdot p = B$$

sein müssen und somit auch die Folgerung, wenn die Gleichung (3) erfüllt werden soll, folgendermaassen lauten muss:

$$
(5) \qquad \begin{aligned}
\alpha\,(x) + \varepsilon\,(x) + \omega\,(x) + \varkappa\,(x) \,.\,. &= k_0 \,.\, p \\
\beta\,(y) + \lambda\,(y) + \varsigma\,(y) + \varphi\,(y) \,.\,. &= k_1 \,.\, p \\
\gamma\,(z) + \mu\,(z) + \sigma\,(z) + \psi\,(z) \,.\,. &= k_2 \,.\, p \\
\delta\,(u) + \nu\,(u) + \tau\,(u) + \chi\,(u) \,.\,. &= k_3 \,.\, p
\end{aligned}
$$

u. s. f.

worin sodann die in Gleichung (4) bestehende Bedingung wegfällt. Aus diesen Gleichungen lassen sich nun die Näherungswerthe vermittelst aufzustellender Substitutions-Gleichungen auf leichte Weise auffinden; und setzen wir sonach die gefundenen Werthe in die Gleichung (3), so ergibt sich:

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
\alpha_0\,(x) + \beta_0\,(y) + \gamma_0\,(z) + \delta_0\,(u) \,\ldots &= a_0 \\
\varepsilon_0\,(x) + \lambda_0\,(y) + \mu_0\,(z) + \nu_0\,(u) \,\ldots &= b_0 \\
\omega_0\,(x) + \varsigma_0\,(y) + \sigma_0\,(z) + \tau_0\,(u) \,\ldots &= c_0 \\
\varkappa_0\,(x) + \varphi_0\,(y) + \psi_0\,(z) + \chi_0\,(u) \,\ldots &= d_0
\end{aligned}
$$

u. s. f.

als Resultat, woraus sich durch Anwendung der Quotienten $\frac{a}{a_0}, \frac{b}{b_0}, \frac{c}{c_0}, \frac{d}{d_0} \ldots$ die nachstehenden Relationen ergeben:

$$
(7) \qquad \begin{aligned}
\frac{a}{a_0} \cdot \alpha_0\,(x) + \frac{a}{a_0} \cdot \beta_0\,(y) + \frac{a}{a_0} \cdot \gamma_2\,(z) + \frac{a}{a_0}\,\delta_0\,(u) \,\ldots &= a \\
\frac{b}{b_0} \cdot \varepsilon_0\,(x) + \frac{b}{b_0} \cdot \lambda_0\,(y) + \frac{b}{b_0} \cdot \mu_0\,(z) + \frac{b}{b_0}\,\nu_0\,(u) \,\ldots &= b \\
\frac{c}{c_0} \cdot \omega_0\,(x) + \frac{c}{c_0} \cdot \varsigma_0\,(y) + \frac{c}{c_0} \cdot \sigma_0\,(z) + \frac{c}{c_0} \cdot \tau_0\,(u) \,\ldots &= c \\
\frac{d}{d_0} \cdot \varkappa_0\,(x) + \frac{d}{d_0} \cdot \varphi_0\,(y) + \frac{d}{d_0} \cdot \psi_0\,(z) + \frac{d}{d_0}\,\chi_0\,(u) \,\ldots &= d
\end{aligned}
$$

worin offenbar $\frac{a}{a_0} \cdot \alpha_0\,(x) = \alpha\,(x)$, $\frac{a}{a_0}\,\beta_0\,(y) = \beta\,(y)$ u. s. f. sein muss.

Hieraus ergeben sich abermals neue genauere Werthe für x, y, z, u, u. s. f., welche neuerdings in die Gleichung (3) eingesetzt die Summenwerthe $a, b, c, d, \ldots$ liefern, welche wiederum analog der Gleichung (6) ein der Gleichung (7) entsprechendes Resultat ergeben.

Setzen wir dieses in derselben Weise fort, so erhalten wir schliesslich ziemlich genaue Näherungswerthe für x, y, z, u u. s. f. und somit auch der denselben entsprechenden Functionen $\alpha_n\,(x)$, $\beta_n\,(y)$, $\gamma_n\,(z)$ etc.

Aus der ursprünglichen Gleichung (3) lassen sich nun mit Hilfe der erzielten Näherungswerthe Relationen aufstellen:

$$
\begin{aligned}
a - (\gamma_n\,(z) + \delta_n\,(u) \,\ldots) &= \alpha\,(x) + \beta\,(y) \\
b - (\varepsilon_n\,(x) + \nu_n\,(u) \,\ldots) &= \lambda\,(y) + \mu\,(z) \\
c - (\omega_n\,(x) + \varsigma_n\,(y) \,\ldots) &= \tau\,(z) + \tau\,(u) \\
d - (\varphi_n\,(y) + \psi_n\,(z) \,\ldots) &= \chi\,(u) + \varkappa\,(x)
\end{aligned}
$$

u. s. f.

$$\begin{array}{l}
a - (\beta_n (y) + \delta_n (u) \ldots) = \alpha (x) + \gamma (z) \\
b - (\varepsilon_n (x) + \lambda_n (y) \ldots) = \mu (z) + \nu (u) \\
c - (\omega_n (x) + \sigma_n (z) \ldots) = \tau (u) + \varsigma (y) \\
d - (\psi_n (z) + \chi_n (u) \ldots) = \varphi (y) + \varkappa (z)
\end{array}$$

u. s. f.

$$\begin{array}{l}
a - (\gamma_n (z) + \beta_n (y) \ldots = \alpha (x) + \delta (u) \\
b - (\lambda_n (y) + \nu_n (u) \ldots = \mu (z) + \varepsilon (x) \\
c - (\omega_n (x) + \tau_n (u) \ldots = \varsigma (y) + \sigma (z) \\
d - (\varkappa_n (x) + \psi_n (z) \ldots = \chi (u) + \varphi (y)
\end{array}$$

u. s. f. u. s. f.

$$\begin{array}{l}
a - (\alpha_n (x) + \delta_n (u) \ldots) = \beta (y) + \gamma (z) \\
b - (\nu_n (u) + \mu_n (z) \ldots) = \varepsilon (x) + \lambda (y) \\
c - (\sigma_n (z) + \varsigma_n (y) \ldots) = \tau (u) + \omega (x) \\
d - (\varphi_n (y) + \varkappa_n (x) \ldots) = \psi (z) + \chi (u)
\end{array}$$

u. s. f.

$$\begin{array}{l}
a - (\alpha_n (x) + \gamma_n (z) \ldots) = \beta (y) + \delta (u) \\
b - (\mu_n (z) + \lambda_n (y) \ldots) = \nu (u) + \varepsilon (x) \\
c - (\varsigma_n (y) + \tau_n (u) \ldots) = \omega (x) + \sigma (z) \\
d - (\chi_n (u) + \varkappa_n (x) \ldots) = \psi (z) + \varphi (y)
\end{array}$$

u. s. f. u. s. f.

$$\begin{array}{l}
(a - \alpha_n (x) + \beta_n (y) \ldots) = \gamma (z) + \delta (u) \\
(b - \mu_n (z) + \varepsilon_n (x) \ldots) = \nu (u) + \lambda (y) \\
(c - \tau_n (u) + \sigma_n (z) \ldots) = \varsigma (y) + \omega (x) \\
(d - \varphi_n (y) + \varkappa_n (u) \ldots) = \varkappa (x) + \psi (z)
\end{array}$$

u. s. f. u. s. f. u. s. f.

Die Anzahl dieser Relationen ist bei n Unbekannten $\frac{n}{2} (n - 1)$; und können aus denselben auf bekannte Art die Werthe der Unbekannten gefunden werden. Eine jede dieser Relationen liefert für jede Unbekannte einen Werth, so dass wir bei einer Gleichung mit n Unbekannten für eine jede derselben $(n - 1) \frac{n}{2}$ Werthe erhalten. deren Mittelwerth zwar kein vollkommen genauer, jedoch annähernd richtiger Werth der betreffenden Unbekannten ist.

Wie ersichtlich, können wir bei dieser Art von Gleichungen keine directe Lösungsart anwenden, wir wollen jedoch darauf hinweisen. dass die Lösung derselben eine viel einfachere ist, sobald gewisse gegenseitige Beziehungen der einzelnen in der Gleichung vorkommenden Functionen vorhanden sind, welche eine geeignete Transformation zulassen.

Wir kommen endlich auf jene Gleichungen, bei denen Functionen von mehreren Unbekannten vorkommen, zu sprechen. Wie schon bereits bemerkt, hängt die Lösung derselben von deren glücklichen Beschaffenheit ab, und kann daher nicht allgemein dargestellt werden. Insbesondere wird die Lösung solcher Gleichungen, deren einzelne Bedingungsgleichungen mehrere Functionen solcher

Art in sich fassen, grosse Schwierigkeiten bereiten und werden bei denselben die Werthe der einzelnen Unbekannten nur successive durch Annäherung erreicht werden können, wobei abermals die letzt angeführte Methode von grossem Nutzen sein wird. Wir wollen uns daher bei den letzteren in keine nähere Eröterung einlassen und wollen es dem Scharfsinne des Lesers überlassen, auf welche Art die hier angeführten Methoden mit Vortheil angewendet werden können.

Um nun aber theilweise unserer Aufgabe zu entsprechen, wollen wir folgende praktische Methode zur Anwendung empfehlen, wobei wir zugleich bemerken, dass dieselbe nur dann zum Ziele führt, wenn die einzelnen Bestimmungsgleichungen blos solche Functionen enthalten, in denen die Anzahl der Unbekannten die Zahl Zwei nicht übersteigt; und auch diese werden nur unter gewissen Bedingungen, welche wir an passender Stelle anführen wollen, eine mögliche Lösung zulassen.

Es ist nun aber die Frage aufgeworfen, warum jene Gleichungen, deren Bedingungsgleichungen, aus Functionen von mehr als zwei Unbekannten bestehen, keine reguläre Lösung zulassen. Bekanntlich ist die erste Bedingung der Lösung einer Gleichung mit mehreren Unbekannten die, dass eine Unbekannte durch die Anderen ausgedrückt wird; ist dies nicht möglich, so ist die Lösung der betreffenden Gleichung von vornherein unmöglich; einerlei, ob einzelne Functionen der Gleichung transcendente oder algebraische sind. Dies ist nun bei den benannten Gleichungen zu oft der Fall, weshalb wir auch manchesmal auf Umwegen zu einem vielleicht nur äusserst mangelhaften Resultate gelangen können. Mit Rücksicht auf diesen Umstand wollen wir blos zum Exempel die Behandlungsweise jener, blos Functionen von zwei Unbekannten enthaltenden Gleichungen von n Unbekannten anführen.

Eine solche Gleichung von allgemeiner Form ist folgende:

$$(8)\qquad \begin{aligned} a &= \alpha\,(x,\,y) + \beta\,(x,\,z) \\ b &= \gamma\,(x,\,z) + \delta\,(y,\,z) \\ c &= \varepsilon\,(y,\,z) + \lambda\,(x,\,u) \\ &\vdots \\ p &= \varkappa\,(r,\,s) + \tau\,(s,\,t) \\ q &= \varphi\,(s,\,t) + \psi\,(x,\,y) \end{aligned}$$

Da nun aber die Erörterung der benannten Methode für solch allgemeine Form eine zu langwierige und complicirte wäre, so wollen wir nur eine Gleichung mit dreien Unbekannten der Lösung unterziehen und aus der Analogie derselben auf die Lösung der obigen schliessen.

Um also die Gleichung

$$(9)\qquad \begin{aligned} a &= \alpha\,(x,\,y) + \beta\,(x,\,z) \\ b &= \gamma\,(x,\,z) + \delta\,(y,\,z) \\ c &= \varepsilon\,(y,\,z) + \lambda\,(x,\,y) \end{aligned}$$

lösen zu können, setzen wir für die Unbekannten y und z neue Functionen von x und je einer zweiten Unbekannten: d. h. $y = f\,(x, k)$, $z = \mathfrak{f}\,(x, h)$ ein und operiren sonach folgendermaassen.

Wir erhalten durch Substituten die Gleichungen

$$(10)\qquad \begin{aligned} a &= \alpha\,(x, f\,[x, k]) + \beta\,(x, \mathfrak{f}\,[x, h]) \\ b &= \gamma\,(x, \mathfrak{f}\,[x, h]) + \delta\,(f\,[x, k], \mathfrak{f}[x, h]) \\ c &= \varepsilon\,(f\,[x, k], \mathfrak{f}\,[x, h]) + \lambda\,(x, f\,[x, k]) \end{aligned}$$

woraus sich sodann je zwei Gleichungen k und x, wie auch zwischen h und x ergeben, von denen hauptsächlich die Lösungsmöglichkeit der gegebenen Gleichung abhängt.

Dieselben werden nachstehende Form besitzen, und zwar den drei Bedingungsgleichungen gemäss:

$$(11)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) \ldots f\,(k, x) = A\,[(a - \beta\,(x, \mathfrak{f}\,(h, x))), x] \\ &(\mathrm{II}) \ldots \mathfrak{f}\,(h, x) = B\,[(a - \alpha\,(x, f\,(k, x))), x] \\ &(\mathrm{III}) \ldots f\,(h, x) = \Delta\,[(b - \gamma\,(x, \mathfrak{f}\,(h, x))), \mathfrak{f}\,(h, x] \\ &(\mathrm{IV}) \ldots \mathfrak{f}\,(k, x) = E\,[(c - \lambda\,(x, f\,(k, x))), f\,(k, x] \end{aligned}$$

wobei A, B, Δ und E als reciproke Functionen von α, β, δ und ε betrachtet werden müssen.

Es hängt nun davon ab, ob aus je zweien dieser Gleichungen sich x durch k einerseits und durch h andererseits abgesondert ausdrücken lässt, in welchem Falle wir folgende Relationen erhalten:

$$(12)\qquad x = \Psi\,(k, a, b) = \Psi,\ x = \Phi\,(h, a, c) = \Phi$$

die beiden Functionen Ψ und Φ müssen aber in diesem Falle entweder algebraische oder transcedente sein, dürfen jedoch nicht durch eine Substitutionsgleichung ausgedrückt sein.

Es bleibt also schliesslich noch die Aufgabe gestellt, die Unbekannten k und h zu bestimmen, was mit Hilfe der Gleichungen (11) offenbar möglich ist.

Es ergeben sich nämlich folgende zwei Relationen:

$$(13)\quad f\,(k, x) = f\,[\Psi\,(k, a, b), k] = A\,[(a - \beta\,(\Phi, B\,[(a - \alpha\,(\Psi, f\,(k, \Psi))), \Psi])), \Psi]$$

$$(14)\quad \mathfrak{f}\,(h, x) = \mathfrak{f}\,[\Phi\,(h, a, c), h] = B\,[(a - \alpha\,(\Phi, A\,[(a - \beta\,(\Phi, \mathfrak{f}\,(h, \Phi))), \Phi])), \Psi]$$

und hieraus, wenn F reciprok von f und $\mathfrak{F}$ reciprok von $\mathfrak{f}$ angenommen wird, die beiden Ersatzgleichungen (15):

$$k = \mathop{\mathrm{E}}^{m=k} \mathrm{F} \Big(\Psi\,(m, a, b), A\Big[(a - \beta\,(m, a, b), B\,[(a - \alpha(\Psi(m, a, b), f(m, \Psi\,(m, a, b))) \\ \Psi\,(m, a, b)])]\ \Psi\,(m, a, b)\Big]\Big)$$

$$h = \mathop{\mathrm{E}}^{m=h} \mathfrak{F} \Big(\Phi\,(m, a, c), B\Big[[a - \alpha(\Phi(m, a, c), A\,[(a - \beta\,(\Phi(m, a, c), \mathfrak{f}\,(m, \Phi\,(m, a, c)), \\ \Phi\,(m, a, c)])\ \Phi\,(m, a, c)\Big]\Big)$$

Ferner erhalten wir vermittels der Gleichungen

$$y = f\,(x, k) \quad \text{und} \quad z = \mathfrak{f}\,(z, h)$$

mit Bezug auf die beiden Gleichungen (12) die beiden Relationen:

$$y = f[\Psi(k, a, b), k] = \mathfrak{f}[\Phi(h, a, c), k]$$
$$z = \mathfrak{f}[\Phi(h, a, c), h] = f[\Psi(k, a, b), h]$$

wodurch die Gleichung gelöst erscheint, und nur noch die Eventualität in Betracht zu ziehen ist, ob sich aus den Relationen (11) x durch k und h ausdrücken lässt. Ist dies der Fall, so ist auch die Gleichung (q) in allen ihren Phasen löslich.

Die Functionen $f(k, x)$ und $\mathfrak{f}(h, x)$ können beliebige sowohl algebraische als auch transcendente Ausdrücke darstellen, müssen jedoch so beschaffen sein, dass hiedurch die Relationen (11) möglichst den Anforderungen entsprechen, um aus denselben die beiden Gleichungen (12) auf leichte Weise zu berechnen oder vielmehr überhaupt ihre Ermittlung zu ermöglichen. Ferner müssen die Functionen α, β, δ, ε solche sein, dass sie sich auch reciprok ausdrücken lassen; d. h., sie müssen entweder rein algebraische oder reductibel transcendente Functionen sein.

Wie ersichtlich, ist also diese Methode nur auf eine gewisse Art von Gleichungen beschränkt, indem vor Allem die in der Gleichung vorkommenden Functionen nie irreductibel sein dürfen, wenn die Lösung auf obige Art möglich sein soll, und insbesondere ihre Beziehungen zu einander solche sein müssen, dass sie die Möglichkeit bieten, die Gleichungen (12) durch irgend eine Behandlungsweise zu ermitteln.

Es sei z. B. die Gleichung von der Form

$$(16) \quad \begin{cases} a = \dfrac{z^2 - 2x}{x - z} - l(x + z) \\ b = x^2 + l\,\dfrac{x^2 - z^2}{z} \end{cases}$$

der Lösung zu unterziehen.

In diesem Falle ist es vortheilhaft, $z = k\,x$ zu setzen, wodurch die Gleichungen (16) in jene von (17) übergehen.

$$(17) \quad \begin{cases} a = \dfrac{k^2 x - 2}{1 - k} - l\,(x\,.\,[1 + k]) \\ b = x^2 + l\,\left(x\,.\left[\dfrac{1 - k^2}{k}\right)\right] \end{cases}$$

Addiren wir nun diese beiden Gleichungen, so erhalten wir

$$a + b = \frac{k^2 x - 2}{1 - k} + x^2 + l\,\frac{1 - k}{k}$$ und hieraus die quadratische Gleichung

$$x^2 + x\,\frac{k^2}{1 - k} + l\,\frac{1 - k}{k} - \frac{2}{1 - k} - (a + b) = 0,$$ welche uns das Resultat

$$(18)\ x = \frac{k^2}{2\,(k - 1)} \pm \sqrt{\left[\frac{k^2}{2\,(k - 1)}\right]^2 + \frac{2}{1 - k} + a + b - l\,\frac{1 - k}{k}}$$ liefert.

Setzen wir nun dieses in eine der Gleichungen (17) ein, so ergibt sich offenbar eine Substitutionsgleichung von der Form

$$(19) \qquad k = \mathop{\mathrm{E}}_{m = q}^{m = k} \Omega\,(a, b, m)$$ als Resultat, wodurch k bestimmt ist.

Theorie und Lösung der irreductiblen transcendenten Gleichungen.

VIII.

Transcendente Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

In den bisherigen Ausführungen gelangten wir für den Fall, als die eine der beiden Unbekannten x und z sich durch eine Hilfsvariable ausdrücken lässt, zu der Ersatzgleichung 19), mittelst welcher die Ansprüche hinsichtlich einer vollständigen Lösung der Gleichung 16) befriedigt werden. Liesse sich jedoch in der Gleichung 9) x durch k beziehungsweise durch h nicht ausdrücken, so kann ein anderes Verfahren, welches zwar ebenso genaue Werthe liefert, jedoch in der Berechnung complicirter ist, angewendet werden. Wir stellen nämlich jene Eventualität in Betracht, dass vermittelst zweier Gleichungen von der Form

$$(\mathrm{I}) \ldots x = \mathfrak{F}\,(k,\, x) \text{ und } k = \mathfrak{F}\,(k,\, x) \ldots (\mathrm{II})$$

die Auffindung der Werthe von k und x auf eine besondere Art, ohne Rücksicht auf die Beschaffenheit der beiden Functionen möglich ist. Diese Art besteht nämlich darin, dass aus der einen der beiden Gleichungen (I) und (II) eine Substitutionsgleichung gebildet wird, wobei die andere als Assistenzgleichung fungirt, d. h. aus der ersteren der beiden Gleichungen ergibt sich die Ersatzgleichung

$$(20) \qquad x = \mathop{\mathbf{E}}_{m = q}^{m = k} \mathfrak{F}\,(k,\, m)$$

wogegen die zweite ihre Form beibehaltend, nach jedesmaliger ausführlicher Procedur der ersteren, d. h. nach hinreichender Erhebung des x, mittelst des sich hieraus ergebenden Werthes desselben zur Rectification des k dient. Nachdem dies vollzogen ist, wird der rectificirte Werth abermals in die Gleichung (20) eingesetzt und ein neuer Werth des x gefunden, welcher sofort in die Gleichung (II) eingesetzt, die abermalige Rectification des Werthes der Unbekannten k besorgt.

Auf diese Weise erhalten wir schliesslich durch Wiederholung dieses Vorgehens sowohl den Werth des x wie auch den des k beliebig genau, je nachdem, wie oft wir diese Procedur durchführen.

Offenbar lässt sich auf dieselbe Art auch der Werth h, wie auch aller anderen in der gegebenen Gleichung vorkommenden Hilfsvariablen eruiren, wenn nicht schon vermittels der gefundenen Werthe von k und x die Werthe der übrigen bestimmt werden können.

Aber auch in diesem Falle muss man auf die Continuität der Substitutionsgleichung Rücksicht nehmen, und überhaupt auch darauf achten, dass vor den zur Verfügung stehenden, die einfachste zur Geltung kommt. Aus

ntrole".

Relationen (11) ergeben sich, wie schon bereits bemerkt, je zwei Gleichungen zwischen k und x, wie auch zwischen h und x; es sind dies folgende vier Relationen:

$$(21)\quad \begin{cases} k = \mathbf{F}\left[x,\ A\ [[a - \beta\ (x,\ B\ [[a - \alpha\ (x,\ f\ (k,\ x))),\ x\ ])],\ x]\right] \\ x = \mathbf{F}\left[k, \Delta\,[(b - \gamma\,(x, B\,[[a - \alpha\,(x, f\,(k, x))], x])], B\,[[a - \alpha\,(x, f\,(k, x))], x]\right] \\ h = \mathfrak{F}\left[x,\ B\ [[a - \alpha\ (x,\ A\ [[a - \beta\ (x,\ \mathfrak{f}\ (h,\ x))],\ x])],\ x]\right] \\ x = \mathfrak{F}\left[h, E\,[[c - \lambda\,(x, A\,[[a - \beta\,(x, \mathfrak{f}\,(h, x))], x])], A\cdot[[a - \beta\,(x, \mathfrak{f}\,(h, x))], x]\right] \end{cases}$$

Offenbar correspondiren hier die erste und dritte Relation mit der Gleichung (II), wogegen die zweite und vierte mit der Gleichung (I) übereinstimmen, weshalb sie auch die beiden mit der Gleichung (20) correspondirenden Ersatzgleichungen von der Form:

$$(22)\quad \begin{cases} x = \mathop{\mathbf{E}}\limits_{m=q}^{m=K} \left\{ \mathbf{F}\left[k, \Delta[[b - \gamma(m, B[[a - \alpha(m, f(k, m))], m])], B[[a - \alpha(m, f(k, m))m]\right] \right\} \\ x = \mathop{\mathbf{E}}\limits_{m=q}^{m=K} \left\{ \mathfrak{F}\left[h, E[[c - \lambda(m, A[[a - \beta(m, \mathfrak{f}(h, m))], m])], A[[a - \beta(m, \mathfrak{f}(h, m))]m]\right] \right\} \end{cases}$$

liefern, zu denen wir selbstverständlich die Näherungswerthe von k und m, beziehungsweise h und m, mittels jener Methode, welche wir zur Aufsuchung der Näherungswerthe der Wurzeln überhaupt benutzen, eruiren müssen, bevor wir die Assistenzgleichungen; d. h. die erste und dritte Relation der Gleichungen (21) in Rechnung bringen. Es sei z. B. die Gleichung von der Form:

$$(23)\quad \begin{cases} a = l\ (x + y^2) - e^x\ \mathit{Sin}\ y \\ b = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y} + l\ \dfrac{x + z}{z} \\ c = e^{x+z} - \sqrt{x\ (x - y)} \end{cases}$$

der Lösung zu unterziehen.

Setzen wir hierin $y = k\ x$ und $z = h\ x$ so entspringt offenbar das Ergebniss:

$$(24)\quad \begin{cases} a = l\ (x + k^2\ x^2) - e^x\ \mathit{Sin}\ k\ x \\ b = x\ \dfrac{1 + k^2}{1 - k} + l\ \dfrac{1 + h}{h} \\ c = e^{x\ (1 + h)} - x\ \sqrt{1 - k} \end{cases}$$

Aus der ersten dieser drei Relationen entspringt jene mit der Gleichun (11) correspondirende Gleichung

$$(25)\quad k = \frac{1}{x}\ \mathit{arc}\ \mathit{Sin}\ \left[\frac{l\ (x + k^2\ x^2) - a}{e^x}\right]$$

in welcher der innerhalb der Klammer sich befindende Ausdruck $\gtreqless$ 1 ist.

Aus den beiden letzteren gehen nachstehende zwei Gleichungen

(26) $$x = \left(b - l\,\frac{1+h}{h}\right)\frac{1-k}{1+k^2}$$

(27) $$1 + h = \frac{l\,(c + \sqrt{1-k})}{x}$$ als Ergebniss hervor,

welche uns die Substitutionsgleichung

(28) $$x = \underset{m=q}{\overset{m=K}{\mathbf{E}}}\left\{\frac{1-k}{1+k^2}\left(b + l\left[1 - \frac{m}{l\,(c + m\sqrt{1-k})}\right]\right)\right\}$$ liefern, deren

Assistenzgleichung die Relation (25) ist.

Da nun aber mittels der Relationen (26) und (27) auch die Gleichung

(29) $$k = 1 - \left(\frac{e^{x\,(1+h)} - c}{x}\right)^2$$ berechnet werden kann,

aus welcher sodann die der Unbekannten h entsprechenden Bestimmungsgleichungen hervorgehen, so ist hiemit die Lösung vollzogen.

Es ist aber nicht einmal nothwendig die beiden Bestimmungsgleichungen aufzustellen, da offenbar, nachdem x und k gefunden, oder vielmehr bestimmt ist, h sich aus der Gleichung (27) direct ergibt.

Um nun aber die Ersatzgleichung (28) lösen zu können, benöthigen wir entsprechender Näherungswerthe für k und x, welche wir auf folgende Art bestimmen können. Aus der ersten der drei Relationen (24) geht hervor, dass der Werth des x unbedingt kleiner als (-1) sein muss, wenn a positiv sein soll, wogegen, wenn a einen endlichen negativen Werth besitzt, $x > 0$ sein muss.

Die letzte der drei Relationen liefert uns offenbar den Schluss, dass $k < 1$ sein muss, wenn die Gleichung (23) relle Wurzeln besitzen soll.

Diese beiden Anhaltspunkte führen uns auf folgende Art zum Ziele:

Es sei daher $a = -1$ $b = 3$ und $c = 20$

In diesem Falle wird $x > 0$ oder $x = d$ und $k < 1$ oder $k = 1 - d_1$ sein müssen, worin d und d_1 positive Zahlen beliebiger Grösse bedeuten können. Substituiren wir diese Werthe in die Gleichung (27), d. h.

$$1 + h = \frac{1}{x}\,l\,(c + x\sqrt{1-k})$$ so ergibt sich

$$1 + h = \frac{1}{d}\,l\,(c + d\sqrt{d_1})$$ welche Gleichung

für $d = d_1 = 1$ uns den Ausdruck

$$1 + h = l\,(c + 1)$$

liefert, welcher wieder in die Relation

(26) substituirt den Ausdruck

$$x = \left(b - l\,\frac{l\,(c+1)}{l\,(c+1) - 1}\right)\frac{1-k}{1+k^2}$$ ergibt, d. h. $x = \frac{1-k}{1+k^2} \cdot 2{\cdot}602$

Substituiren wir nun dieses in die Assistenzgleichung (25) anstatt x so ergibt sich die Ersatzgleichung

$$(30)\quad k = \mathop{\mathbf{E}}_{k_0 < 1}^{k_0 = K} \left(\frac{1 + k^2}{(1 - k) \cdot 2{\cdot}602} \, arc\,Sin \left[\frac{l\left(\frac{1 - k_0}{1 + k_0^2} \cdot 2{\cdot}602 + \left(\frac{1 - k_0}{1 + k_0^2} k \cdot 2{\cdot}602\right)^2\right) + 1}{e^{\frac{1 - k_0}{1 + k_0^2}} \cdot 2{\cdot}602} \right] \right)$$

aus welcher sich $k = 0{\cdot}61 \cdots$ ergibt.

Setzen wir nun weiter diesen Werth in die Gleichung (28) ein, so ergibt sich, wenn wir in dieselbe als ersten Näherungswerth des x

$$m = \frac{1 - 0{\cdot}61}{1 + (0{\cdot}61)^2} \cdot 2{\cdot}602, \text{ d. h. } m = 0{\cdot}73957$$

einsetzen, nach einigen Proceduren der Werth des x, d. h. $x = 0{\cdot}769143 \cdots$

Dieser Werth sodann wieder in die Assistenzgleichung (25) eingesetzt, indem wir dieselbe in Form einer Ersatzgleichung schreiben, und obigen Werth von k als ersten Näherungswerth des n benützen, d. h.

$$(31)\qquad k = \mathop{\mathbf{E}}_{n = 0{\cdot}61}^{n = K} \left(\frac{1}{x} \, arc\,Sin \left[\left(l\,(x + n^2 x^2) + 1 \right) \cdot e^{-x} \right] \right)$$

liefert uns den rectificirten Werth $k = 0{\cdot}599 \cdots$.

Wird nun diese Procedur bis zu einer gewissen hinreichenden Genauigkeit fortgesetzt, so erhalten wir schliesslich die Werthe von k und x, welche sowohl der Gleichung (28) als auch der Gleichung (31) resp. (25) entsprechen. Mit Hilfe dieser beiden Werthe und der Gleichung

$$h = \frac{1}{x}\, l\,(c + x\sqrt{1 - k}) - 1$$ können wir sodann auch h bestimmen, so dass die Lösung hiemit vollzogen ist.

Nachträglich wollen wir noch auf die Consequenzen der Beschaffenheit der Functionen $y = f\,(k, x)$, $z = \mathfrak{f}\,(h, x) \ldots$ aufmerksam machen; und zwar: Um eine Flexibilität dieser Functionen, d. h. eine zu grosse Variabilität der Werthe derselben, in Bezug auf k und x, resp. h und x etc. zu vermeiden, ist es rathsam, dieselben mit Berücksichtigung ihres Zweckes so zu wählen, dass eine geringe Veränderung ihrer Variabeln $x, k, h, \ldots$ keinen zu nachhaltigen Einfluss auf die Werthe der Functionen ausübe, da hiedurch ihre Genauigkeit leiden würde.

Die Art der Lösung, wie wir selbe bei den transcendenten Gleichungen mit mehreren Unbekannten in Anwendung brachten, lässt es in den beiden letzten Fällen nicht zu, die einzelnen Unbekannten allgemein und direct auszudrücken. Wir müssen uns daher ausnahmsweise bloss mit der numerischen Lösung derselben zufriedenstellen, wenn bei einer ähnlichen Gleichung überhaupt eine Lösung möglich ist.

Es gibt nämlich Gleichungen, welche trotz aller erdenklichen Massregeln, an einer Flexibilität leiden, welche in Bezug auf die unstetige Ab- oder

Zunahme der sich ergebenden Werthe, keine regelrechte Lösung zulässt, in Folge dessen wir uns oft nach langwierigen Untersuchungen mit ziemlich ungenauen Resultaten begnügen müssen.

Was nun die Wurzeln dieser Gleichungen betrifft, so werden dieselben sowohl von der Anzahl als auch von der Beschaffenheit der in der Gleichung vorkommenden Functionen abhängen: die Art und Weise, in welcher dieselben ihrer Anzahl gemäss ermittelt und durch Grenzwerthe näher bestimmt werden, bleibt dieselbe, wie wir sie in den früheren Capiteln zur Anwendung empfohlen haben. In Anbetracht dessen, dass wir es hier mit mehreren Bedingungsgleichungen, von denen eine jede mehrere Functionen von je einigen Unbekannten enthalten kann, zu thun haben, werden wir jedoch bei der Untersuchung der Einen, auf die Uebrigen insoweit Rücksicht nehmen müssen, als die durch die eine oder andere der Unbekannten bedingten Grenzen, auch bei der zu untersuchenden zur Geltung gelangen.

Auf diese Weise werden schon die Maximal- und Minimalwerthe der einzelnen abgesonderten Glieder auf Grund der schon bestimmten aproximativen Grenzen aus irgend einer der gegebenen Bedingungsgleichungen, einer gewissen Limitation unterliegen, so dass oft schon der Vergleich zweier Functionen untereinander hinreichen wird, um auf die Grenzen der in denselben enthaltenen Unbekannten schliessen zu können.

Hinsichtlich der Beschränkung, welcher offenbar die Anzahl der Wurzeln in manchen Fällen dem Gesagten zufolge unterworfen ist, sei daher noch bemerkt, dass es Gleichungen gibt, welche überwiegend imaginäre Wurzeln besitzen.

Der Ursprung dieser Thatsache lässt sich hauptsächlich dadurch erklären, dass die aus manchen Functionen hervorgehenden Bedingungen in Betreff der Grenzen einzelner Unbekannten zu einander oft im Widerspruche stehen, so dass nicht alle Bedingungen erfüllt werden können.

Als nothwendige Folgerung dessen muss es daher auch Gleichungen geben, welche schon bei einer minderen Anzahl von Bedingungsgleichungen hinreichend bestimmt sind, d. h. es ersetzen die Bedingungen, welche aus einzelnen Functionen der betreffenden Gleichung hervorgehen, eine derselben zukommende Bedingungsgleichung.

Es ist daher die Möglichkeit vorhanden, dass eine Gleichung von n Unbekannten schon mit $(n-1)$ Bedingungsgleichungen bestimmt sein kann, was im Grunde genommen als ein besonderer Fall der Gleichungen im Allgemeinen zu betrachten ist.

Transcendente Gleichungen höherer Ordnung.

Wir haben schon im ersten Capitel dieser Abhandlung auf Functionen hingewiesen, welche als Ursprung von discontinuirlichen Substitutionsgleichun anzusehen sind, indem dieselben bei der geringsten Veränderung belen einen unverhältnissmässigen Zuwachs ihres absoluter

welche Eigenschaft wir als Flexibilität der betreffenden Functionen hinstellen.

Es geschah daher, dass wir bei der Aufstellung von Substitutionsgleichungen solche Ausdrücke vermieden haben, welche ähnliche Functionen enthalten hätten; oder trachteten in jenem Falle, wo selbe unausweichlich waren, auf verschiedene Arten ihren Einfluss zu schwächen.

Es gibt aber Gleichungen, bei denen zur Aufstellung ihrer Ersatzgleichungen solche Ausdrücke unvermeidlich sind, indem alle Vorkehrungen, dieselben zu entfernen, sich als unnütz erweisen, wobei ausserdem ihre Variabilität in einem solchen Maasse zu Tage tritt, dass es gerathen ist, andere Mittel zur Lösung derselben zu ergreifen.

Hinsichtlich dessen wollen wir die allgemeine Formel zur Lösung von transcendenten Gleichungen nochmals näher untersuchen.

Bekanntlich lautet dieselbe folgendermaassen:

$$(1) \ldots\ldots\ldots x = \mathop{\mathbf{E}}_{m=q}^{m=k}\left[\mathbf{F}(y,\, m)\right] = \mathbf{F}(y,\, \mathbf{F}[y,\, \mathbf{F}(y,\, \ldots,\, \mathbf{F}[y,\, m])]) \ldots]).$$

Wie ersichtlich, erscheint m als Näherungswerth der Unbekannten x unter dem Functionszeichen $\mathbf{F}$; d. h. $m_1 = \mathbf{F}(y.\, m)$ wobei m_1 einen rectificirten Werth des m bedeutet. Dem Gesagten gemäss wird daher der absolute Werth jener Function, also m_1; in Folge des darin vorkommenden ungenauen Werthes von x eine unverhältnissmässige Aenderung erleiden, und somit aufhören einem rectificirten Näherungswerthe von x zu entsprechen, wodurch selbstverständlich alle anderen derselben vorangehenden Functionen, da diesen dieselbe Unzukömmlichkeit anhaftet, eine immer grössere Abweichung vom wahren Werthe erleiden werden. Da nun aber, wie bekannt, eine jede dieser Functionen einem mehr oder weniger genauen Näherungswerthe von x entsprechen soll, und auch einen solchen in der ihr vorangehenden Function vertritt, so wird schliesslich der Resultatswerth der Gleichung (1) eine potencirte Abweichung vom wahren Werthe des x besitzen. Wir würden daher vermittels einer gewöhnlichen Ersatzgleichung gerade das Gegentheil dessen erreichen, was wir anstreben.

Um aber dennoch die Lösung solcher Gleichungen durchführen zu können, werden wir ein Mittel in Anwendung bringen, welches sich als Consequenz der oben benannten Unzukömmlichkeit ergibt. Wir werden nämlich, bevor wir zur genaueren Berechnung des eigentlichen Werthes mittels Ersatzgleichung übergehen, den in dieselbe einzusetzenden Näherungswerth, näher bestimmen, als es bei den früheren Gleichungen der Fall war. Ausserdem werden wir einen jeden aus der Ersatzgleichung sich ergebenden ferneren Näherungswerth einer Rectification unterziehen, welches Verfahren wir nach jedesmaliger Procedur wiederholen werden; d. h. wir werden jenen, nach einer jeden Prozedur der Ersatzgleichung sich ergebenden Werth vorerst rectificiren und sodann erst wieder in die Ersatzgleichung einsetzen, wodurch jene Discession unschädlich gemacht wird.

Es ist nun die Frage, welcher Beschaffenheit jene Functionen sind, welche eine ähnliche Unzukömmlichkeit der Ersatzgleichungen nach sich ziehen. Die Antwort hierauf ergibt sich von selbst, wenn wir auf jene in verschiedenen Formen auftretenden ireductibelen transcendenten Functionen hinweisen, welche sich zwar einzeln in ihrem Einflusse, rücksichtlich der Lösung, beeinträchtigen lassen, jedoch keinesfalls bei öfterem Auftreten in ein und derselben Gleichung.

Das Hauptcontingent zu dieser Art von Functionen liefern die Exponential-Grössen, welche so beschaffen sind, dass sowohl Basis, als auch Exponent verschiedenartige, bald algebraische, bald reductibel oder irreductibel transcendente Functionen repräsentiren.

Hinsichtlich dessen können wir als allgemeine Formel für diese Art von Functionen, den Ausdruck

(2) . . . . $\mathfrak{F} = [\varphi\ (x)]^{\psi (x)}$ hinstellen, wobei ferner auch ψ eine ähnliche Function darstellen kann, wie $\mathfrak{F}$ selbst; in welchem letzteren Falle jedoch die Vorkehrungen zur Rectification der Näherungswerthe an Complicität zunehmen werden, wesshalb wir den ersteren Fall, in welchem $\varphi\ (x)$ und $\psi\ (x)$ ganz gewöhnliche Functionen darstellen, von dem letzteren dadurch unterscheiden wollen, dass wir Ausdrücke von der Form

(3) . . . . $y = \Psi\ [\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots]$ Gleichungen zweiter Ordnung und jene von der Form

(4) . . . . $y = \Psi\ [(\mathfrak{F}_0)^{\mathfrak{F}_\alpha}, (\mathfrak{F}_1)^{\mathfrak{F}_\beta}, (\mathfrak{F}_2)^{\mathfrak{F}_\gamma}, \ldots]$. Gleichungen dritter Ordnung u. s. f. benennen wollen.

Auf diese Art uns eine Uebersicht verschaffend, können wir direct zur eigentlichen Bestimmung und Rectification der Näherungswerthe übergehen, indem wir folgende Erörterung vorausschicken.

Wie wir schon bei den contractibelen transcendenten Gleichungen bemerkt haben, bietet uns die merkwürdige Aehnlichkeit, der sich ergebenden Werthe der beiden Quocienten $\frac{l\ A}{l\ B}$ und $\frac{d\ A}{d\ B}$ einen Vortheil, mit dessen Hilfe es uns möglich wird, Näherungswerthe zu erreichen, welche an Vollkommenheit, hinsichtlich unseres Zweckes nichts zu wünschen übrig lassen.

Diesem Umstande zufolge können wir die Relation

(5) . . . . $\frac{l\ A}{l\ B} \cdot \frac{d\ A}{d\ B}$ aufstellen, welche aber offenbar nur unter gewissen Bedingungen zur Geltung gelangen wird. Die Grössen A und B können hierin Functionen von unterschiedlichen Unbekannten repräsentiren; jedoch ist hiebei hauptsächlich zu berücksichtigen, ob die betreffenden Functionen steigende oder fallende sind, d. h. ob das Differential derselben einen negativen oder positiven Werth ergibt; und wie sich

diese Functionen zu ihren Logarithmen verhalten oder besser gesagt, w
Art die Zeichen der sich ergebenden Logarithmen gegenüber den Zeich
sich ergebenden Differentialquotienten ein und derselben Function sin
allen Fällen müssen aber die Zeichen der beiden genannten Quotient
Rücksicht auf die Beschaffenheit der beiden Functionen A und B gege
ausgeglichen werden.

Mit Rücksicht auf diese Erörterung wird nun jedes einzelne Glied
solchen Gleichung folgender Behandlung unterzogen:

Wie bereits bemerkt, besitzt der allgemeine Ausdruck für ein s
Glied die Form

$\mathfrak{F} = [\varphi(x)]^{\psi(x)}$. Durch Logarithmirung desselben erhalte

$l\,\mathfrak{F} = \psi(x) \,.\, l\,\varphi(x)$ und hieraus offenbar $\psi(x) = \frac{l\,\mathfrak{F}}{l\,\varphi(x)}$

Wenn wir nun hierin jene vorher besprochene Massregel zur Anwe
bringen, so erhalten wir

(6) . . . . $\psi(x) = \frac{d\,\mathfrak{F}}{d\,\varphi(x)}$, woraus sich der Ausdruck

(7) . . . . $\mathfrak{F} = \int \psi(x)\, d\, \varphi(x) = J$ als Resultat erg

Es sei nun die allgemeine Gleichung zweiter Ordnung

(8) . . . . $y = \Psi(a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots)$, worin a_0, a_1, a_2
Glieder obgenannter Art bezeichnen; d. h. die Ausdrücke

(α) . . . $a_0 = [\chi(x)]^{\alpha(x)}$, $a_1 = [\Theta(x)]^{\beta(x)}$, $a_2 = [\Omega(x)]^{\gamma(x)}$, u. s. f. darstelle

Durch oben angedeutete Behandlung werden daher die Näherungs
von $a_0, a_1, a_2 \ldots$ durch Integrale von der Form J ausgedrückt sei
denen jedes für sich integrirt, die Resultate

(β) . . . . . $J_0 = A_0(x)$, $J_1 = A_1(x)$, $J_2 = A_2(x)$ u. s. f. liefern werd

Da nun aber durch dieses Verfahren auch y in der Gleichung (8)
den Umständen nach geänderten Werth annimmt, so werden wir dass
jenem Falle, wo wir a_0, a_1, a_2 u. s. f. durch deren Näherungswerthe
$A_1(x)$, $A_2(x)$ u. s. f. ersetzen, mit $y^0{}_n$ bezeichnen, wobei n je nach der
der erfolgten Proceduren die Werthe 1, 2, 3 . . . n annehmen wird.

Es ergibt sich demzufolge die Relation

(9) . . . . $y^0{}_n = \Psi(A_0(x), A_1(x), A_2(x), A_3(x) \cdots)$, welc
zur Berechnung der Näherungswerthe von x dienen wird, da sich au
selben eine Substitutionsgleichung von lösbarer Form aufstellen lässt,
folgendermassen lautet:

(10) . . . . $x_m = \mathop{\mathbf{E}}_{m=q}^{m=K} \mathfrak{A}_0 \left[\Psi' \left((y^0{}_n), A_1(m), A_2(m), A_3(m) \cdots \right) \right]$

und zumeist auch hinsichtlich ihrer Continuität zu befriedigen vermag.

Theorie und Lösung der irreductiblen transcendenten Gleichungen.

IX.

Transcendente Gleichungen höherer Ordnung.

Unter Berücksichtigung der bisherigen Auseinandersetzungen nimmt der Process betreffend die Lösung der transcendenten Gleichungen höherer Ordnung folgenden weiteren Verlauf:

Der Werth von $\overset{n=1}{y^0_n}$ wird für die erste Procedur dem Werthe von y gleichgesetzt, wodurch sich offenbar der erste Näherungswerth $x_m \doteq m$, ergibt, wenn $\mathfrak{A}_0$ als reciproke Function von A_0 und Ψ' als jene von Ψ betrachtet wird. Setzen wir nun diesen erhaltenen Näherungswerth m anstatt x in die, den Grössen $a_0, a_1, a_2 \cdots$ entspechenden Functionen, so ergeben sich die Relationen

$$a'_0 = [\chi(m)]^{\alpha(m)},\ a'_1 = [\Theta(m)]^{\beta(m)},\ a'_2 = [\Omega(m)]^{\gamma(m)},\ \text{u. s. f.}$$

welche der Gleichung (8) entsprechend die Relation

$$(11) \quad \ldots\ldots y_m = \Psi\,(a_0', a_1', a_2' \ldots) = \Psi\,([\chi(m)]^{\alpha(m_1)}, [\Theta(m)]^{\beta(m_1)}, [\Omega(m_1)]^{\gamma(m_1)} \ldots)$$

ergeben, welche abermals einem anderen y entsprechen muss, dessen Werth wir mit y_m festellen wollen. Offenbar wird sich dieser Werth, je nach der Genauigkeit des Näherungswerthes m, an welcher derselbe mit der Anzahl der Proceduren zunehmen wird, immer mehr dem wahren Werthe des y nähern, bis er denselben bei der n^{ten} Procedur erreichen wird.

Jener Fehler, welchen wir durch die in (5) aufgestellte Relation begangen haben, lässt sich nun mittelst des gefundenen Werthes von y_m berechnen, indem man y_m von dem ursprünglich gegebenen Werthe des y subtrahirt, wodurch sich die Relation

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y - y_m = \delta_n$$

ergibt, aus welcher offenbar hervorgeht, dass in dem Momente, wo $y = y_m$ wird, auch der Fehler $\delta_n = 0$ werden muss.

Wir werden daher trachten, die Differenz von y und y_m geringer zu machen; und das kann nur dadurch erreicht werden, dass wir jedesmal den sich durch die Relation (12) ergebenden Fehler δ zu dem Werthe von $y^0{}_n$ zuaddiren, wodurch die Rectification des Näherungswerthes der Unbekannten x vollzogen wird. Der sich hiedurch aus der Ersatzgleichung (10) ergebende Werth m liefert uns sodann mittelst der Gleichung (11) einen genaueren oder bessergesagt, einen dem y näherstehenden Werth von y_m, wodurch der Fehler δ immer schneller gegen Null convergirt, und zwar desto mehr, je öfter diese Procedur durchgeführt wird. Jenen Werth, welcher aus der Addition des be-

… Fehlers δ und der Grösse y^0_n hervorgeht, wollen wir mit y^0_{n+1} be… und erhalten sonach abermals eine Relation von der Form

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad y^0_{n+1} = y^0_n + \delta_n$$

…e in der nächsten Procedur die Grösse y^0_{n+1} die Stelle von y^0_n in der …n (9) vertritt.

Die Werthe der nacheinander folgenden, immer kleiner werdenden Fehler, …en daher folgende sein

$$\begin{aligned} y^0_1 &= y \ldots\ldots \\ y^0_2 &= y^0_1 + \delta_1 \\ y^0_3 &= y^0_2 + \delta_2 \\ y^0_4 &= y^0_3 + \delta_3 \\ &\vdots \\ y^0_{n+1} &= y^0_n + \delta_n \end{aligned}$$

…ieraus ergibt sich aber auch die Gleichung von nachstehender Art:

$$(14) \quad \ldots \; y^0_{n+1} = y + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \ldots + \delta_{n-1} + \delta_n$$

welche uns eine convergente Reihe darstellt, deren letztes Glied nahezu 0 ist.

Wie ersichtlich ergibt sich aber durch Zusammenstellung der beiden Relationen (12) und (13) die Folgerung

$$(15) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; y^0_{n+1} = y^0_n + y - y_m$$

welche uns die Rectificationsformel des Näherungswerthes m darstellt, wobei y_m immer den letzten aus der Gleichung (11) sich ergebenden Werth bedeutet.

Diese Formel ist es nun, welche uns in dieser Hinsicht so erkleckliche Dienste leistet, indem selbe, jene durch die Unvollkommenheit des Näherungswerthes entstandene Abweichung rectificirt, und hiedurch die Lösung der Gleichungen genannter Art nicht nur ermöglicht, sondern auch beschleunigt.

Zur besseren Uebersicht bei der Berechnung resp Durchführung der Proceduren, wollen wir nun trachten den ganzen Process durch eine einzige Formel auszudrücken. Als Grundlage des Ganzen gilt nun offenbar die Ersatzgleichung (10), zu deren Aufstellung die nöthigen angeführten Vorbereitungen getroffen werden müssen. Diese ist eine ganz regelrechte Substitutionsgleichung, bei welcher jedoch die Grösse y^0_n einer jeweiligen Correctur bedarf, zu welche… uns die Relation (15) hilfreiche Hand bietet. Um aber die Letztere aufstell… zu können, bedürfen wir des Werthes y_m, welcher sich mittelst des, dur… die Substitutionsgleichung (10) erreichten, von y^0_n abhängigen Resultatswert… ergibt, wenn wir denselben in die Gleichung (11) einsetzen.

Auf diese Art entsteht eine Circulation, welche uns je nach der A… ihrer Wiederholungen, zu einem mehr oder minder genauen Resultate gela… lässt. Wir wollen daher jene Formel folgendermassen aufstellen:

$$(16) \quad x = \left[\begin{array}{l} y^0_{n+1} = y^0_n + y - y_m \\ \hline y_m = \Psi'\left([\chi(m)]^{\alpha(m)}, [\Theta(m)]^{\beta(m)}, [\Omega(m)]^{\gamma(m)}, [\varphi(m)]^{\delta(m)} \ldots\right) \\ \hline \begin{array}{l} n=1 \\ y^0_n = y \end{array} \Big| \; \mathfrak{A}_0 \left[\Psi'(y^0_n), A_1(m), A_2(m), A_3(m) \ldots\ldots\right] \end{array} \right]$$

mittelst welcher die allgemeine Gleichung zweiter Ordnung (8) als gelöst erscheint.

Was nun die Gleichungen dritter Ordnung anbelangt, so werden dieselben auf identische Weise gelöst werden können; nur wird die in (5) angeführte Relation zweimal in Anwendung gebracht werden müssen; d. h.

(17) . . . . $\mathfrak{F}^{\mathfrak{F}'} = [\varphi(x)]^{(\psi(x))^{\alpha(x)}} = (\mathfrak{F})_2$ gilt als allgemeiner Ausdruck für die Glieder einer Gleichung dritter Ordnung. Durch Logarithmirung desselben erhalten wir

$$l(\mathfrak{F})_2 = \mathfrak{F}' \, l\,\mathfrak{F} = (\psi(x))^{\alpha(x)} \, l\,\varphi(x)$$ woraus sich offenbar die Relation $$\frac{l(\mathfrak{F})_2}{l\,\varphi(x)} = (\psi(x))^{\alpha(x)}$$ als Resultat ergibt; logarithmiren wir nun nochmals dieselbe, so ergibt sich

(18) . . . . $l\dfrac{l(\mathfrak{F})_2}{l\,\varphi\, x} = \alpha(x)\, l\psi(x)$ und hieraus $\dfrac{l\dfrac{l(\mathfrak{F})_2}{l\,\varphi(x)}}{l\,\psi(x)} = \alpha(x).$

Führen wir nun in diesem Ergebniss überall anstatt des Logarithmenzeichen, das Differentialzeichen ein, so ergibt sich offenbar folgender Ausdruck:

(19) . . . . $\dfrac{d\dfrac{d(\mathfrak{F})_2}{d\,\varphi(x)}}{d\,\psi(x)} \doteq \alpha(x),$

aus welchem wir durch Integration den Näherungswerth von $(\mathfrak{F})_2$ finden; wir erhalten nämlich das Integral

(20) . . . . . . $(\mathfrak{F})_2 = \int \left(\alpha(x) . \psi'(x) \int \varphi'(x) . dx\right) . dx = JJ,$

welches nach vollzogener Integration einer gewissen Function $B(x)$ entsprechen wird. Es werden demnach die Functionen $B_0(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ . . . u. s. f. den Näherungswerthen von b_0, b_1, b_2 . . . u. s. f. entsprechen, wenn die letzteren der Form von $(\mathfrak{F})_2$ Genüge leisten und

(21) . . . . $y = \Psi(b_0, b_1, b_2, b_3 \ldots)$ die allgemeine Form einer Gleichung dritter Ordnung darstellt.

Es sei noch ferner bemerkt, dass eine Gleichung erst dann höherer Ordnung genannt werden kann, wenn in derselben wenigstens zwei Glieder zweiter Ordnung oder ein Glied dritter, vierter etc. Ordnung enthalten ist. Uebrigens werden Gleichungen, welche Glieder verschiedener Ordnung in sich fassen, nach eben derselben Methode gelöst werden können; nur wird die Näherungsrelation eines jeden einzelnen Gliedes, nach der Höhe seiner Ordnung behandelt werden müssen.

Wir wollen nun ein Beispiel ähnlicher Art durchführen.

Es sei die Gleichung von der Form

(22) . . . . $x^{\sqrt[x]{x^2-1}} - x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$ zu lösen.

Zu diesem Behufe setzen wir $x^{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}} = a_0$ und $x^{\frac{1}{x}} = a_1$, woraus durch Anwendung der Relation (5)

$$l a_0 = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, l\, x \qquad\qquad l\, a_1 = \frac{1}{x}\, l\, x$$

$$d\, a'_0 = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, d\, x \qquad\qquad d\, a'_1 = \frac{d\, x}{x}$$

daher $\quad a'_0 = \sqrt{x^2-1} \qquad\qquad a'_1 = l\, x$

und somit auch $y^0_n = a'_0 - a'_1 = \sqrt{x^2-1} - l\, x$, woraus sich offenba

(23) . . . . $x_m = \mathbf{E}\sqrt{(y^0_n + lm)^2+1}$ als Resultat ergibt.

Und die Substitutionsgleichung der Gleichung (22) lautet also folge massen:

$$y^0_{n+1} = y^0_n + y - y_m$$

(24) . . . . $x = \left[\frac{y_m = m^{\frac{m}{\sqrt{m^2-1}}} - m^{\frac{1}{m}}}{\underset{y^0_n = y}{\overset{n=1}{\mathbf{E}}}\sqrt{(y^0_n + lm)^2+1}}\right]$

Für die erste Procedur wird sonach gelten

$$\overset{n=1}{y^0_n} = y^0_1 = y = \frac{1}{2} = \sqrt{x^2-1} - l\, x$$

demgemäss ergibt sich aus der Substitutionsgleichung (23) der Werth

$$x_m = m_1 = 1{\cdot}22$$

daraus $\quad y_m = 0{\cdot}238 \quad$ daher nach der F
$y^0_{n+1} = y^0_n + y - y_m$ sich der Werth von $y^0_2 = 0{\cdot}762$ ergibt.

Mittelst dieses Werthes ergibt sich abermals aus der Ersatzglei (22) für $\overset{n=2}{y^0_n} = y^0_2$ der Werth $x_m = m_2 = 1{\cdot}56$ un demzufolge auch der Werth von $y_m = 0{\cdot}4539$ woraus sich auf di Weise, wie früher $y^0_3 = 0{\cdot}8063$ ergibt. Setzen wir Untersuchung auf dieselbe Weise fort, so ergibt sich:

$x_m = m_3 = 1{\cdot}644$	$x_m = m_4 = 1{\cdot}62$	$x_m = m_5 = 1{\cdot}6395$
$y_m = 0{\cdot}5168$	$y_m = 0{\cdot}4883$	$y_m = 0{\cdot}5142$
$y^0_4 = 0{\cdot}7895$	$y^0_5 = 0{\cdot}8012$	$y^0_6 = 0{\cdot}7870$ u

bis wir schliesslich den annähernden Werth auf 5 Dezimalstellen $x = 1{\cdot}618965 \cdots$ erhalten. Offenbar gelangen wir hier sehr schnell zum da schon m_4 bloss um $0{\cdot}001035$ von dem genauen Werthe differirt.

Reflexionen über unsere Formel, betreffend die exacte Ausgleichung der Mortalitätstafeln.

IV.

In der vorigen Abhandlung über dieses Thema gelangten wir auf Grund der ermittelten allgemeinen Bedingung für die exacte Ausgleichung der Mortalitätstafeln

$$\Psi) \qquad w^2_{x+1} - (2\,w_x - b_1)\,w_{x+1} + w^2_x\, e^{-\frac{b}{w_x}} = 0$$

welche die Beziehung zweier, in Abscissen-Abständen von je 1 aufeinanderfolgenden Ordinaten der Absterbecurve kennzeichnet*), unter Zuhilfenahme der bekannten Relation

$$1) \ldots\ldots\ldots\ldots L_x \,.\, w_x - L_{x+1} \,.\, w_{x+1} = L_{x+1}$$

zu einer neuen Beziehung gleichen Charakters, wie die Form Ψ), aus welcher jedoch die beiden variablen Constanten b und b_1, deren Summe $b + b_1 = 2$ ist, aus der Rechnung eliminirt erscheinen, so dass ein reines Abhängigkeitsverhältniss zwischen zweien beliebigen aufeinanderfolgenden Ordinaten hergestellt ist. Diese Form lautet:

$$2) \ldots\ldots\ldots (u - w_x)^2 + w_x \,.\, u \,.\, l\left(1 - \frac{1}{u}\right) + u = 0$$

und ist in derselben der Werth $u = 1 + w_{x+1}$, der mit Hilfe einer continuirlichen Ersatzgleichung durch den stets bekannten Werth w_x nach jener Methode, welche für transcendente Gleichungen gilt, dargestellt werden kann. Zu derselben Gleichung gelangt man auch unabhängig von der Bedingung $b + b_1 = 2$, u. zw. mit directer Anwendung der grundlegenden Bedingungen.

$$3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \Delta\, l\, w_x + \Delta\, l\, L_x = -\dfrac{b}{w_x} \\[2mm] \dfrac{\Delta\, w_x}{w_x} + \dfrac{\Delta\, L_x}{L_x} = -\dfrac{b_1}{w_x} \end{cases}$$

Unter Anwendung des Substitutionswerthes $u = 1 + w_{x+1}$ ergeben sich nämlich folgende Relationen, u. z. laut Form 1)

$$4) \ldots\ldots \frac{L_{x+1}}{L_x} = \frac{w_x}{1 + w_{x+1}} = \frac{w_x}{u} \text{ und } \frac{w_{x+1}}{w_x} = \frac{u-1}{w_x}$$

und hieraus unter Bezugnahme auf die Werthbegriffe

$$5) \ldots \frac{L_{x+1}}{L_x} = 1 + \frac{\Delta L_x}{L_x} \text{ resp. } \frac{w_{x+1}}{w_x} = 1 + \frac{\Delta\, w_x}{w_x} \text{ die Werthe } \frac{\Delta\, L_x}{L_x} = \frac{w_x}{u} - 1$$

$$\text{und } \frac{\Delta\, w_x}{w_x} = \frac{u-1}{w_x} - 1$$

*) Siehe „Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln". XII. (IX. Lieferung.)

Substituirt man nun diese unter Berücksichtigung der bekannten Relationen

$$6) \ldots\ldots \Delta\, l\, w_x = l\left(1+\frac{\Delta\, w_x}{w_x}\right) \text{ und } \Delta\, l\, L_x = l\left(1+\frac{\Delta\, L_x}{L_x}\right)$$

in die beiden grundlegenden Bedingungen, so liefert die Summe derselben die Gleichung

$$(7) \ldots (u-w_x)^2 + w_x u\,.\,l\left(1-\frac{1}{u}\right) + u\,(b+b_1-1) = 0$$

deren Differenz hingegen die Gleichung

$$(8) \ldots (u-w_x)^2 - w_x\,.\,u\,l\left(1-\frac{1}{u}\right) - u\,(1+b-b_1) = 0$$

Unter Berücksichtigung der Bedingung $b + b_1 = 2$ übergeht die erstere Gleichung in die Form 2), hingegen wird in der letzteren Gleichung die variable Constante $\beta = b - b_1$ vorerst durch die Werthe w_x und u ausgedrückt werden müssen, um auch der Form 8) den Stempel einer reinen Beziehung zwischen diesen beiden Grössen aufzuprägen. Um diesbezüglich zu einem geeigneten Resultate zu gelangen, werden wir folgenden Weg einschlagen: Die Differenz der beiden grundlegenden Bedingungen 3) liefert den Ausdruck

$$(9) \qquad \frac{\Delta w_x}{w_x} + \frac{\Delta L_x}{L_x} - \Delta l w_x - \Delta l L_x = \frac{b-b_1}{w_x}$$

Nun ergeben sich auf Grund des allgemeinen mathematischen Grundsatzes

$$(10) \qquad l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots\ldots$$

aus den Relationen (6) die Gleichungen

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{\Delta w_x}{w_x} - \Delta l w_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta w_x}{w_x}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta w_x}{w_x}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta w_x}{w_x}\right)^4 - \ldots\ldots \\ \frac{\Delta L_x}{L_x} - \Delta l L_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta L_x}{L_x}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta L_x}{L_x}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta L_x}{L_x}\right)^4 - \ldots\ldots \end{aligned}$$

aus deren Summe sich mit Rücksicht auf den Ausdruck (9) die Relation

$$(12) \quad b - b_1 = \beta = \frac{w_x}{2}\left[\left(\frac{\Delta w_x}{w_x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L_x}{L_x}\right)^2\right] - \frac{w_x}{3}\left[\left(\frac{\Delta w_x}{w_x}\right)^3 + \left(\frac{\Delta L_x}{L_x}\right)^3\right] + \\ + \frac{w_x}{4}\left[\left(\frac{\Delta w_x}{w_x}\right)^4 + \left(\frac{\Delta L_x}{L_x}\right)^4\right] - \ldots$$

ergibt, welche unter Anwendung der Formen (5) zu folgendem Ergebniss führt.

$$(13) \; \beta = \frac{w_x}{2}\left[\left(\frac{u-1}{w_x}-1\right)^2 + \left(\frac{w_x}{u}-1\right)^2\right] - \frac{w_x}{3}\left[\left(\frac{u-1}{w_x}-1\right)^3 + \left(\frac{w_x}{u}-1\right)^3\right] + \ldots$$

Wird nun bei der Gleichung (8) die Methode der transcendenten Formen in Anwendung gebracht, so erhält man aus derselben die continuirliche Ersatzgleichung

$$(14) \qquad u = \mathbf{E}\,\frac{u_1 w_x l\left(\frac{u_1}{u_1 - 1}\right) + (u_1 - w_x)^2}{1 + \beta}, \qquad \text{in welch}$$

$u = 1 + w_{x+1}$ ist, daher nach erfolgter Substitution die Form

$$15) \quad u = \mathbf{E}\left[\frac{u_1 w_x l\left(\frac{u_1}{u_1 - 1}\right) + (u_1 - w_x)^2}{1 + \frac{w_x}{2}\left[\left(\frac{u_1 - 1}{w_x} - 1\right)^2 + \left(\frac{w_x}{u_1} - 1\right)^2\right] - \frac{w_x}{3}\left[\left(\frac{u_1 - 1}{w_x} - 1\right)^3 + \left(\frac{w_x}{u_1} - 1\right)^3\right] + \ldots}\right]_{u_1 = 1 + w_{x+1}}$$

sich ergibt, welche nach wenigen Proceduren bereits zu einem hinreichend genauen Resultate führt, nachdem die Contiunität derselben eine allen Anforderungen entsprechende ist. Die Variable constante β kann je nach Bedarf mehr oder weniger genau ermittelt werden, indem je nach der Anzahl der in Betracht kommenden Decimalstellen zwei, drei oder mehr Glieder der Reihe in Rechnung gezogen werden. Im Allgemeinen genügen bereits die ersten drei Glieder um die gewöhnlichen Ansprüche an die Genauigkeit zu befriedigen.

Der Process, nach welchem die Ermittlung der Lebenswahrscheinlichkeiten für alle Lebensalter vom jüngsten bis zum ältesten vor sich geht, ist der gleiche, wie wir ihn der vorigen Abhandlung über dieses Thema dargestellt haben. Aus der Wahrscheinlichkeit w_x für das jüngste Alter wird diejenige für das nächst höhere Alter bestimmt und diese wieder zur Grundlage für die weitere Rechnung gemacht, so dass nach und nach die Wahrscheinlichkeiten für alle Alter sich ergeben.

Jedenfalls ist der Ersatzgleichung der Form 2) die Ersatzgleichung in Form 15) vorzuziehen, da diese nicht jene ausserordentliche Empfindlichkeit aufweist, wie jene. Diese Empfindlichkeit ist darauf zurückzuführen, dass die in der Ersatzleistung der Form 2) vorkommenden Werthe sehr klein sind und es daher behufs Erzielung einer halbwegs grösseren Genauigkeit des Resultates nothwendig ist, mehr Decimalen in Anspruch zu nehmen.

Ausserdem leidet unter diesem Umstande in hohem Masse die Continuität der entsprechenden Ersatzgleichung, infolge dessen ein hinreichend genaues Resultat schwer zu erreichen ist. Auch lässt die der Form 2) entsprechende Ersatzgleichung zwei Wurzeln zu, welche in ihren Werthen sich nur wenig unterscheiden. Hingegen hat man es in der Ersatzgleichung 15) bloss mit einer einzigen Wurzel zu thun, wobei die Werthe, welche Zähler und Nenner des Bruches repräsentiren, bis zu den höchsten Altersclassen stets grösser als 1 sind, weshalb hier jene besondere Empfindlichkeit ausgeschlossen ist, welche wir bei allen bisherigen Berechnungsformen der Lebenswahrscheinlichkeiten vorgefunden haben.

Sind die Lebenswahrscheinlichkeiten ermittelt, so lassen sich hieraus mit Hilfe der Form (4) die Zahlen der Lebenden direct darstellen, u. z. ist

$$(16) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad L_{x+1} = \frac{w_x \, L_x}{u}$$

worin w_x und L_x stets gegeben sind, so dass gleichzeitig mit der Ermittlung der Lebenswahrscheinlichkeit des jeweiligen nächsten Alters auch die entsprechende Zahl der Lebenden sich ergibt.

Soll nun aus beliebigen, erfahrnngsgemäss sich ergebenden Zahlen der Lebenden, welche jeder Regelmässigkeit in ihrem Verlaufe entbehren, eine vollständig ausgeglichene Sterbetafel hergestellt werden, so genügt es auf Grundlage dieser Zahlen die Lebensdauerwahrscheinlichkeit w_x für das jüngste in Betracht kommende Alter zu ermitteln. Unter Benützung derselben lässt sich sodann der Process der Ausgleichung direct mit Hilfe der Ersatzgleichung (15) durchführen, indem für die ersten in dieselbe einzusetzenden Näherungswerthe der Lebensdauerwahrscheinlichkeiten aller übrigen Alter approximative Zahlen gewählt werden.

Zum Zwecke der Beurtheilung der allgemeinen Beschaffenheit jener beiden variablen Constanten b und b_1, welche bei diesem Rechnungsprocesse eine derartig bedeutende Rolle spielen, möge deren Beziehung zu der Lebenswahrscheinlichkeit in ihrer einfachsten Form hier noch zur Darstellung gelangen.

Zu diesem Behufe ziehen wir zuerst die Formen (Σ) der Abhandlug II über dieses Thema in Betracht und finden

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{w_{x+1}}{w_x} = \frac{e^{-\frac{b}{w_x}}}{\left(1 - e^{-\frac{b}{w_x}}\right) w_x}$$

aus welcher sich direct der Werth für b in dem Ausdrucke

$$(4) \quad . \; . \; . \quad b = w_x \, l\left(1 + \frac{1}{w_{x+1}}\right) \text{ resp. } \left(e^{\frac{b}{w_x}} - 1\right) w_{x+1} = 1$$

ergibt. Substituirt man diesen Werth in die allgemeine Bedingung (Ψ) so ergibt sich für b_1 der Ausdruck

$$(5) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad b_1 = 2w_x - w_{x+1} - \frac{w^2_x}{w_{x+1} + 1}$$

Auf diese Weise gelangen die beiden variablen Constanten b und b_1 einzeln durch je zwei aufeinander folgende Lebenswahrscheinlichkeiten zur Darstellung.

Eine interessante Conclusion liefert übrigens die Form (4) auch in anderer Hinsicht. Wird daselbst der Substitutionswerth $u = w_{x+1} + 1$ berücksichtigt, so erhält man den Ausdruck

$$\left(e^{\frac{b}{w_x}} - 1\right)(u - 1) = 1$$

welcher die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel darstellt, deren Pol im Anfangspunkt des Axensystemes liegt, während $e^{\frac{b}{w_x}}$ und u die Coordinaten derselben bilden.

Betrachtungen über die wirthschaftlichen Functionen der Banken und deren Entwicklung.

I.

Den Mittelpunkt des Geldverkehres und des gesammten organisirten Credites repräsentirend, stellt die Institution der Banken, indem in ihr eine der Hauptschlagadern des commerciellen Verkehres mündet, die Verbindung des Waarenmarktes mit dem grossen Geldmarkte her und erfüllt auf diese Weise den Zweck, allen jenen Anforderungen, welche das wirthschaftliche Getriebe an dieselbe stellt, im ausgedehntesten Masse zu entsprechen. Die wahre Bedeutung der Banken und ihres Wesens muss im kaufmännischen Sinne gewürdigt werden, um deren unermesslichen fördernden Einfluss auf das Gebiet des Handels und der Industrie würdigen zu können; das Vorhandensein derselben in mehr oder weniger entwickelter Form kann als Massstab des wirthschaftlichen Aufschwunges eines Landes betrachtet werden.

Die Institution der Banken ist aus dem Bedürfnisse nach einem organisch ausgebildeten Handelscredite und einer geregelten kaufmännischen Zahlungsweise entstanden und kann hinsichtlich ihres Ursprunges auf die älteste Form des Handels, den Tauschhandel, zurückgeführt werden. Doch wurden die Spuren derselben erst sichtbar, als man sich über einen gemeinsamen Werthmesser geeinigt hatte und Kauf und Verkauf wesentlich erleichtert waren. Da bot sich nun bald die Aufgabe, Zahlungen zu leisten, die an entfernten Orten und in späteren Terminen fällig waren. Es begannen Creditgewährung und Wechselausgleich, Vorgänge, die uns heute so geläufig sind, die aber Jahrhunderte, ja sogar Jahrtausende bis zu ihrer heutigen Ausgestaltung brauchten. Die Entwicklung der verschiedenen Credit- und Zahlungsformen musste viele Phasen durchmachen und sich den jeweiligen im Wechsel der Zeit so mannigfachen wirthschaftlichen und socialen Verhältnissen anpassen, wodurch das Bedürfniss nach verschiedenen, den Handelsverkehr fördernden Einrichtungen geweckt wurde. So entstand in Folge der Mannigfaltigkeit der Münzen, welche im XI. und XII. Jahrhundert von den unterschiedlichen Landesfürsten geprägt wurden, und über deren eigentlichen, durch häufige Aenderung der Münzform sowie durch Münzverfälschung zweifelhaft gewordenen Werth es schwer war, sich ohne Sachverständigen Rechenschaft zu geben, die Einrichtung der sogenannten Bankhalter (Bankiers). Und merkwürdiger Weise gab derselbe Umstand später den Anstoss zur Errichtung der Girobanken. Als älteste Form der Bankinstitution überhaupt sind jedoch die Geldbanken anzusehen, welche historisch als die ursprünglicheren gelten. Abgesehen von dem Geldwechsel, mit dem sich schon im frühesten Alterthum die Bankiers in Babylon, Egypten

henland (Trapeziten) und in Rom unter der Bezeichnung argentarii oder sores beschäftigen, und der auf den früheren Entwicklungsstufen des Münzns eine sehr wichtige Rolle spielte, dienten auch bereits im alten Griechen die Banken zur vorübergehenden sicheren Aufbewahrung des Baargeldes, ie zur bequemen und kostlosen Uebermittlung desselbe an fremde Plätze. Bei mittelalterlichen Münzwirren ist der sachkundige Bankier eine gesuchte rtrauensperson für Geldbesitzer, geschätzt von Fürsten und Republiken, enn er denselben durch Darlehen aushelfen konnte. Auch in der neueren eit begann das Bankgeschäft mit der einfachen Aufbewahrung fremder elder und der Zahlungsvermittlung (in der einfachsten Form durch blosses Umschreiben gegen volle Deckung durch eine hinterlegte Summe, dann durch Anweisungen und Tratten) und erst dadurch, dass sich bei den Banken grosse Geldcapitalien ansammelten, wurden dieselben auf die Creditgeschäfte hingeführt. Die ältesten Banken des Mittelalters und der Neuzeit waren jedoch die nunmehr vom Schauplatze verschwundenen Girobanken. Ursprünglich nur zur Aufbewahrung von Baareinlagen (als depositum regulare) benützt, wurden dieselben allmälig zu Anstalten, welche Forderungen und Schulden ihrer Mitglieder auf Grund eingezahlter Beträge durch Umschreiben beglichen.

Zu den alltäglichen Mitteln der Finanzkunst gehörte nämlich bis in die Neuzeit, insbesondere aber im Mittelalter, die Verschlechterung der Münzen. Um nun bei langen Crediten zu verhüten, dass der Gläubiger, wenn die von ihm gewährte Creditfrist vorüber und seine Forderung fällig war, in verschlechterter Münze gezahlt werde, und es im gewöhnlichen Verkehre nicht anging, die Münzen auf ihren Metallgehalt durch Scheidekunst und Waage zu prüfen, so war es nothwendig, eine Zahlungsform zu schaffen, bei welcher die Veränderlichkeit des Münzwerthes vermieden werden könnte. Die Lösung dieser Aufgabe lag darin, dass man mit möglichster Vermeidung von Münze zum Tauschverkehre zurückkehrte, nur tauschte man nicht mehr Waare gegen Waare, sondern Forderung gegen Forderung. Waren beide Forderungen in der gleichen Münze ausgestellt, so hatte Niemand Schaden. Oft wurde vom Verkäufer und Käufer eine ideale Münze als Werthmesser angenommen, welche auf ein bestimmtes Gewicht Silbers gegründet zu sein pflegte. Auf diesen Umstand ist auch die spätere Entstehung der Mark Banko in Hamburg zurück zuführen, welche eigentlich keine Münze, sondern nur eine Rechnung da stellte, in welcher bis in die Neuzeit hinein die Geschäfte daselbst abgeschloss und durch buchmässige Abschreibung und Uebertragung der Forderungen ordnet wurden.

Allein das Giro, wie diese Manipulation genannt wird, hat einen älteren Ursprung und eine grosse, bisher noch wenig aufgeklärte Geschi In seiner einfachsten Gestalt findet es sich heute noch in abgelegenen Scandinaviens, wo die wenigen Geschäfte, die dort vorkommen, nur zwi einzelnen, bestimmten Kaufleuten sich abwickeln. Wenn dort der Fischer vom Bäcker und dieser vom Fischer Fische bezieht, so brauchen sie daz Münze, sondern bemerken (von „Marke“) durch gewisse Einschnitte au

zusammenpassenden Hölzern jede einzelne Lieferung. Nur jene Lieferung gilt für erwiesen, welche sich auf beiden Hölzern findet, also sowohl auf demjenigen des Verkäufers wie des Käufers. Am üblichen Termine kommen beide zusammen, vergleichen ihre Hölzer, zählen die Einschnitte und machen die Schlussrechnung, welche entweder ausbezahlt oder auf neue Rechnung übertragen werden kann. Tritt nun zwischen diese beiden Erzeuger noch ein dritter der Kaufmann, der dem Bäcker Erdöl, Zucker und anderes Kaufmannsgut, dem Fischer hingegen Eisengeräth und sonstigen Bedarf liefert, hiefür aber von den beiden ihre Erzeugnisse bezieht, so hat man es dann mit drei verschiedenen, am Termine, sagen wir zum Jahresschlusse, zusammenfallenden Abrechnungen zu thun; und da kann es vorkommen, dass der Ueberschuss den der Bäcker vom Fischer zu fordern hat, mit dem Anspruch, den etwa der Kaufmann an den Bäcker hat, abermals verrechnet wird, so dass dann das Guthaben des Kaufmannes an den Bäcker dem Fischer zu Last geschrieben wird, welcher nun im neuen Jahre eine zeitlang dem Kaufmann die Fische unentgeltlich liefern muss, bis die Forderung beglichen ist. Es wird also auch in diesem Falle bloss die Differenz herausgezahlt und auch diese ohne jegliche Münze. Das Metallgeld wirkt hier wohl zur Werthmessung und Feststellung der Preise mit, doch wirklich erschienen ist es bei den Umsätzen nirgends. Wer erkennt nun nicht in dem Kerbholze des norwegischen Fischerdorfes den Ursprung des Clearinghauses in London, wo jetzt Umsätze abgerechnet werden, die sonst zu ihrer Ausgleichung nahezu eine halbe Milliarde Mark täglich in Baarem erfordern würden.

Der Grundsatz der Abrechnung statt des Baarausgleiches ist uralt und durchzieht wie ein breites aber bisher wenig beachtetes Band die Geschichte des europäischen Handels. Und so erklärt es sich, dass die ersten Banken durchaus Girobanken waren und jene Kerbhölzer, die Jahrhundertelang überall Anwendung fanden und deren Name in Folge dessen in allen europäischen Sprachen wiederklingt, als Rechnungsmittel und Urkundenbuch eine so wichtige Rolle im Verkehre spielten, indem sie sich gerade für Abrechnung und Uebertragung so trefflich eigneten. Sie bilden das Wahrzeichen für den Ursprung des heutigen bankmässigen Verkehres.*)

Das eigentliche Wesen der Girobanken bestand darin, dass ein Kreis von Kaufleuten denselben seine Baarbestände jeweilig übergab, um durch diese vermittelnde Stelle ihre gegenseitigen Zahlungen zu bewirken. Die Zahlung wurde dann in der Weise geleistet, dass die Girobank den Auftrag erhielt, den zu zahlenden Betrag von dem Guthaben des Zahlenden abzuschreiben und dem Guthaben des Empfängers zuzuschreiben. Die Wiege der Girobanken ist

*) In England waren eigene königliche Beamte, sogenannte Chamberlains bestellt, welche die als Quittungen benützten Kerbhölzer zu liefern und einzurichten hatten. Erst im Jahre 1873 liess man das Amt der Chamberlains eingehen und führte im staatlichen Rechnungswesen an Stelle der Kerbhölzer die schriftliche Quittung ein. Die letzten Kerbhölzer aber wurden in England erst mit dem Austritte des letzten Chamberlain im Jahre 1826 endgiltig abgeschafft, Damals bestand aber schon längst das Klärungshaus, wo die Forderungen und Verpflichtungen Grossbritannien compensirt und beglichen wurden.

Italien, von wo sich dieselben nach dortigem Vorbilde über ganz Europa verbreitet haben. Im XVI. und XVII. Jahrhundert verstand man noch unter Banken schlechtweg nur Girobanken*).

Ihre Verbreitung hatte diese Einrichtung den vielen Vortheilen zu verdanken, die sie gewährte. Zunächst ersparte man die Last und Zeit des Geldzählens für jede einzelne Zahlung, womit die geringe Abnützung der Münzstücke zusammenhing. Ferner wurde auch der Transport des Geldes mit seinen Kosten, seinem Zeitverlust, seinen Beschwerden und Gefahren entbehrlich gemacht, die Sicherheit des Besitzes überhaupt erhöht. Die Vereinigung Mehrerer konnte ohne zu grosse Kosten für den Einzelnen, Anstalten zum Schutze treffen, wie solche der Einzelne zu bestreiten nicht leicht im Stande ist. Der grösste Vortheil war aber der, dass man sich über einen bestimmten reinen Münzfuss einigen konnte, der von Münzverschlechterungen nicht getroffen, gegen Verluste sicherte, wie solche die Münzindustrie insbesondere des 16. und 17. Jahrhunderts nur zu oft zur Folge hatte. Die Betheiligten bei einer Girobank wurden in ein Buch eingetragen, in welchem jeder Einzelne sein Conto erhielt, auf dem im Haben die von ihm eingehende Summe, sowie die von Dritten an ihn gemachten Zahlungen, im Soll dagegen die von ihm oder vielmehr nach seiner mündlichen oder schriftlichen Anweisung an die übrigen Bankbetheiligten gemachten Zahlungen bemerkt wurden. War auf diese Weise das Guthaben eines Einzelnen erschöpft worden, so musste derselbe eine neue Einzahlung machen und umgekehrt stand es Jedem frei, seine Einlage ganz oder theilweise sich zurückzahlen zu lassen. Die Verwaltung der Bank geschah natürlich auf Kosten der Bankbetheiligten, doch waren die angeführten Vortheile wieder so grosse, dass die Ausgaben und Verluste reichlich aufgewogen wurden, obwohl dieselben ziemlich bedeutende waren und ausserdem jeder Bankbetheiligte sein Capital unverzinst in der Bank erliegen hatte.

Dieser Zweig des Bankgeschäftes wurde zuerst von Einzelunternehmern oder kleineren Handelsgesellschaften betrieben, allein die Missbräuche und Unzukömmlichkeiten, die dabei hervortraten, machen eine strengere Controle in dieser Beziehung erwünscht. Insbesondere der Umstand, dass die Bankiers die ihnen anvertrauten Gelder, durch Anleihen für sich nutzbar zu machen suchten, dadurch aber nicht selten zahlungsunfähig wurden, gab gegen Ende des XVI. Jahrhunderts Veranlassung, dass die Staaten die Errichtung von Girobanken selbst in die Hand nahmen und für die ordnungsmässige Thätigkeit derselben durch strenge Beaufsichtigung sorgten. Wohl wird von dem Entstehen solcher monopolisirter und unter Staatscontrole stehender Girobanken Manches berichtet, was der jetzigen Forschung als Fabel erscheint, doch kann ietir nur von Ausnahmsfällen die Rede sein.

*) So definirt noch der englische handelswissenschaftliche Schriftsteller Gerard Malines in seiner 1623 erschienenen „Lex Mercatoria“: Eine Bank im eigentlichen Sinne des Wortes ist eine Ansammlung des gesammten baaren Geldes in einem Staate oder einer Provinz oder auch einer einzelnen Stadt in die Hände einiger durch die Behörde dazu autorisirter Personen, von denen man zu jeder Zeit das Geld nach Belieben wiedererhalten und zurückziehen kann, so dass diese Bankiers sozusagen die Cassierer der betreffenden Provinz, Stadt oder Landschaft werden.

Die Sterblichkeits-Statistik, ihre Entwicklung und Anwendung für die Construction von Sterbetafeln.

I.

Der gegenwärtige Stand der Sterblichkeits-Statistik ist ein solcher, dass in derselben alle Bedingungen gegeben sind, um den mit Rücksicht auf die Lebensversicherung construirten Mortalitätstafeln eine möglichst hinreichende Verlässlichkeit zu gewähren. Der ganz bedeutende Umfang des ausgewählten, allen Voraussetzungen einer strengen Beobachtung unterworfenen statistischen Materiales, welches seit Beginn der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts von den Versicherungsgesellschaften angesammelt wurde, war mehr als hinreichend, um der empirischen Entwicklung der Lebensversicherungs-Institution eine sichere Grundlage zu bieten. Was im Laufe der Zeiten für den Fortschritt in dieser Hinsicht geleistet wurde, lässt sich bloss ermessen, wenn man die einzelnen historischen Phasen der Sterblichkeits-Statistik in ihren die Versicherungs-Institution fördernden Wirkungen verfolgt.

Schon in Alterthume finden wir Aufzeichnungen über Bevölkerungsstatistik, doch wurden mit denselben bloss fiscalische Zwecke verfolgt. Bei den Römern und zwar schon unter der Regierung des Servius Tullius im sechsten Jahrhunderte v. Chr. wurden Geburtslisten geführt, welche jedes fünfte Jahr aufgenommen wurden und nur für die Einhebung der Steuern dienen sollten. Die Verstorbenen wurden einfach gestrichen, ohne dass man sich weiter um sie kümmerte. Späterhin dürfte die Altersangabe der Todten ebenfalls berücksichtigt worden sein, denn der berühmte römische Präfect Ulpian, der Commentator des falcidischen Gesetzes, construirte um die Mitte des zweiten Jahrhunderts eine Tafel über die Lebensdauer des römischen Volkes, die uns erhalten wurde. Im Mittelalter finden wir jedoch erst wieder im 15. und 16. Jahrhundert in den Hauptklöstern der Mönchs- und Nonnenorden und noch später in einzelnen Kirchspielen die Eintragung der Todesfälle mit Altersangabe der Todten eingeführt. Die ersten englischen Kirchspielregister stammen aus dem Jahre 1538, allgemein aber wurde dieser Zweig der Statistik erst im 17. Jahrhundert. Im Jahre 1662 veröffentlichte Sir William Petty ein Werk über politische Arithmetik und machte darin zugleich Untersuchungen über die Bevölkerung Londons. Kurz darauf publicirte der Capitän John Graunt sein Werk über Todtenlisten; welches jedoch auf die mangelhaften und unzuverlässigen Londoner Kirchenbücher basirt war.

Ein ganz besonderes Verdienst hat sich nach dieser Richtung ein deutscher Geistlicher, Dr. theol. Kaspar Neumann, erworben, welcher auf Grund

[illegible] Prüfung zu unterz
Neumann's gestützt, stellte Halley nun eine Sterblichkei
Berechnung der Lebensdauer für die verschiedenen Alte
[illegible] veröffentlicht wurde. Halley hat also das Verdien
Mortalitätstabelle zu sein.

Ungefähr um die Mitte des 17. Jahrhunderts
Versicherungswesen ungemein wichtiger Gegenstand, di
haben, von den grossen Mathematikern Fermat und Pas
Studium unterworfen. Anlass dazu gab das aus Italien
geführte Hazardspiel. Man begann damit, die Chan
untersuchen, welche zwei Würfelspieler hatten und ver
Gesetze für die sich ergebenden möglichen Combinat
berechnen. Pascal beschäftigte sich viel mit diesen
Mathematik und verfasste sogar unter dem Titel „Hist
ein Werk darüber.

Im zweiten Drittel des achtzehnten Jahrhunderts
schaft einen neuen Aufschwung und zwar durch die V
Abhandlungen mit Tabellen über die Sterblichkeit unt
Mitgliedern der holländischen und westfriesischen Ren
eines Zeitraumes von [illegible] Jahren durch den Holländer
das Jahr [illegible]—1742. Zu gleicher Zeit u. zw. um das J
von dem Holländer Nicolaus Struyk verfasstes Werk
welchem zum ersten Male auf die verschiedene Sterblich
und Frauen aufmerksam gemacht wurde. Im darauffolge
ein Deutscher Namens Johann Peter Süssmilch sein b
göttliche Ordnung in den Veränderungen des mensch
[illegible] von Baumann verbesserten Mortalität

zösischen Tontinen*) in den Jahren 1689—1696 und der Todtenregister mehrerer Mönchs- und Nonnenklöster. Deparcieux ist auch derjenige, von dem zuerst die Theorie der „mittleren Lebensdauer“ aufgestellt wurde. Während dieser Zeit wurde von dem Engländer Thomas Simpson die in Vergessenheit gerathene Mortabilitätstabelle des grossen Halley wieder in Discussion gezogen. Halley's Arbeit zur Grundlage nehmend, hielt Simpson Vorlesungen über die Möglichkeit, eine Prämientabelle mit stufenweise sich steigernden Prämien im Verhältnisse zu der in gleicher Weise mit dem Alter zunehmenden Sterblichkeit zu construiren. Ausserdem veröffentlichte er in den Jahren 1740 bis 1752 mehrere Werke über die Gesetze der Wahrscheinlichkeit und über Leibrenten, sowie über einzelne und verbundene Leben, doch hatten diese Arbeiten den Mangel, die unzuverlässigen Londoner Kirchspiellisten zur Grundlage zu besitzen.

Dessenungeachtet erweckten Simpson's Arbeiten allgemeines Aufsehen und veranlassten dessen Zeitgenossen James Dodson zur Construirung der ersten Prämientabelle nach der Halley'schen Methode, welche der geringen wahrscheinlichen Lebensdauer der Halley'schen Tafel gemäss, sich nicht nur durch sehr hohe Prämien, sondern auch durch den sehr grossen Unterschied derselben für Männer und Frauen auszeichnete. Nicht lange darauf trat ein unitarischer Theologe, Dr. Richard Price, der als Prediger keine passende Anstellung gefunden und sich deshalb der Lebensversicherungs-Wissenschaft widmete, mit zweien wichtigen Methoden in die Oeffentlichkeit, von denen die eine die Ermittlung des periodisch wirklichen Gewinnes, nach Abzug der Prämienreserve, die andere die Berechnung des jährlichen Status der Letzteren betraf. Ausserdem studirte derselbe mit grossem Eifer die Populationsstatistik, um ein zuverlässiges Materiale für die Berechnung einer brauchbaren Mortabilitätstabelle ausfindig zu machen. Auf die Beobachtungen Wargentin's über die Sterblichkeit in Schweden in dem Zeitraume von 1755—1776 gestützt, arbeitete er eine mit vorzüglichem Materiale ausgestattete Tafel aus, welcher die Resultate einer officiellen Volkszählung eines ganzen Reiches mit der Anzahl der Lebenden und Todten eines jeden Jahres zu Grunde lagen. Bald darauf fand er auch ein ebenso zuverlässiges Materiale und zwar in England selbst, wodurch es ihm möglich wurde, eine Sterblichkeitstabelle für die englische Bevölkerung zu schaffen. Unter Zugrundelegung der mit besonderer Genauigkeit geführten Kirchspiellisten der Stadt Northampton berechnete er die bekannte Northampton-Mortabilitätstafel, die er im Jahre 1780 veröffentlichte.

Auf diese Weise entwickelte sich successive eine wissenschaftliche Basis für die Lebensversicherung. Je grösser und vollkommener das statistische Materiale wurde, desto verlässlicher und genauer gestalteten sich die Grundlagen für die Prämienberechnung, so dass der Abstand zwischen der Voraussetzung und dem thatsächlichen Ergebniss ein immer kleinerer wurde. Während

*) Um die Mitte des 17. Jahrhunderts von dem italienischen Arzt Lorenzo Tonti begründete, auf Association und Mortalitätschancen beruhende Capitalsverwerthung.

schaft „The Equitable Society for the Assurance of Lif
in London erstehen, welche bereits die gewonnenen Res
sicherungs-Wissenschaft zu verwerthen in der Lage wa

Währenddem hatte auch in Frankreich die Sterblich
Fortschritte gemacht. Um das Jahr 1749 publicirte der be
Buffon eine Mortalitätstabelle, welche auf den Ster
Kirchspiele in Paris und zweier Landkirchspiele der
war. Doch blieb diese Publication ebenso wie das frühe
Werk von Deparcieux ohne irgendwelche Wirkung au
Man liess die Wissenschaft unbeachtet und gestützt au
gegriffene Wahrscheinlichkeitsrechnung gründete man
Italien neue Tontinen, denen ein derartig widersinniges V
fälle und Geburten zu Grunde gelegt wurde, dass nach
800 Jahren die ganze Menschheit ausgestorben wäre. Di
ihrem Gründer François **Lafarge** den Namen „Caisse
eine Combination der Leibrenten-Versicherung auf Leb
bei welcher der Staat einen grossen Profit einstrich.

In den meisten europäischen Staaten wurde zu En
hunderts die Lebensversicherung im weiteren Sinne de
cultivirt. Die Capitalsversicherung auf Todesfall war du
cassen, die Rentenversicherung durch staatliche Witwen
nach der ursprünglichen Idee des Tonti repräsentirt. Di
im eigentlichen Sinne des Wortes war jedoch noch zu Be
Jahrhunderts am europäischen Continente so viel wie unb
den bereits genannten mehrere hervorragende Männer wi
nitz, **Bernoulli**, **Euler** und **Condorcet** bedeutend
sicherungswissenschaft geliefert und der bekannte dänis
Tetens ein vorzügliches Werk über ...

Betrachtungen über die wirthschaftlichen Functionen der Banken und deren Entwicklung.

II.

Die älteste vom Staate errichtete Girobank, ist die von Venedig, welche vom Jahre 1587 datirt. Dieselbe hiess nach dem Sitze des Geschäfte Banka di Rialto und besass manche werthvolle Privilegien. Vom Jahre 1593 durften Wechsel nur durch Umschreibung in ihren Conten bezahlt werden. Im Jahre 1619 wurde neben dieser noch eine zweite Girobank in Venedig gegründet, die sogenannte Banco Giro, welche nur für Zahlungen vom Staate und an den Staat bestimmt sein sollte.

Diese beiden Institute wurden später miteinander vereinigt und die so entstandene einheitliche Girobank erhielt sich bis zum Untergange der Replublik 1797. Dieselbe rechnete nach der Lira grossa (= 20 Soldi grossi à 12 Denarii grossi). Eine Lira grossa hatte den Silbergehalt von etwa 13$^1/_3$ Thaler; mittelst einer solchen konnte man 10 Ducati Banco, respective 62 Lire Banko zahlen. Eine jüngere Girobank als diese war die Bank von St. Giorgio in Genua, welche zwar schon früher als Vermittlerin zwischen dem Staate und seinen Gläubigern bei Auszahlung der Zinsen der Staatsschulden diente und auch wohl einlaufende Beträge von privaten Personen eine Zeit lang bewahrte, bis dieselben hierüber verfügten, doch besorgte sie keine Uebertragungen von einem Conto auf das andere, ehe ihr nicht durch eine vollständige Reorganisation 1675 diese neue Aufgabe übertragen wurde. Die nächste staatlich errichtete Girobank nach der venetianischen war die Bank von Amsterdam, die um das Jahr 1609 ins Leben trat. Wie Malines sagt, wurde sie gegründet, um gegen die Privatbankiers ein Gegengewicht zu bilden. Diese hatte insbesondere Gelegenheit, jene Vortheile zu Tage treten zu lassen, welche eine Girobank dem Handel zu bieten im Stande war. Es gelangten nämlich in jener Zeit viele minderhaltige Münzen, theils durch schlechte Ausprägung in den Münzstätten, theils durch betrügerische Manipulationen von Privaten, in Umlauf und der Einzelne, der sich der Annahme derselben nicht wirksam widersetzen konnte, war stets der Uebervortheilung ausgesetzt. Anders jedoch eine Bank; diese konnte jedes entwerthete Geldstück zurückweisen oder doch nur nach dem wirklichen inneren Gehalt annehmen. Deshalb bedeutende die Zahlung durch Vermittlung einer Bank, Zahlung in vollwichtigem unveränderlichem Gelde. Auf diese Weise erreichte der Kaufmannsstand durch Benützung der Girobanken den Vortheil, dass er unberührt blieb von den durch die Münzherren willkürlich hervorgerufenen Veränderungen der Umlaufsmittel, sich zugleich der verbrecherischen Gewinnsucht der „Kipper und Wipper“, welche die Münzen beschnitten und die fehlerhaft ausgeprägten in Verkehr brachten, mit Erfolg entziehend. Dieser Umstand hatte zur Folge, dass jenes durch die Banken zur Auszahlung kommende Geld, Bankgeld oder Bankwährung genannt, werthvoller wurde, als das unter Privaten von Hand zu Hand gezahlte Curantgeld.“

Die kaufmännische Zahlungsweise hat sich seither mit der Entwicklung des Handels mehrfach geändert. Während in den früheren Jahrhunderten den Hauptgrund für die Errichtung des Giro, die häufige Veränderung, die Verschlechterung, kurz die Unsicherheit des Metallgeldes bildete, ist heute diese Gefahr nicht mehr zu besorgen, dagegen liegt nunmehr der Hauptzweck des Giro anderswo, nämlich in der Ersparung der Goldcirculationsmittel. Aber auch die Form ist eine andere geworden, den die Girobanken gehören längst der Vergangenheit an. Heute ist es der Clearingverkehr, mittelst dessen die Forderungen und Verpflichtungen compensirt und beglichen werden. Und um diese Abrechnung nach Zeit und Ort zu concentriren, dazu dienen gleichsam als Träger und Zubringer die Checks, kurzsichtige Anweisungen, womit auf Grund einer bei einer bestimmten Bank hinterlegten Baarsumme Zahlungen geleistet und empfangen werden. In unserer Zeit, wo ein ziemlicher Mangel des Goldes als Umlaufsmittel im Verkehre der Völker sich fühlbar macht, bietet sich als willkommenes Auskunftsmittel, um Gold zu sparen, die kräftige Entwicklung des Giro- und Checkwesens, eines Mittels der Zahlung ohne Geld und ohne Gold.

In dieser Beziehung hat nun das Girowesen im Laufe des letzten Jahrhundertes sich in ganz besonderer Weise ausgestaltet und beherrscht heute in wirthschaftlich entwickelten Ländern den gesammten Handelsverkehr. Insbesondere England und die Vereinigten Staaten wussten den Nutzen des Giro- und Clearing-Verkehres für sich zur vollen Geltung zu bringen. Während die Umsatzziffern des Londoner Clearinghauses für 1892 einen Umsatz von rund 6482 Millionen Pfund Sterling ausmachen, hat sich der Giroverkehr des New-Yorker Clearinghauses in den letzten Jahren in einer Weise entwickelt, dass derselbe die Ziffern der Londoner Umsätze trotz der Möglickeit mit Noten (Greenbacks) zu zahlen, heute nahezu erreicht. Die Ausdehnung des Giroverkehres ist daselbst eine so enorme, dass nach einer vom Schatzamte in Washington bereits im Jahre 1881 veranlassten Feststellung des Verhältnisses zwischen Baargeld und Checks bei 48 New-Yorker Banken auf den Metall- und Papiergeldumlauf bloss 1·3 Percent des gesammten Geldverkehres fallen, so das 98·7 Percent desselben durch den Giro- und Checkverkehr bestritten werden. Dagegen hat der Giroverkehr am europäischen Continente sich noch nicht zu gleicher Bedeutung aufschwingen können, obzwar insbesondere Frankreich in dieser Beziehung nicht geringe Erfolge aufzuweisen hat. Auch Deutschland, dessen Giroeinrichtungen, abgesehen von Hamburg, ziemlich jungen Datums sind, hat sich in dieser Hinsicht ausserordentlich rasch entwickelt.

Ein Blick auf die Wochenausweise der Deutschen Reichsbank genügt, um aus der Höhe der „sonstigen täglich fälligen Verbindlichkeiten“ sich ein Bild über den Umfang des Giroverkehres in Deutschland machen zu können. In dieser Hinsicht stehen aber noch andere Belege zu Gebote, welche uns sehr beachtenswerth erscheinen, nämlich die Daten über die Thätigkeit der Abrechnungsstellen in Deutschland. Die Reichsbank hat ausser in Berlin noch an sieben grösseren Bankplätzen, und zwar in Bremen, Breslau, Köln, Dres-

also die im Jahre 1705 gegründete und durch Parlamentsacte im Jahre incorporirte Lebensversicherungs-Gesellschaft „The Amicable" oder „Per Assurance", die erste, welche sich als lebensfähig erwies und ihre samkeit bis auf unsere Tage fortsetzte, ebenso wie die im Jahre 1721 e teten „Royal Exchange" und „London Assurance Corporation", noch au vagen Grundlagen die Lebensversicherung inaugurirten, und ursprünglic höchst unvollkommenen Einrichtungen ausgestattet waren, sehen wi halbes Jahrhundert später (1761) auf Grundlage der von James Dodso steigender Scala berechneten Prämientabelle für Lebensversicherung die auf wissenschaftlich begründeter Basis errichtete Lebensversicherungs-G schaft „The Equitable Society for the Assurance of Life and Survivor in London erstehen, welche bereits die gewonnenen Resultate der Lebe sicherungs-Wissenschaft zu verwerthen in der Lage war.

Währenddem hatte auch in Frankreich die Sterblichkeits-Statistik w Fortschritte gemacht. Um das Jahr 1749 publicirte der berühmte Naturfo Buffon eine Mortalitätstabelle, welche auf den Sterblichkeitslisten Kirchspiele in Paris und zweier Landkirchspiele der Umgegend begr war. Doch blieb diese Publication ebenso wie das früher erwähnte bedeu Werk von Deparcieux ohne irgendwelche Wirkung auf die Oeffentlic Man liess die Wissenschaft unbeachtet und gestützt auf eine aus der gegriffene Wahrscheinlichkeitsrechnung gründete man hier ebenso w Italien neue Tontinen, denen ein derartig widersinniges Verhältniss der T fälle und Geburten zu Grunde gelegt wurde, dass nach demselben inn 800 Jahren die ganze Menschheit ausgestorben wäre. Dieselben führten ihrem Gründer François Lafarge den Namen „Caisse Lafarge" und eine Combination der Leibrenten-Versicherung auf Lebensfall mit Lo bei welcher der Staat einen grossen Profit einstrich.

In den meisten europäischen Staaten wurde zu Ende des vorigen hunderts die Lebensversicherung im weiteren Sinne des Wortes allg cultivirt. Die Capitalsversicherung auf Todesfall war durch zahlreiche S cassen, die Rentenversicherung durch staatliche Witwencassen und Ton nach der ursprünglichen Idee des Tonti repräsentirt. Die Lebensversich im eigentlichen Sinne des Wortes war jedoch noch zu Beginn des neunze Jahrhunderts am europäischen Continente so viel wie unbekannt, obzwar den bereits genannten mehrere hervorragende Männer wie Huygens, nitz, Bernoulli, Euler und Condorcet bedeutende Beiträge zur sicherungswissenschaft geliefert und der bekannte dänische Nationalök Tentens ein vorzügliches Werk über „Berechnung der Leibrenten Anwartschaften" bereits im Jahre 1786 publicirt hatte, doch begann der Aufschwung der Lebensversicherung in England seinen Einfluss au Continent auszuüben.

Betrachtungen über die wirthschaftlichen Functionen der Banken und deren Entwicklung.

II.

Die älteste vom Staate errichtete Girobank, ist die von Venedig, welche vom Jahre 1587 datirt. Dieselbe hiess nach dem Sitze des Geschäfte Banka di Rialto und besass manche werthvolle Privilegien. Vom Jahre 1593 durften Wechsel nur durch Umschreibung in ihren Conten bezahlt werden. Im Jahre 1619 wurde neben dieser noch eine zweite Girobank in Venedig gegründet, die sogenannte Banco Giro, welche nur für Zahlungen vom Staate und an den Staat bestimmt sein sollte.

Diese beiden Institute wurden später miteinander vereinigt und die so entstandene einheitliche Girobank erhielt sich bis zum Untergange der Replublik 1797. Dieselbe rechnete nach der Lira grossa (= 20 Soldi grossi à 12 Denarii grossi). Eine Lira grossa hatte den Silbergehalt von etwa 13¹/₃ Thaler; mittelst einer solchen konnte man 10 Ducati Banco, respective 62 Lire Banko zahlen. Eine jüngere Girobank als diese war die Bank von St. Giorgio in Genua, welche zwar schon früher als Vermittlerin zwischen dem Staate und seinen Gläubigern bei Auszahlung der Zinsen der Staatsschulden diente und auch wohl einlaufende Beträge von privaten Personen eine Zeit lang bewahrte, bis dieselben hierüber verfügten, doch besorgte sie keine Uebertragungen von einem Conto auf das andere, ehe ihr nicht durch eine vollständige Reorganisation 1675 diese neue Aufgabe übertragen wurde. Die nächste staatlich errichtete Girobank nach der venetianischen war die Bank von Amsterdam, die um das Jahr 1609 ins Leben trat. Wie Malines sagt, wurde sie gegründet, um gegen die Privatbankiers ein Gegengewicht zu bilden. Diese hatte insbesondere Gelegenheit, jene Vortheile zu Tage treten zu lassen, welche eine Girobank dem Handel zu bieten im Stande war. Es gelangten nämlich in jener Zeit viele minderhaltige Münzen, theils durch schlechte Ausprägung in den Münzstätten, theils durch betrügerische Manipulationen von Privaten, in Umlauf und der Einzelne, der sich der Annahme derselben nicht wirksam widersetzen konnte, war stets der Uebervortheilung ausgesetzt. Anders jedoch eine Bank; diese konnte jedes entwerthete Geldstück zurückweisen oder doch nur nach dem wirklichen inneren Gehalt annehmen. Deshalb bedeutende die Zahlung durch Vermittlung einer Bank, Zahlung in vollwichtigem unveränderlichem Gelde. Auf diese Weise erreichte der Kaufmannsstand durch Benützung der Girobanken den Vortheil, dass er unberührt blieb von den durch die Münzherren willkürlich hervorgerufenen Veränderungen der Umlaufsmittel, sich zugleich der verbrecherischen Gewinnsucht der „Kipper und Wipper", welche die Münzen beschnitten und die fehlerhaft ausgeprägten in Verkehr brachten, mit Erfolg entziehend. Dieser Umstand hatte zur Folge, dass jenes durch die Banken zur Auszahlung kommende Geld, Bankgeld oder Bankwährung genannt, werthvoller wurde, als das unter Privaten von Hand zu Hand gezahlte Curantgeld

den, Frankfurt am Main, Leipzig und Stuttgart, Abrechnungsstellen i
gerufen. Die Jahresausweise pro 1892 zeigen, dass an fünf Plätzen di
der Einlieferungen unter 500 Millionen Mark geblieben ist, in Bremen
bereits rund 800 Millionen Mark beträgt, während Frankfurt am M
3030 Millionen Mark, Berlin mit 3857 Millionen Mark und Hamb
7402 Millionen Mark noch grössere Ziffern ausweisen.

Gehen wir aber um einen Schritt weiter und fragen wir nach d
hältnisse der Ueberweisung auf ein anderes Conto zur Gutschrift
eigenen Giro-Conto, so erfahren wir, dass in Hamburg 93·3 Percent, in
81·97 Percent, in Frankfurt am Main 80·21 Percent und in Berlin al
nur 45·55 Percent der Einreichung compensirt werden konnten. Es u
keinem Zweifel, dass der Umfang der Arbeiten eines Clearinghauses de
Anhaltspunkt für die Entwicklung des Girowesens auf dem betreffende
zu geben im Stande ist.

Wenn wir, von diesem wohl unwiderlegbaren Standpunkte au
nunmehr die Jahresberichte der Saldirungsvereine in Wien und B
prüfen, so ergeben sich folgende Resultate: Die Einlieferungen haben im Ja
in Wien rund 278 Millionen Gulden, in Budapest rund 110 Millionen
betragen. Mit dem Vorjahre verglichen, haben die Einlieferungen in B
um rund 3 Millionen Gulden zu-, in Wien um rund 23 Millionen Gu
genommen. Die Compensations-Quote war in Wien 22·4 Percent, in B
17·3 Percent. Der Wiener Saldirungsverein trat mit 1. Jänner 1872 i
samkeit und wies nach seinem ersten Geschäftsjahre eine Einliefer
rund 262 Millionen Gulden aus. Es ist hier also nach 21 Jahren nur
nahme der Umsätze von circa 16 Millionen Gulden zu verzeichnen.

Wohl darf nicht unerwähnt bleiben, dass das Effectengeschäft i
ebenfalls in giromässiger Weise abgewickelt wird, und es wurden auf
Gebiete im Jahre 1892 bei einem Revirement von 2722 Millionen
97 Percent durch Compensation geordnet, während bloss 3 Percent a
Millionen Gulden baar zu begleichen waren; doch muss, selbst wenn
Clearingverkehr der Postsparcassen mit in Betracht gezogen wird, zu
werden, dass diese Umsätze, verglichen mit den Resultaten der d
Abrechnungsstellen, äusserst geringe sind. In Oesterreich-Ungarn blei
auf diesem Gebiete noch viel zu thun übrig.

Im Allgemeinen macht jedoch das Wesen des Giro- und Clearingv
bedeutende Fortschritte und es ist angesichts des fortschreitenden stets m
werdenden Handelsverkehres vorauszusehen, dass sich in dieser Beziehu
eine weitere rasche Entwicklung vollziehen muss, und zwar vornehmlich
der wirthschaftlichen Ausgestaltung der Münzverhältnisse. Insb
für Staaten, welche heute im Begriffe stehen, den schwierigen Ueberg
einer gestörten Valuta zum Baargeldumlaufe zu vollziehen, sind Che
Giro von grösster Bedeutung. Der Check verdrängt niemals das Gold
oft die Note thut; er ist kein Concurrent, sondern ein bescheidener V
des Goldes mit kurzer Lebensdauer, und indem er der Centralbank z
erleichtert er den Umlauf durch die einfache Uebertragung, das Giro.

———

Jene die statistische Basis der Lebensversicherung bildenden Mortalitäts- und Vitalitätsverhältnisse, aus welchen die Sterblichkeitstafeln hervorgegangen sind, haben seither gleichfalls eine sehr reiche Literatur aufzuweisen; und wenn sich auch sehr viele mangelhafte und unbrauchbare Arbeiten darunter befinden, so lässt es sich nicht leugnen, dass eine grosse Zahl dieser Schriften von hervorragender Bedeutung ist.

Ebenso wie im 18. Jahrhundert blieb auch weiterhin die Literatur der Mortalitätstafeln vorwiegend eine englische. Es waren nacheinander verschiedene Tafeln, berechnet auf Grundlage der Volkszählungen einzelner Städte, entstanden, so „the Chester Table", berechnet nach Dr. Haygarth's Sterbelisten dieser Stadt für 10 Jahre (1772—81); „the Stockholm Table", auf der Sterblichkeit dieser Stadt für 9 Jahre (1755—63) berechnet; „the Norwich Table", nach beobachteter Sterblichkeit in Norwich während 30 Jahren (1739—69); „the Holycross Table", nach Dr. Gorsuch's Beobachtungen für 30 Jahre (1750—80); „the Warrington Table", nach Dr. Aikin's Beobachtungen; „the Table of Süssmilch" und „the Table of Waadt", nach Muret's Beobachtungen, welche sämmtlich von dem rühmlichst bekannten Dr. Price neben „the London Table" und „the Northampton Table" veröffentlicht wurden, u. zw. in dessen Werke „Observations on Reversionary Payments, on Schemes for providing Annuities for Widows and for Persons in old age" (London 1771), dessen vierte und vollständigste Ausgabe 1783 in zwei Bänden erschien. Price schrieb ferner über Mortalitätsverhältnisse: „Observation on the difference between the duration of human life in towns and in country parishes and villages"; „Essay on the population of England from the rovolution to the present time" (London 1780) und „Letter introducing Dr. Clark's Observations on some causes of the excess of mortality of males above that of females." Schliesslich wurde die von Dr. John Heysham beobachtete Sterblichkeit der Stadt Carlisle in einem seiner Werke 1797 dargestellt. Auf Grundlage dieser Schrift construirte Joshua Milne die sogenannte „Carlisle Table", welche er in dem Werk „A Treatise on the Valuation of Annuities" im Jahre 1815 bekannt machte.

In diese Zeit fällt die Construction der ersten, auf der Sterblichkeitserfahrung des Versicherungsstockes einer geschlossenen Gesellschaft beruhenden Mortalitätstabelle. Dieselbe wurde von Griffith Davies nach den Erfahrungen der Equitable Society berechnet und in dessen Werke „On Life Contingenties" publicirt. Eine für die Praxis noch mehr erfolgreiche Arbeit lieferte der berühmte Actuar Arthur Morgan in seiner nach den Erfahrungen der Equitable für 67 Jahre (1762—1829) berechneten Tabelle, die gewöhnlich „Equitable Experience Table" genannt wird. Dieselbe erschien zu London 1834 unter dem Titel „Tables showing the total Number of Persons assured in the Equitable Society." Der englische Regierungsactuar John Finlaison berechnete nach den an den Mitgliedern von Staatstoutinen und Annuitäten während einer Reihe von Jahren gemachten Erfahrungen eine Mortalitätstabelle, „the Government Tables" genannt, welche im Jahre 1829 erschien,

unter dem Titel: „Report of John Finlaison, Actuary of the National debt on the Evident and Elementary facts on which Tables of Life Annuities are founded". Es folgten nun eine Menge Sterblichkeitstafeln, welche nach der Erfahrung von geschlossenen Gesellschaften berechnet waren. Galloway construirte eine Tafel nach der Erfahrung der „Amicable Society" von 1761—1831. Charles Ansell berechnete „The Friendly Societies' Table", welche in seiner Schrift „A Treatise on Friendly Societies" (London 1835) publicirt wurde. Der berühmte Statistiker Neison hat gleichfalls nach den Erfahrungen der Friendly Societies eine Tafel construirt, welche in der dritten Ausgabe seines bekannten Werkes „Contributions to vital statistics" (London 1857) enthalten ist. Siebzehn englische Gesellschaften, unter dem Präsidium des Actuars Jenkin Jones, construirten nach den von ihnen gemachten Erfahrungen eine Tafel, welche gewöhnlich „Experience Table" (Tafel der 17 englischen Gesellschaften) genannt wird und für die Praxis von grosser Bedeutung wurde, nicht allein in England selbst, sondern auch in Deutschland. Dieselbe erschien unter dem Titel „Series of tables of annuities and assurances, calculated from a new rate of mortality" (London 1843). Nach dem englischen Census von 1841 construirte der rühmlichst bekannte Statistiker Dr. W. Farr eine Mortalitätstabelle, gewöhnlich „The English Life Table Nr. 1" genannt; sie wurde in „The fifth annual Report of the Registrar-General" publicirt, während die Erklärungen hiezu erst in „The sixth annual Report" erschienen. Da aber diese Tabelle blos auf die Sterbefälle in England innerhalb eines einzigen Jahres basirt war, so konnte das Resultat nur sehr unsicher ausfallen. Deswegen construirte er eine zweite Tabelle, auf die Sterblichkeit während der sieben Jahre 1838—1844 basirt, die unter dem Titel „The English Life Table Nr. 2" bekannt ist und in dem „Twelfth annual Report of Registrar-General" veröffentlicht wurde. Endlich hat der unermüdliche Verfasser eine dritte Tabelle construirt „The English Life Table Nr. 3", auf die beiden Census 1841 und 1851, d. h. auf mehr als 50 Millionen Lebende und 6,470.720 Todesfälle basirt.

Diese werthvolle Arbeit wurde im Jahre 1864 in dem General-Registrators jährlichen Bericht publicirt. Die Mortalitätstabellen der geschlossenen Gesellschaften, die sogenannten „Experience Tables" haben zu jener Zeit noch manche Vermehrung erfahren. Zu erwähnen sind unter denselben: Downe's „Table of the Economic" (London 1857); The Table of Clerical, Medical and General"; Charles Jellicoe's „Table of the Eagle"; William Spen's „Table of the Scottish Amicable" (1861) und Percy M. Dove's „Table of the Royal" (London 1865).

In Frankreich construirten Duvillard und de Montferraud im Anfange des Jahrhunderts Mortalitätstabellen; die letzteren wurden veröffentlicht in dem „Journal de l'école royale polytechnique". Von den belgischen Tafeln sind nur die von Quetelet nach der Sterblichkeit der ganzen Bevölkerung von 1841—50 berechnet, besonders zu erwähnen.*)

---

*) Siehe Karup „Handbuch der Lebensversicherung".

Betrachtungen über die wirthschaftlichen Functionen der Banken und deren Entwicklung.

III.

Während der Merkantilismus von der falschen Voraussetzung ausging, dass viel Geld im Lande den Reichthum desselben bedinge, dieser sich also in der Menge des Münzumlaufes manifestirt, gelangte die moderne Wissenschaft zu der Erfahrung, dass sich der Geldumlauf im Lande von selbst regulirt und im überschüssigen Münzumlauf eine Verschwendung des Volksvermögens liegt, indem derselbe der productiven Verwendung entzogen wird.

Das Bedürfniss eines Staates hinsichtlich des Geldumlaufes richtet sich nach dem wirthschaftlichen Verkehre desselben. Je geringer der Verkehr in einem Lande ist, desto weniger Circulationsmittel sind nothwendig, um dessen Bedarf zu befriedigen. In Ländern, wo Naturalwirthschaft herrscht, und Jeder seine Nahrungsmittel selbst producirt, zugleich auch die sonstigen Bedürfnisse geringe sind, ist der Geldumlauf ein sehr mässiger, daher auch das Bedürfniss nach Umlaufsmitteln ein geringeres. Hingegen wird in einem Staatswesen, wo ein grosser Verkehr und Austausch von Producten und Waaren stattfindet, der Geldbedarf relativ ein grosser sein. Daraus folgt der Grundsatz, dass mit der wirthschaftlichen Entwicklung eines Landes der Geldbedarf desselben in gleichem Verhältnisse zunimmt.

Die Circulationsmittel in einem Lande summiren sich aus dem Bedarf der einzelnen wirtschaftenden Subjecte. Je mehr derselben ein Land oder ein Staat besitzt, desto grösser der Geldbedarf, weil jedes Subject eine gewisse Quantität an Umlaufsmitteln absorbirt. Diese Quantität ist jedoch zu verschiedenen Zeitperioden einer ebensolchen Variation unterworfen, wie der wirthschaftliche Verkehr selbst. Dieser Umstand hat zur Folge, dass oft viele Capitalien, welche während des grösseren Geldbedarfes in Umlauf gelangten, unproductiv so lange liegen bleiben, bis sie ihre entsprechende Verwendung gefunden haben. Ausserdem werden Capitalien zum Zwecke von Zahlungen in baarer Münze angesammelt, wodurch ein grosser Theil der Umlaufsmittel festgelegt wird. Dies involvirt nun eine Schädigung des Volksvermögens, indem jene Baarcapitalien, die nicht unbedingt der Circulation dienen, überflüssiger Weise der productiven Anlage entzogen werden.

Um nun diesen Ueberschuss der absolut nöthigen Umlaufsmittel möglichst einzuschränken, wurden Institutionen geschaffen, deren Aufgabe es ist, die unproductiv und brach liegenden Umlaufsmittel ihrem eigentlichen Zwecke wieder zuzuführen, bezw. in sich aufzunehmen und productiv zu verwerthen. Solche Institutionen sind: 1. Die Notenbanken und das Staatspapiergeld 2. die Clearing-house und Saldirungsinstitute; 3. die Institution der Casse

scheine; 4. die Sparcassen; 5. die Checkanstalten, Depositenbanken, Conto-Correntgeschäfte.

Dort wo diese Institutionen nicht eingeführt sind, ist ein relativ grösserer Bedarf an Metallgeldcirculation vorhanden, wodurch also eine grössere Menge desselben der productiven Anlage entzogen wird. Insbesondere sind es die Notenbanken, welche in dieser Beziehung hohe wirthschaftliche Bedeutung besitzen. Dieselben sind ihrem ökonomischen Principe gemäss in der Lage, mehr Noten zu emittiren, als ihr Metallschatz beträgt, wodurch der Volkswirthschaft an productiven Capitalien soviel zufliesst, als die Differenz zwischen den ausgegebenen und jenen im Metallschatz gedeckten Noten beträgt. Dieselben dürfen jedoch jenes Mass nicht übersteigen, welches dem wirthschaftlichen Bedarfe eines Staates entspricht, da sie sonst in schädigender Weise den wirthschaftlichen Verkehr beeinflussen.

Dasselbe gilt von der Institution der Staatsnoten, sie haben eine Metallgeld ersparende Mission. Die Menge derselben ist von jenem Circulationsumfange abhängig, welcher einerseits durch die Beamtengehalte und die Heeresbesoldung, andererseits durch die Steuern und sonstigen fiscalischen Einnahmen bedingt ist.

Die Clearing-house und Saldirungsinstitute haben den Zweck, die Ausgleichung von Forderungen zwischen Bankhäusern auf möglichst einfache Weise zu vollziehen. Besondere Bedeutung erlangen diese Einrichtungen in Ländern, wo das Checkwesen stark ausgebilet ist, wie z. B. in England. Hier sind es meistens die Privatbankiers, bei welchen die Checks zusammenströmen, mittelst deren die Zahlungen im Privatverkehre bestritten werden. Haben nun Schuldner und Gläubiger denselben Bankier, so wird die Ausgleichung durch entsprechende Eintragungen in den betreffenden Folien der beiden Parteien durchgeführt. Hat jedoch jeder einen anderen Bankier, so übergibt der Gläubiger seinem eigenen Bankier den vom Schuldner erhaltenen Check, welcher dann bei dessen Bankier eingelöst wird. Durch die gegenseitigen Gesammtforderungen der Bankiers untereinander gelangen daher bloss die jeweiligen Differenzen zur wirklichen Auszahlung, was an einem bestimmten Orte dem sogenannten Clearing-house zu einer bestimmten Stunde des Tages geschieht. Es ist dies ein Local, in welchem jeder Bankier einen bestimmten Tisch hat, auf welchem die Checks seiner Parteien liegen. Durch entsprechenden Austausch derselben wird nun der Ausgleich zwischen den Schuldnern und Gläubigern durch deren Bankiers in der Weise besorgt, dass die sich jeweilig ergebenden Differenzen baar beglichen werden, welcher Vorgang nur geringe Summen an Baargeld in Anspruch nimmt. Zur Bewerkstelligung dieses Ausgleiches reicht oft an baarem Gelde der tausendste Theil der auszugleichenden Summen hin und selbst dieser verhältnissmässig geringe Betrag wird in neuerer Zeit durch eine Anzahl an die englische Bank gezogener Checks ersetzt, indem jeder Bankier bei derselben ein entsprechendes Guthaben erliegen hat. Auf diese Weise wird es möglich, einen bedeutenden Theil der für den Verkehr erforderlichen Um-

laufsmittel entbehrlich zu machen. Vornehmlich die Institutionen des Clearinghouse und der Saldirungsinstitute sind es, welche in ihrem Wesen ausschlaggebend sind bezüglich der Einschränkung des Münzumlaufes und ist es daher nur auf diese Weise erklärlich, wenn England heute bloss einen geringen Theil jener Umlaufsmittel bedarf, deren es nothwendig hätte, wenn diese Einrichtungen nicht bestünden.

Zur Bewerkstelligung dieses Verkehres bildet nun der Check das geeignetste Mittel. Ein Check ist eine Anweisung des bankmässigen Deponenten auf seinen bankmässigen offenen Credit. Jeder Deponent hat sein Folio und erhält ein sogenanntes Checkbuch, in welchem Blanquette vorgedruckt sind, die auf das Guthaben desselben bei der Bank eine dem Ueberbringer auszubezahlende Anweisung repräsentiren. In England ist das Checkwesen besonders ausgebildet und ist dies eine der Hauptursachen des daselbst relativ geringen Münzumlaufes. Das Wesen des Cheks hat mit demjenigen der Banknote grosse Aehnlichkeit, während jedoch die Banknote eine Anweisung der Bank an sich selbst ist, wodurch derselben die allgemeine Circulationsfähigkeit innewohnt, bildet der Check eine Anweisung des Deponenten an die Bank, was dessen Circulationsfähigkeit beeinträchtigt. Der Check beweist nur, dass eine Einlage gemacht wurde; wie gross dieselbe war und ob sie noch nicht erschöpft ist, lässt sich aus dem Wesen des Checks nicht entnehmen, und da ein solcher blos nach Massgabe des vorhandenen Depositums zur Auszahlung gelangt, so liegt in der Honorirung desselben stets ein gewisses Risico, welches in der mehr oder weniger grossen Vertrauenswürdigkeit des Ausstellers zum Ausdrucke gelangt. Die Entwicklung des Checkwesens in einem Lande beruht daher vorwiegend auf dem Wesen des allgemeinen Vertrauens und bildet in Folge dessen einen Massstab grossen wirthschaftlichen Fortschrittes.

Eine Institution, bei welcher das Vertrauen zum Besitzer weniger ins Gewicht fällt, ist diejenige der Cassascheine. Diese besitzen den gleichen Zweck im Verkehre wie der Check, sind jedoch in ihrem Wesen derart beschaffen, dass in demselben das wirkliche Vorhandensein des Depositums zum Ausdrucke kommt. Sie repräsentiren Anweisungen der Bank an sich selbst und haben den Vorzug überall angenommen zu werden. Dieselben sind verzinslich und werden nur auf runde Beträge und kurze Fristen von 24—90 Tagen von der Bank ausgestellt. Die Höhe ihrer Verzinsung steht im umgekehrten Verhältnisse zur Kündigungsfrist, weil von derselben die Höhe der in Bereitschaft zu haltenden Einlösungssummen abhängt, welche mit der kürzeren Kündigungsfrist steigen. Der Unterschied zwischen dem Cassascheine und der Banknote besteht bloss darin, dass der Cassaschein verzinslich, die Banknote hingegen unverzinslich ist.

Was den Ursprung dieser Institutionen betrifft, so dürfte dieser auf die sehr alte Gepflogenheit zurückzuführen sein, nach welcher sich die Bankhalter in ihren Geschäften gegenseitig zu unterstützen suchten. Aus dem Umstande, dass die Geldwechsler nicht immer über jene Menge der gewünschten Landes-

münze verfügten, welche der Kaufmann verlangte und in Folge dessen genöthigt waren, Anweisungen an Kaufleute jenes Landes zu geben, dessen Geld begehrt wurde, entwickelte sich die Institution des Checkwesens und der Cassascheine. Diese Einrichtungen führten auch zu der Erkenntniss, dass es Mittel gibt, welche den Bedarf an baarer Münze im Verkehre zu reduciren geeignet sind. Die Bankiers standen zu einander in einer immerwährenden geschäftlichen Beziehung, welche in einem gegenseitigem Creditverhältnisse zum Ausdruck kam. In gewissen Zeitabschnitten war es aber geboten, die gegenseitigen Forderungen und Verpflichtungen auf kurzem Wege zu ordnen, und so kam man überein, bei bestimmten gemeinsamen Zusammenkünften, die jeweiligen Differenzen zwischen Forderungen und Guthaben auszugleichen. Die Einrichtung der Cassenscheine bildete sich aus dem Bedürfnisse heraus, das Capital nach Möglichkeit nutzbringend zu verwerthen, worin sich der kaufmännische Sinn stets manifestirte. Man war daher bedacht, das momentan disponible baare Geld auf kurze Fristen zinstragend anzulegen. Anfangs behalf man sich damit, dass derjenige Kaufmann, welcher disponibles Capital besass, bei gleich vertrauenswürdigen Kaufleuten Umfrage hielt, ob dieselben Verwendung für baares Geld haben, wobei eine bestimmte niedrige Verzinsung vorgesehen war, welche sich auf diesem Niveau erhielt, weil die Kaufleute gegenseitig in dieser Beziehung auf einander angewiesen waren. Mit der Entwicklung des Handels- und Creditwesens wurde in diese Gepflogenheit Methode gebracht und begannen sich Leute ausschliesslich mit der Aufnahme von Capitalien auf kurze Zeit zu befassen, dieselben wieder anderweitig in der gleichen Weise, jedoch gegen höhere Verzinsung nutzbar machend. Da jedoch der Kaufmann momentan oft in die Lage kam, einen Theil eines solchermassen dargeliehenen Capitals wieder in Anspruch nehmen zu müssen, so wurde die Einrichtung einer kurzen Kündigung getroffen, welche die stete Bereithaltung eines entsprechendes Baarfondes nöthig machte, wodurch die Nutzbarmachung bloss eines Theiles dieser entlehnten Capitalien möglich wurde, was natürlicherweise wieder deren Zinsertrag herabzudrücken geeignet war und so bildete sich successive das Wesen des heutigen Depositums heraus. Auf ähnliche Weise entstand das Depositen- und Conto-Corrent-Geschäft, welches sich nach und nach in den Händen der hiezu am meisten berufenen Bankhalter concentrirte. Erst viel später gelangte man zu der Erkenntniss, dass dieses dem kaufmännischen Geiste entsprungene Bestreben, das Capital möglichst nutzbringend zu verwerthen, auch vom Standpunkte des höheren wirthschaftlichen Principes grosse Vortheile für die Allgemeinheit in sich schliesst, indem hiemit eine Ersparniss der baaren Umlaufsmittel verbunden ist. Und so entwickelten sich später auch die weiteren diesbezüglichen wirthschaftlichen Einrichtungen, welche heute einen solch' segensreichen Einfluss auf das gesammte wirthschaftliche Getriebe ausüben.

Die Sterblichkeits-Statistik, ihre Entwicklung und Anwendung für die Construction von Sterbetafeln.

III.

Die deutsche Literatur hatte in der ersten Hälfte des Jahrhunderts nur wenige beachtenswerthe Mortalitätstafeln aufzuweisen, immerhin sind mehrere sehr gediegene deutsche Werke über diesen Gegenstand veröffentlicht worden. J. L. Casper schrieb das bekannte Werk: „Die wahrscheinliche Lebensdauer des Menschen in den verschiedenen bürgerlichen und geselligen Verhältnissen, nach ihren Bedingungen und Hemmnissen untersucht“ (Berlin 1835). In demselben lieferte er eine grosse Zahl von Tafeln über die Sterblichkeit in mehreren Hauptstädten (Berlin, Paris, London) und die verschiedenen Berufsclassen betreffend. Zwei Jahre später erschien in Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. XVI, die vom Rechnungsrath Brune, nach den Erfahrungen der königl. preussischen allgemeinen Witwenverpflegungsanstalt 1776—1834 construirte Mortalitätstabelle, welche eine vorzügliche Arbeit genannt werden darf. Für die Praxis, namentlich für Witwenanstalten gewann diese Tafel eine ziemlich grosse Bedeutung. Eine noch bedeutendere Arbeit lieferte Ludwig Moser in seinem Werke: „Die Gesetze der Lebensdauer, nebst Untersuchungen über Dauer, Fruchtbarkeit der Ehen, über Tödtlichkeit der Krankheiten etc.“ (Berlin 1839). Die Sterblichkeitstheorie und die Methoden, das Sterblichkeitsgesetz zu ermitteln, wurden in diesem Werke zuerst einer gründlichen Kritik unterzogen. Auch hat der Verfasser daselbst eine nach den Beobachtungen von Kerseboom construirte Mortalitätstabelle geliefert. Ferner construirte Brune auf Grund weiterer Erfahrung in der preussischen Witwenanstalt von 1776—1845 eine verbesserte Tafel. Tellkampf berechnete eine Hannover'sche Tafel in seinem Werke: „Die Verhältnisse der Bevölkerung und der Lebensdauer im Königreich Hannover“ (Hannover 1846), Gebhard eine bayerische in seiner Schrift: „Ueber Witwen- und Waisenpensionsanstalten (München 1844) und Leonhardi eine sächsische Tabelle in den Mittheilungen des statistischen Vereines für das Königreich Sachsen (Dresden 1848), von welchen die erstere besonders beachtenswerth ist. Eine sogenannte „grosse Mortalitätstabelle“ wurde auf Grundlage älterer heterogener Materialien von Bruns berechnet, war jedoch ohne Bedeutung. Dagegen construirte Dr. K. Heym eine nach den Erfahrungen der preussischen Witwenanstalt von 1776—1852 auf 31.400 Sterbefälle basirte Mortalitätstafel, welche die Brune'sche weit übertraf. Derselbe Verfasser hat noch zwei andere Mortaltitätstafeln berechnet, nämlich eine nach den Erf[illegible] der Gothaer Lebensversicherungsbank von 1829—1849 und die an[illegible] den Erfahrungen des Königreiches Sachsen von 1838—1851. Dr. [illegible] machte durch sein hervorragendes Werk: „Grundzüge [illegible]

Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens" (Oppenheim a. Rh. 1860) Epoche, indem er sämmtliche Ermittlungsmethoden auf dem Gebiete der Sterblichkeitstheorie einer gründlichen Kritik unterzog. Gleichzeitig lieferte er in demselben Werke eine Mortalitätstabelle, welche aus gleichem Materiale das der obenerwähnten Tafel von Heym von 1853 zugrunde liegt, geschöpft und noch sorgfältiger construirt wurde. Eine populär gehaltene Abhandlung über Mortalitätstabellen verdanken wir dem Finanzrath G. Hopf, welche 1866 veröffentlicht wurde. Wilhelm Lazarus schrieb eine kleine aber beachtenswerthe Schrift: „Ueber Mortalitätsverhältnisse und ihre Ursachen" (Hamburg 1867). Professor Wittstein lieferte in seinem Werke: „Mathematische Statistik und deren Anwendung auf Nationalökonomie und Versicherungswissenschaft" (Hannover 1867) eine Mortalitätstabelle aus den Erfahrungen der Hannover'schen Lebensversicherungsanstalt von 1831—1865 und stellte über Mortalitätsermittlung eingehende Untersuchungen an. Dr. H. Scheffler hat 1868 eine sogenannte „Mittlere Sterblichkeitstafel" in seiner Schrift „Sterblichkeit und Versicherungswesen" veröffentlicht. Alle diese Mortalitätstafeln sind jedoch mit Ausnahme derjenigen von Süssmilch-Baumann und Brune ohne praktische Verwerthung für die Lebensversicherung geblieben, da sich die meisten deutschen Gesellschaften lange Zeit hindurch englischer Tafeln bedienten.

Auch Russland und Amerika haben in diesem Zweige der Lebensversicherungsliteratur zu jener Zeit originelle Arbeiten aufzuweisen. Lachmund berechnete eine Tafel nach den Erfahrungen der Petersburger Gesellschaft, und Sheppard Homans eine solche nach den Erfahrungen der „New-York Mutual Life Insurance Company".

Obschon die officielle Populationsstatistik, soweit dieselbe die statistischen Staatsbureaux betrifft, nur wenige brauchbare Resultate für die Lebensversicherungswissenschaft geliefert hat, so sind ihre Ergegnisse dennoch vom Gesichtspunkte dieser Untersuchungen immerhin von grossem Interesse. Das älteste statistische Staatsbureau wurde auf Vorschlag der kgl. schwedischen Akademie der Wissenschaften im Jahre 1748 zu Stockholm errichtet. Seitdem sind erst im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts derartige Bureaux auch in den übrigen europäischen Staaten sowie in Nordamerika errichtet worden. Die Bearbeitung des auf amtlichem Wege gesammelten Materials, besonders was die Mortalitäts- und Vitalitätsverhältnisse anbelangt, ist im Allgemeinen wenig befriedigend. Die ersten officiell-statistischen Schriften über Bevölkerungsverhältnisse, welche zum grossen Theile heute noch bestehen, sind: „Annual Report of Registrar General" (London); „Statistique de la France" (Paris); „Docuuments statistiques, publiés par le departement de l'Interieur" (Brüssel); „Zeitschrift des königl. preussischen statistischen Bureaus", „Jahrbuch für die amtliche Statistik des preussischen Staates", „Preussische Statistik" (Berlin); „Zeitschrift des statistischen Bureaus des kgl. sächs. Ministerium des Innern" (Dresden); „Beiträge zur Statistik des Königreiches Bayern" (München); Beiträge zur Statistik des Grossherzogthums

Hessen", „Mittheilungen der grossherzogl. hessischen Centralstelle für Landesstatistik" (Darmstadt); „Zur Statistik des Königreiches Hannover"; „Beiträge zur Statistik des Grossherzogthum Sachsen-Weimar-Eisenach" (Weimar); „Statistische Nachrichten über das Grossherzogthum Oldenburg"; Beiträge zur Statistik Mecklenburgs" (Schwerin); Zur Statistik des Bremischen Staats; Tafeln und Mittheilungen aus dem Gebiete der Statistik", „Statistische Jahrbücher der Oesterreichischen Monarchie" (Wien); Beiträge zur Statistik des Groherzogthums Baden (Karlsruhe); „Bidrag till Sveriges officiela Statistik", „Statistik Tidskrift, utgifven af kongl. statis. Centralbyrau" (Stockholm); „Statistica del Regno d'Italia", „Annuario Statistico-Italiano" (Turin); „Censo de la poblacion de Espana de 1860, por la Junta general de Estadística", „Annuario Estadístico de Espana" (Madrid); „Statistisches Jahrbuch des russischen Reiches", „Statistische Tabellen des russischen Reiches" (St. Petersburg); „Statistische Tabeller, udgivne af departementet for det Indre" (Christiania); „Statistisk Tabelwoerk" (Kopenhagen). Durch ihre officiellen statistischen Arbeiten über Bevölkerungsbewegung haben sich besonders hervorgethan: Dr. Farr, A. Legoyt, Quetelet, Heuschling, Dr. Engel, v. Hermann, Dr. Weinlig, A. Fabricius und Dr. Berg. Um die officielle Populationsstatistik, namentlich in Bezug auf die Mortalitätsverhältnisse, zu fördern und zwar mittelst Analysis, schrieb Dr. G. F. Knapp eine werthvolle Schrift: „Ueber die Ermittlung der Sterblichkeit" (Leipzig 1868). Unter den halbofficiellen und nichtofficiellen Schriften über die verschiedenen Zweige der Bevölkerungsstatik sind manche von besonderem Interesse für die Lebensversicherungswissenschaft. Dr. Ch. Bernouilli schrieb: „Populationistik oder Bevölkerungswissenschaft" (Ulm 1840) nebst einem Nachtrag (Ulm 1843). Von besonderer Bedeutung war das Werk „Allgemeine Bevölkerungsstatistik" von Wappaeus (Leipzig 1861). Dr. v. Herrmann schrieb sehr gründlich „Ueber die Bewegung der Bevölkerung in Bayern" (München 1853). Dasselbe gilt von Dr. Engel's „Das Königreich Sachsen, Land und Leute" (Dresden 1853) und „Land und Leute des preussischen Staates" (Berlin 1863). Von den vielen ausgezeichneten Schriften des berühmten Quetelet sind besonders hervorzuheben: „Sur l'homme et le développement de ses falcutés, ou essai de physique sociale" (Paris 1853), ferner „Du système social et des lois qui le régissent" (Paris 1848), „Tables de mortalité et leur développement" (Bruxelles 1872) und sein im Vereine mit Heusching herausgegebenes Werk „Statistique Internationale" (Bruxelles 1865). Neison schrieb: „Contributions to vital Statistics" (London 1857). Von Bedeutung sind auch die beiden Zeitschriften: „Journal of the statistical Society" (London) und „Journal de la Société de Statistique" (Paris), welche sehr werthvolle Abhandlungen über Bevölkerungsbewegung enthielten. L. Kramer verfasste das Werk: „Die Mortalitätsverhältnisse der Stadt Halle in der ersten Hälfte des neunzehn[illegible]hrhunderts" (Halle 1855). H. A. Bergmann lieferte „Die Sterblichke[illegible]tnisse der Stadt Magdeburg" (Magdeburg und Leipzig 1858). E. B. [illegible] stat stics. Law of mortality in Massachusetts" (Mont[illegible]

the mortality amongst american assured lives" (London 1858), De Bow „Statistical view of the United States" (Washington 1854), J. Ch. M. Boudin „Histoire statistique de la Colonisation et de la population en Algérie (Paris 1853), A. Wild „Probleme der Statistik im Zusammenhange mit der politischen Rechnungswissenschaft und mit besonderer Berücksichtigung der statistischen Tabellen über Mortalitätsverhältnisse" (München 1862), J. Mann „A Contribution to the medical statistics of life assurance with hints on the selection of lives" (London 1865). Besonders zu erwähnen ist auch die Zeitschrift „Sloet tot Oldhuis, Tijdschrift voor staathuishoudkunde en statistiek". In derselben erschienen mehrere bemerkenswerthe Aufsätze, wie „Over den gemiddelden leeftijd der menschen" (Zwolle 1860), „Jets over levensduur en sterfte etc." von W. T. Sandberg (Zwolle 1863) u. a. Th. Bailey schrieb: „Records on longevity: with an introductory discurse on vital statistics" (London 1857); Beneke verfasste die Schrift: „Mittheilungen und Vorschläge betreffend die Anbahnung einer wissenschaftlich brauchbaren Morbilitäts- und Mortalitätsstatistik in Deutschland, als eines Mittels zur wissenschaftlichen Begründung der Aetiologie der Krankheiten" (Oldenburg 1857). Besonders hervorzuheben ist die Schrift: „The mortality experience of live assurance companies, collected by the Institute of actuaries" (London 1869). A. J. van Pesch lieferte das sehr beachtenswerthe: „Jets over sterftetafels" (Deventer 1867); J. Stark: „Contribution to vital statistics" (Edinburgh 1870). M. Hoek lieferte „Sterftetabellen en sterfte-lijnen voor de gemeente Utrecht" (Utrecht 1867); Fr. A. Walker schrieb: „The vital statistics of the United States" (Washington 1872). Bald darauf erschienen unter dem Titel: „Tables deduced from the mortality experience of life assurance companies as collected and arranged by the Institute of Actuaries of Great Britain and Ireland. With an introduction explanatory of the construction and application of the tables, and an appendix containing a complete system of notation to life contingenties" (London 1872); die sogenannten „Tafeln der 21 englischen Gesellschaften", welche eine epochale Wirkung auf das Gebiet der mathematischen Statistik hervorbrachten, indem sowohl hinsichtlich der Construction der Sterbetafeln im Allgemeinen, als auch bezüglich der statistisch-wissenschaftlichen Anordnung des zugrundeliegenden Materiales daselbst ein bedeutender Fortschritt zu verzeichnen war. Unterdessen begann sich die mathematische Statistik auch mit anderen Gebieten des Versicherungswesens zu befassen. G. Zeuner schrieb das Werk: „Abhandlungen aus der mathematischen Statistik" (Leipzig 1869), welches mathematische Untersuchungen über Sterblichkeit und über Invalidität, sowie mathematische Grundlagen der Unfallversicherung enthielt. H. C. Lombard veröffentlichte die Schrift: „Des lois de la mortalité en Europe dans leur rapports avec les influences athmosphériques" (Paris 1868), in welcher Anhaltspunkte über die Ursachen der örtlichen Verschiedenheit der Mortalität gegeben waren.

Betrachtungen über die wirthschaftlichen Functionen der Banken und deren Entwicklung.

IV.

Ein weiterer Factor, welcher den Zweck hat, der überflüssigen Absorbirung von Circulationsmitteln zu steuern, ist die Institution der Sparcassen. In den minder gebildeten Schichten des Volkes gibt es sehr viele Leute, die in dem Glauben leben, dass die Sicherheit der Ersparnisse nur in baarer Münze gewährleistet ist. Hiedurch wird ein grosser Theil der Umlaufsmittel dem Verkehre entzogen, und auf diese Weise ein Entgang der Nutzungen des auf diese Weise brach liegenden Capitales herbeigeführt, wodurch das Volksvermögen geschädigt wird. Diese kleinen Beträge summiren sich in einem Staate zu grossen Capitalien, welche mit Hilfe der Institution der Sparcassen der productiven Anlage zugeführt werden. Sparcassen sind daher Institute, in denen kleine Baarbeträge deponirt und bei kurzen Kündigungsfristen zinslich angelegt werden können. Ihr Zweck besteht also nicht in der bankmässigen Fructification grosser Capitalien, sondern bloss in dem Bestreben, den Sparsinn des Volkes anzuregen und durch den Vortheil des Zinsengenusses, der Gewohnheit desselben, seine Ersparnisse in baarer Münze unproductiv liegen zu lassen, entgegenzuwirken. Um ihrer Aufgabe in diesem Sinne entsprechen zu können, müssen die Sparcassen derart eingerichtet sein, dass der Einleger über sein Capital zu jeder beliebigen Zeit oder bei kurzer Kündigung Verfügen kann, wodurch dem Volke das Bewusstsein des unbeschränkten Verfügungsrechtes über dessen Eigenthum ungeschmälert aufrechterhalten wird.

Von nicht minder grosser Bedeutung sind in dieser Hinsicht die Institutionen der Depositenbanken und des Contocorrent-Geschäftes. Jedes Geschäft, jede wirthschaftliche Thätigkeit überhaupt, erfordert einen Baarfond. Der Kaufmann muss einen baaren Cassabestand haben, um aus demselben seine Bedürfnisse, die Gehalte für sein Dienstpersonal und die Einlösung von Wechselzahlungen bestreiten zu können. Um nun diesen Betrag nicht unproductiv liegen zu lassen, wird derselbe in Form eines Depositums in der Weise hinterlegt, dass man über denselben zu jeder Zeit verfügen kann, wobei der hinterlegte Betrag nach Massgabe seines jeweiligen Umfanges in mässiger Weise verzinst wird. Dieses Geschäft wird nun von den Einlagebanken (Depositenbanken) betrieben. Da nämlich immer nur ein Theil des Depositums thatsächlich in Anspruch genommen wird, so ist die Bank in der Lage, den übrigen Theil desselben nutzbringend zu verwerthen. Lässt nun der Deponent seine Zahlungen directe durch die Bank leisten und überträgt ihr zu gleicher Zeit, die Eincassirung von Beträgen bei seinen Schuldnern, so wird ihm ein Conto eröffnet, welches durch die Wiederholung derartiger Aufträge for-

laufend berücksichtigt werden muss. Aus dem fortlaufenden Charakter eines solchen Contos ist der Name „Conto corrente“ entstanden.

Die Depositenbanken haben sich im Laufe der Zeit aus der ursprünglichen Form der Girobanken herausgebildet und kommen in verschiedenen Formen in Betracht. Diejenigen, welche das sogenannte Aufbewahrungsgeschäft betreiben (Safe depositories), indem sie die einfache Aufbewahrung von Werthgegenständen, „verschlossene Depots“ oder Depositen zur Verwaltung „offene Depots“ gegen eine entsprechende Gebühr übernehmen, sind aus dem Bedürfnisse entstanden, die Sicherheit des Besitzes zu erhöhen und ohne zu grosse Kosten für den einzelnen, Anstalten zum Schutze des Eigenthums zu treffen. Es ist dies einer jener Nebenvortheile, welchen ursprünglich die Girobanken den Kaufleuten gewährten. Durch Schaffung von Depositenbanken wurden diese Vortheile nun auch dem Privatbesitze zugänglich. Die Verwaltung der offenen Depots wurde auch auf die Controle der Werthpapiere hinsichtlich ihrer Einlösung, sowie Einziehung fälliger Zinsen und Beschaffung neuer Couponbogen gegen Hingabe der Talons ausgedehnt und so entwickelte sich auf diese Weise eine neue Form der Bankinstitution, welche in ihrem Wesen einem wichtigen Bedürfnisse Rechnung zu tragen berufen ist. Eine weitere Art der Depositen bilden die uneigentlichen Depositen zur Benützung (Depositum irregulare), deren Wesen darin besteht, dass die Banken die hinterlegten Summen geschäftlich zu verwenden berechtigt sind. In dieser Form, welche mit einem ausgedehnten Giro- und Contocorrentgeschäfte in Verbindung gebracht wird, concentrirt sich die Hauptthätigkeit der heutigen Depositenbanken. Diese letztere Art des Depositengeschäftes hat ihren Ursprung in England und hat sich daselbst auch zu einer besonderen Vollkommenheit herausgebildet, so dass sie in neuerer Zeit am europäischen Continente eifrige Nachahmung findet.

In England gibt es in dieser Beziehung zweierlei Formen von Bankgeschäften. Die einen betreffen, so wie die Geschäfte des Continentes, Staatsanleihen und sonstige Creditoperationen, sowie Geschäfte mit fremden Wechseln und Geldsorten. Die betreffenden Bankiers und Bankinstitute führen den Namen „foreign bankers“ (ausländische Bankiers). Die zweite Form ist diejenige der „local bankers“ (Localbankiers), deren Thätigkeit sich lediglich darauf beschränkt, für ihre Kunden das Ausgeben und Einnehmen des Geldes zu besorgen. Dieselben bewahren ihren Committenden die baaren Cassenvorräthe und entlasten diese demzufolge der Mühe und des persönlichen Risicos. Der Committent dagegen mehrt sein Guthaben durch baare Einzahlungen und durch Ueberweisung einzuziehender und gutzuschreibender Forderungen an den Bankier, wie auch durch fällige, von Dritten zu honorirende Wechsel und Checks, während er andererseits über sein Guthaben stets schriftlich verfügt, u. zw. entweder durch Ausstellung von Checks oder dadurch, dass er seine Accepte bei dem Bankier zahlbar macht. Für seine Dienste erhält der Bankier keine Bezahlung, sondern sein Vortheil besteht darin, dass er die ihm überwiesenen Geldbestände, soweit dieselben nicht bereit

gehalten werden müssen, nutzbringend verwerthen kann. Während ferner der Committent alle seine Bankgeschäfte, wie Lombard, Wechselescompte etc. durch seinen stetigen Bankier besorgen lässt, erwächst ihm andererseits der Vortheil, dass der Bankier seine Verhältnisse näher kennen lernt und Anderen zuverlässige Auskunft über dieselben ertheilen kann.

Im Allgemeinen bilden daher die Depositenbanken eine wichtige wirthschaftliche Einrichtung, indem sie zu einer Geschäftsvereinfachung führen und für ihre Committenten die Zahlungsaufträge durch Umschreiben, also auf dem Wege des Giro vollziehen, zugleich den gesammten Geldverkehr derselben besorgend.

Gleichzeitig mit dieser Form des Bankwesens entwickelten sich im Laufe der Zeit auch die anderen Arten dieser Institution heraus, die verschiedensten Gebiete des Geld- und Creditverkehres in ihren besonderen Bereich ziehend. Eine wichtige Form der Bankinstitution bilden diesbezüglich die Zettelbanken oder Notenbanken, deren Wesen darin besteht, dass sie unverzinsliche Scheine (Banknoten) ausgeben, gegen deren Rückgabe dem jeweiligen Inhaber die sofortige Auszahlung der entsprechenden Summe zugesichert wird, wodurch es möglich wird, dieselben wie Metallgeld als Umlaufsmittel im Verkehre zu benützen. Die Banknoten sind aus den übertragbaren Depositenscheinen entstanden, wie solche in früheren Jahrhunderten von den Girobanken oder auch von Goldschmieden (englische Goldsmith notes) bei denen Werthe hinterlegt waren, ausgestellt wurden. Die erste Bank, welche derartige Scheine ausgab, war im Jahre 1668 die Bank in Stockholm, doch erlangten dieselben grössere Bedeutung erst im Laufe des 18. und 19. Jahrhundertes, und zwar in Folge des Umstandes, dass sie für die Bank ein unverzinsliches Anlehen zu bilden geeignet waren und auf diese Weise derselben besondere Vortheile gewährten, andererseits jedoch auch für den Geldverkehr sich in verschiedener Art nützlich erwiesen. Nicht nur deren leichtere Handhabung im Verkehre, sondern auch deren goldersparender Zweck war Ursache, dass sie sich im Laufe der Zeit zu einer der wichtigsten wirthschaftlichen Einrichtungen emporschwingen konnten.

Eine weitere, den Bedürfnissen des Handelscredites Rechnung tragende Form des Bankwesens bilden die Disconto- oder Escomptebanken. Dieselben haben sich im Laufe der Zeit zu einer vollständigen Form des Bankbetriebes erst herausgebildet, nachdem lange vorher die eigentliche Thätigkeit derselben, der Wechselescompte in den Händen von Privatcapitalisten sich befunden hatte und später von den Giro- und Depositenbanken als Nebenzweig cultivirt worden war. Erst als die Notenbanken durch staatliche Privilegien ausgestattet, die Pflicht übernahmen, den Handelscredit durch entsprechende Einrichtungen zu fördern und auf diese Weise die Weiterbegebung (Reescompte) der Wechsel unter günstigen Bedingungen möglich war, wurden selbständige Discontobanken in's Leben gerufen, welche wohl auch andere Geschäfte betreiben, sich jedoch mit diesem speciellen Zweige des Bankwesens besonders befassen, mit der Förderung des Wechselcredites

eine entsprechende Verzinsung ihres Capitales verbindend und im Falle knapper Geldmittel aus der Differenz zwischen den erzielten Discontzinsen und den zu leistenden Reescomptzinsen ihren Gewinn ziehend.

Im Allgemeinen kommen reine Discontobanken selten vor; vielmehr bildet das Discontiren regelmässig nur einen Zweig der Thätigkeit einer Bank neben anderen Geschäften. Namentlich sind die Noten- und Depositenbanken gleichzeitig Discontobanken, indem Banknoten sowie Capitalien, welche durch die anderen Geschäftszweige der Anstalt zufliessen, für den Ankauf von Wechseln verwendet werden. Aber auch fast alle anderen Banken betreiben das Discontogeschäft wenigstens zeitweise, um Baarbestände nutzbringend anzulegen. Dieser Zweck wird auch zeitweise erreicht durch Lombardiren. Diesem Geschäftszweige, so genannt, weil lombardische Kaufleute dasselbe zuerst betrieben, widmen sich speciell die Leihbanken (Lombardbanken). Vorläufer derselben waren die öffentlichen Leih- und Pfandanstalten. Dieselben gewährten Darlehen auf Faustpfand gegen Verpfändung beweglicher, leicht verkäuflicher Gegenstände, insbesondere edler Metalle, Geldeffecten und Waaren. Und in dieser Form hat sich der Lombard auch bis in unsere Zeit erhalten. Während sich nun diese Banken mit der Creditgewährung auf bewegliches Eigenthum befassen, bilden die Hypotheken- oder Bodencreditbanken diejenigen, welche den Credit auf unbewegliches Eigenthum, also gegen Verpfändung von Immobilien, cultiviren. Die Hypothekenbanken haben sich aus dem, den landwirthschaftlichen Creditvereinen zu Grunde liegenden Principe in der letzten Hälfte unseres Jahrhundertes herausgebildet. Während jedoch diese nur dem landwirthschaftlichen Grundbesitz, und zwar meistens nur dem grösseren, Credit verschaffen, belehnen die Hypothekenbanken hauptsächlich städtische Wohngebäude.

An diese reihen sich nun die Rentenbanken, welche in unseren Ländern zur Erleichterung der Ablösung von Grundlasten errichtet wurden, sowie die Landescultur-Rentenbanken, welche durch Ausgabe von Rentenbriefen (Pfandbriefen) den Interessenten die für Entwässerungen und Meliorationen nöthigen Geldmittel beschaffen. Diesen schliessen sich in neuerer Zeit die Eisenbahn-Rentenbanken an, deren Zweckes ist, kleineren Eisenbahn-Unternehmungen durch Ausgabe von Prioritäts-Pfandbriefen die nöthigen Mittel zu beschaffen.

Eine weitere Form der Bankinstitution bilden die Creditbanken (Mobilarbanken oder Credits mobiliers). Dieselben gewähren und vermitteln nicht allein Credit in jeder Form, auch ohne besonders sichere Unterlagen, sondern sie befassen sich auch mit Speculation in Werthpapieren auf eigenes Risico. Sie führen fähigen Unternehmern, beziehungsweise aussichtsreichen Unternehmungen Capital zu nnd befassen sich auch zugleich mit der Vermittlung und Begebung von Staatsanlehen und sonstigen ähnlichen Geschäften. Diese Banken machen ihre Geschäfte mehr mit dem, was sie als Anlagecapital besitzen, als mittelst des Credites, den sie nehmen. Diesen reihen sich schliesslich die Maklerbanken eine Abart von Mobilarbanken an, welche sich jedoch bloss auf die Vermittlung von Börsespeculationen beschränken.

Die Sterblichkeits-Statistik, ihre Entwicklung und Anwendung für die Construction von Sterbetafeln.

IV.

Die letzten dreissig Jahre haben auf diesem Gebiete der Lebensversicherungs-Wissenschaft eine sehr reichliche und bedeutende Literatur hervorgebracht. Nicht bloss die Sterblichkeits-Statistik, sondern auch eine neue Disciplin, die Invaliditäts-Statistik hat manchen nennenswerthen Erfolg zu verzeichnen.

Jene in dieser Zeit erschienenen Schriften sind folgende: Aug. Wiegand verfasste die Werke: „Die Mortalitäts- und Invaliditäts-Statistik bei Eisenbahnbeamten“ (Halle 1869), ferner „Die Sterblichkeits-, Invaliditäts- und Krankheits-Statistik bei Eisenbahnbeamten“ (Berlin 1871), welche in Fachkreisen besonderes Interesse erregten und für die Invaliditäts- sowie Pensionsversicherung von grundlegender Bedeutung wurden. Im Jahre 1869 lieferte J. Meikle die Tafeln der Schottischen Gesellschaften: „Observation on the rate of medality of assured lives, as experienced by ten Assurance Companies in Scotland“. S. Brown schrieb: „On the Application of the binominal law to statistical enquiries, illustrated by the law of the growth of man at different ages“ (London 1871); J. C. Chenu: „De la moralité dans l'armée et de moyens d'économiser la vie humaine“ (Paris 1870); Caccialupi verfasste das Werk: „Cittadinanza e domicilio, stato civile e statistica demographica“ (Milano 1867). K. Becker schrieb: „Zur Berechnung der Sterbetafeln und an die Bevölkerungsstatistik zu stellende Anforderungen“ ein Gutachten über die Unterlagen, welche die Statistik zu beschaffen hat, um richtige Mortalitätstafeln zu gewinnen. (Berlin 1874).

Joh. Conrad gab das Werk heraus: „Beitrag zur Untersuchung des Einflusses von Lebensstellung und Beruf auf die Mortalitätsverhältnisse, auf Grund des statistischen Materiales zu Halle a. S. von 1855–74“ (Jena 1877); J. Körösi schrieb: „Welche Unterlagen hat die Statistik zu beschaffen, um richtige Mortalitäts-Tabellen zu gewinnen?“ (Berlin 1874); W. Küttner „Zur mathematischen Statistik“ (Leipzig 1881); J. Lewin „Bericht über die zur Berechnung von Sterbetafeln an die Statistik zu stellenden Anforderungen“ (Budapest 1876). W. Lexis verfasste die Werke: „Einleitung in die Theorie der Bevölkerungs-Statistik“ (Strassburg 1876); und „Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft“ (Freiburg i. B. 1877); H. F. Lund „La Construction des Tables de mortalité à l'aide des données de la statistique générale“ (Copenhague 1875); A. G. Mackenzie „Note on war mortality in recent campaigns with special reference to the german experience in the war of 1870–1871“ (London 1881); J. Meikle schrieb: On the official publiations of the mortality of assured lives“ (Edingburgh 1885); J. G.

Richardson „La longevité et moyens de l'acquéreur“ (Paris 1884); D. J. A. Samot „De algemeene sterftetafels der nationale levensverzekeringbank“ (Amsterdam 1877). Im Jahre 1883 erschienen „Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von dreiundzwanzig Lebensversicherungs-Gesellschaften, veröffentlicht im Auftrage des Collegiums für Lebensversicherungs-Wissenschaft zu Berlin“. Die Executiv-Commission bestand aus den Herren Dr. Zillmer, Dr. Langheinrich, G. Hartmann, Gerkrath und Buro. Ausgeglichen sind die Tafeln von Dr. A. Zillmer, der auch die Anregung zu deren Aufstellung gegeben hat. Zu dieser Zeit erschien eine von H. Westergaard verfasste Schrift „Die Lehre von der Mortalität und Morbilität“, Antropologisch-statistische Untersuchungen (Jena 1882). Abr. Joh. Vervey schrieb „De waarnemingen der bevolkings-statistiek“ und „Principles of vital statistics (Deventer 1874, 1875); Moheau „Rechercher et considérations sur la population de la France“ (Paris 1878); Baudrillart verfasste „Les populations agricoles de la France“ (Paris 1885). Von A. Eminghaus wurden herausgegeben „Mittheilungen aus der Geschäfts- und Sterblichkeits-Statistik der Lebensversicherungsbank für Deutschland zu Gotha für die fünfzig Jahre von 1829 bis 1878“ (Weimar 1880); G. Behm schrieb „Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- und Morbilitätsverhältnisse bei dem Beamtenpersonal der deutschen Eisenbahn-Verwaltungen“, mit Nachträgen pro 1881 und 1883 (Berlin 1886). In diese Zeit fällt auch das Erscheinen der Werke: „Ausgeglichene Absterbeordnung, Mortalitätstafel und Tafel der Lebenserwartung für die Gesammtbevölkerung des preussischen Staates“, herausgegeben vom königl. preuss. statistischen Bureau in Berlin; sowie A. Morgerbesser: „Versuch zur Aufstellung von Sterblichkeits- und Invaliditäts-Tafeln für preussische Bergleute bearbeitet (Berlin 1881).

Von besonderer Bedeutung sind die „Tafeln der dreissig amerikanischen Gesellschaften“, welche im Jahre 1881, veröffentlicht wurden. Im Jahre 1890 erschienen die Tafeln der vier französischen Gesellschaften im „Moniteur des assurances“ abgedruckt. Dieselben sind nach den Anweisungen von E. Kertanguy angefertigt; J. M. J. Leclere gab im Jahre 1894 die belgischen Sterblichkeitstafeln heraus. Schliesslich sind noch zu erwähnen die Sterblichkeitstafeln für Männer, Wittwen, verheiratete Frauen und Kinder, die in der „Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Wittwen-Societät“ von Joh. Karup vorkommen (1893); sowie die Sterblichkeitstafel von A. J. van Pesch, die in den Beiträgen des statististischen Instituts (Haag 1890) veröffentlicht ist und auf dem Material der Holländischen Societät der Lebensversicherung, besonders aber auf den Beobachtungen der Leibrentner beruht.

Sterbetafeln für Dienstuntaugliche haben hergeleitet Kaan, Caron, Küttner, Gerkrath, Wiegand, Behm, Kinkelin und Zimmermann. Im Berichte, welchen Kaan „über die im Auftrage des Ackerbauministers vorgenommenen Berechnungen betreffend die österreichischen Bruderladen“ (1885) erstattet, sind für die österreichischen Bergarbeiter die Sterbenswahrscheinlichkeiten der Dienstuntauglichen mitgetheilt; die der preussischen Berg-

arbeiter von Caron in seiner Schrift „die Reform des Knappschaftswesens und die allgemeine Arbeiterversicherung“ (Berlin 1882); Küttner „die Invalidität und Invaliditätsversicherung der Steinkohlenbergleute“ in das Zeitschrift für Berg-, Hütten- und Salinenwesen 1881 gibt die entsprechenden Werthe für die in Frage stehenden Arbeiter; Wiegand und Behm lieferten dieselben in den bereits genannten Werken; Gerkrath in seiner Schrift „Ueber die Höhe der Beiträge für die Arbeiterversicherung“ (Berlin 1881); Kinkelin in einem ungedruckten Gutachten über die Hilfscassen der Jura-Bern-Luzern-Bahn; und Zimmermann in seinen beiden Schriften: „Ueber Dienstuntauglichkeits- und Sterbens-Verhältnisse“ (Berlin 1886) und „Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeits- und Sterbens-Statistik“ (Berlin 1888).

Die hauptsächlichsten Sterbetafeln, welche die meiste Verwendung bei Lebensversicherungs-Gesellschaften gefunden haben und zur Zeit noch finden, sind folgende:

Deparcieux Tafeln für Rentner, von Florencourt verbessert (1781).

Die Northamptom-table von Dr. Price (Observation on reversionary Payments, 1783), später von Dr. Farr nach einer genaueren Methode verbessert.

Die Carlisle-table von Milne (Treatise an the valuation of annuities, 1815).

Die Duvillard-Tafeln (Analyse de l'influence de la petite vérole sur la mortalité, 1806).

Die Tafeln von Demontferrand über die ganze Bevölkerung Frankreichs (1832).

Die Tafeln der Equitable Society von G. Davies (1825), Ch. Babagge (1826) und A. Morgan (1834).

Die Tafeln der 17 englischen Gesellschaften (1843).

Die Tafeln von Finlaison nach Tontinen in England und Irland (1829 und 1860) (Tontines and Life Annuities, Report and Observations on the mortality on the Gouvernment Annuitants).

Die Tafeln von A. J. Finlaison (dem Sohne des vorgenannten) (Life Annuities, Report on the mortality of Gouvernment Life annuitants).

Die Tafeln der Schottischen Gesellschaften (Observations on the rate of mortality of assured lives, as experienced by ten assurance Companies in Scotland) 1869 von J. Meikle.

Die Tafeln der 20 englischen Gesellschaften (Tables deduced from the Mortality Experience of Life Assurance Companies, 1872) nach einem grossen Material aufgestellt und ausgeglichen von W. S. B. Woolhouse, herausgegeben im Auftrage des „Institute of Actuaries of Great-Britain and Ireland“. Die im genannten Buche enthaltenen Sterblichkeitstafeln sind folgende:

Tafel H^M (Healthy male Lives — gesunde männliche Leben).
„ H^F (Healthy female Lives — gesunde weibliche Leben).
„ H^{MF} (Healthy male and female Lives — gesunde männliche und weibliche Leben).

Tafel $H^{M(5)}$ (Healty male Lives, omitting the first five years of assurance — gesunde männliche Leben, unter Weglassung der ersten 5 Jahre der Versicherung).

Diese Tafeln werden noch ergänzt durch die Select Mortality Tables von F. B. Sprague.

Die englischen Life tables von Dr. Farr (1864).

Die Tafeln von Brune, von Heym, von Fischer nach der Preussischen Wittwen-Verpflegungs-Anstalt in Berlin.

Die Tafeln der 30 amerikanischen Gesellschaften (1881).

Die deutschen Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungs-Gesellschaften, veröffentlicht im Auftrage des Collegiums für Lebensversicherungs-Wissenschaft zu Berlin (1883). Die Tafeln sind ausgeglichen von Dr. Zillmer und unterscheiden sich folgendermassen:

Tafel M I. (Normal versicherte Männer mit vollständiger ärztlicher Untersuchung).

" W I. (Normal versicherte Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung).

" M. u. W I. (Normal versicherte Männer und Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung).

" M II. (Gegen erhöhte Prämien versicherte Männer mit vollständiger ärztlicher Untersuchung).

" W II. (Gegen erhöhte Prämien versicherte Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung).

" M. u. W II. (Gegen erhöhte Prämien versicherte Männer und Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung).

" M III. (Männer mit unvollständiger ärztlicher Untersuchung, [Sterbecassen-Versicherung]).

" W III. (Frauen mit unvollständiger ärztlicher Untersuchung, [Sterbecassen-Versicherung]).

" M u. W III. (Männer und Frauen mit unvollständiger ärztlicher Untersuchung, [Sterbecassen-Versicherung]).

In diesem Werke ist ausführlich das Wesen der Aufstellung der Sterblichkeitstafeln dargestellt.

Die Tafeln der 4 französischen Gesellschaften (Assurances Generales, Union, Nationale, Phénix.) (1890).

Tafel R F (Rentiers français, table de mortalité des rentiers viagers).

Tafel A F (Assurés français, table de mortalité en cas de decés).

Bei beiden sind die Geschlechter zusammengefasst.

Die belgischen Sterblichkeitstafeln von J. M. J. Leclere (1894).

Als Tafeln entstanden aus der Beobachtung engerer Kreise sind noch zu erwähnen die Tafel von Beauvisage nach den Tontinen von Lafarge (1867), die American Experience Table von Homan (1868) und die Tafel der Lebensversicherungsbank zu Gotha (1880).

Das mathematische Gesetz der Fehler-Wahrscheinlichkeit.

Bei den mathematisch-statistischen Untersuchungen spielt die Frage der Ermittlung der Fehler-Wahrscheinlichkeit eine wichtige Rolle. Die Statistik ist eine Wissenschaft der neueren Zeit, das Genie der Alten hat sich solchen mehr präcisen Untersuchungen nicht gern zugewandt, es fehlten ihnen die Mittel der Aufsuchung und Mittheilung, und scheinen sie auch, was bei ihren mannigfachen philosophischen Speculationen noch auffallender ist, von der Existenz eines Principes der Compensation, vermöge dessen der Einfluss regelmässiger und permanenter Ursachen über die unregelmässigen und zufälligen Ursachen zuletzt immer das Uebergewicht bekommt, keine Ahnung gehabt zu haben. In unseren Tagen hingegen hat die Statistik eine fast übermässige Ausdehnung erfahren, so dass man sich mehr vor übereilten und unstatthaften Anwendungen zu hüten hat, welche diese Wissenschaft in Misscredit bringen. Die Zeit ist nicht ferne, wo genaue und zuverlässige Beobachtungsdaten die sichere Grundlage aller, die sociale Organisation betreffenden Theorien bilden werden.

Unter Statistik versteht man jene Wissenschaft, deren Wesen darin besteht, zahlreiche, beobachtete Thatsachen oder Erscheinungen irgend einer Art zu sammeln und derart zu coordiniren, dass man Zahlenverhältnisse erhält, welche nahezu constant oder von den Anomalien des Zufalles unabhängig sind, so dass sie auf die Existenz regelmässiger Ursachen hinweisen.

Da es nun nicht möglich ist, bei solchen Beobachtungen stets gleiche Verhältnisse und Umstände zu berücksichtigen, so ergeben sich naturgemäss, selbst bei Registrirung einer bedeutenden Anzahl beobachteter Fälle, Unregelmässigkeiten, welche als Beobachtungsfehler aufgefasst, auf mathematischen Wege einer Correctur unterzogen werden müssen.

Es ist daher von nicht geringem Interesse, diejenige mathematische Form, welche das Gesetz der Fehler-Wahrscheinlichkeit darstellt, in Wesen und Ursprung näher kennen zu lernen. Die Form, deren Ableitung nach verschiedenen Arten möglich ist, lautet:*)

$$\frac{2}{h^2}\, e^{-\frac{r^2}{h^2}}\, r\, d\, r$$

worin r den Beobachtungsfehler und h eine Constante darstellt, welche die mehr oder weniger grosse Genauigkeit der Beobachtung kennzeichnet.

Was die Fehler betrifft, welche bei einer Beobachtung sich ergeben können, so gelten für deren Möglichkeit folgende grundlegende Lehrsätze:

*) Siehe Navier: „Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung“, II. Bd., pag 122.

a) Die Wahrscheinlichkeit der positiven und negativen Fehler ist gleich gross. — Beim Messen einer Länge ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers, entstanden durch kürzere Messung, gleich gross mit derjenigen eines Fehlers, entstanden durch längere Messung.

b) Die Wahrscheinlichkeit der kleineren Fehler ist grösser als diejenige der grösseren. — Wird eine Länge von wenigen Centimetern gemessen, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von einem Zehntel-Millimeter grösser als diejenige eines Fehlers von einem ganzen Millimeter.

c) Die Wahrscheinlichkeit grosser Fehler ist gleich Null. — Wird eine Länge von wenigen Centimetern gemessen, so ist die Wahrscheinlichkeit um einen ganzen Centimeter zu fehlen, gleich Null, da solches bei gewöhnlicher Achtsamkeit vermieden werden kann.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass irgend ein Fehler zwischen x und $x + \Delta x$ liegt, wobei $lim\ \Delta x = 0$, ist proportional der Grösse Δx.

Darnach kann man also die Wahrscheinlichkeit, dass irgend ein Fehler zwischen x und $x + \Delta x$ fällt, ausdrücken durch das Product

$$1) \qquad \varphi(x^2)\, \Delta x$$

und da nothwendigerweise jeder Fehler zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegen muss, so ergibt sich als erste Bedingung, welcher die bisher unbekannte Function φ Genüge leisten muss, in diesem Falle

$$2) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x^2).\, dx = 1$$

das heisst: „Die Wahrscheinlichkeit ist gleich 1, beziehungsweise, es besteht die Sicherheit, dass der Fehler zwischen diese unendlichen Grenzen fallen muss.

Nun ist es weiter von Interesse, wie die Beschaffenheit der Function φ ermittelt werden kann. In dieser Hinsicht gibt es verschiedene Methoden. Eine der originellsten ist diejenige, welche die beiden englischen Physiker W. Thomson und P. G. Tait in ihrem Werke der theoretischen Physik zu Ende der Siebzigerjahre publicirten. Diese mag nun hier zur Darstellung gelangen.

Stellen wir uns vor, dass ein materieller Punkt aus einer gewissen Höhe auf einen bestimmten Ort, in eine bestimmte Lage fallen gelassen wird. Führen wir nun in dieser Lage ein rechtwinkeliges Coordinatensystem auf, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass dieser materielle Punkt in eine zwischen x und $x + \Delta x$ liegende Entfernung von der Ordinatenaxe fällt

$$\varphi(x^2).\ \Delta x$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass derselbe in eine zwischen y und $y + \Delta y$ liegende Entfernung von der Abscissenaxe fällt

$$\varphi(y^2).\ \Delta y$$

sein. Da nun beide Eventualitäten von einander unabhängig sind, so wird infolgedessen die Wahrscheinlichkeit, dass dieser materielle Punkt innerhalb

des elementären Rechteckes $\Delta x \,.\, \Delta y$ zu fallen kommt, durch das Product der beiden vorhergehenden Wahrscheinlichkeiten

$$\varphi(x^2) . \varphi(y^2) . \Delta x . \Delta y$$

zum Ausdrucke gelangen.

Legen wir weiter durch denselben Anfangspunkt ein anderes rechtwinkeliges Coordinatensystem, so erhalten wir für die gleiche Wahrscheinlichkeit den Ausdruck

$$\varphi(x_1^2) . \varphi(y_1^2) . \Delta x_1 . \Delta y_1$$

da es und klar ist, dass demzufolge

$$\Delta x . \Delta y = \Delta x_1 . \Delta y_1$$

sich ergibt, so folgt die Functionalgleichung

$$\varphi(x^2) . \varphi(y^2) = \varphi(x_1^2) . \varphi(y_1^2)$$

welche der Beschaffenheit der Function φ Genüge leisten muss, wobei gleichzeitig die Gleichung

$$x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2$$

Geltung besitzt. Um nun obige Functionsgleichung leichter lösen zu können, nehmen wir vorderhand an, dass $x_1 = 0$, so dass sich für die letztere Gleichung der Ausdruck

$$y_1^2 = x^2 + y^2$$

ergibt. Substituirt man nun diesen Werth in die Functionalgleichung, so resultirt die Relation

$$\varphi(x^2) . \varphi(y^2) = \varphi(0) . \varphi(x^2 + y^2)$$

welche einmal nach x und einmal nach y derivirt, die beiden Gleichungen

$$\varphi'(x^2) . \varphi(y^2) = \varphi(0) . \varphi'(x^2 + y^2)$$

und $$\varphi(x^2) . \varphi'(y^2) = \varphi(0) . \varphi'(x^2 + y^2)$$

liefert, woraus

$$\frac{\varphi'(x^2)}{\varphi(x^2)} = \frac{\varphi'(y^2)}{\varphi(y^2)} = a$$

hervorgeht, wobei a eine constante Grösse bezeichnet. Integrirt man schliesslich diesem Ausdruck, so ergibt sich

$$\varphi(x^2) = c . e^{b x^2}$$

worin b und c constante Grössen darstellen, welche erst näher zu bestimmen sind.

Da nun ferner die Wahrscheinlichkeit eines grösseren Fehlers kleiner ist, so muss b negativ sein, wenn obige Form der Anforderung Genüge leisten soll. Desshalb ist es angezeigt

$$b = -\frac{1}{h^2}$$

zu setzen, so dass der Werth h dann den Genauigkeitsgrad der Beobachtung anzeigt. Infolge dessen übergeht die letztere (von der Form

3) $$\varphi(x^2) = c\,e^{-\frac{x^2}{h^2}}$$

wodurch die Beschaffenheit der Function φ vollständig gekennzeichnet erscheint.

Wird nun dieser Werth in die Formel 2) substituirt, so ergibt sich

$$c\,.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{h^2}}\,dx = 1 = c\,.\,h\,.\,\sqrt{\pi}$$

woraus hervorgeht, dass der Integrationswerth der Constante

4) $$c = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

ist. Benützt man daher die Formen 3) und 4), erhält man anstatt des Ausdruckes 1) die Form

$$\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{h^2}}\,.\,\Delta x$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass bei irgend einer Beobachtung der Fehler x gemacht wurde.

Zieht man also bloss die Abweichung von jenem Punkte in Betracht, in welchen der materielle Punkt treffen soll, ohne auf die Richtung dieser Abweichung Rücksicht zu nehmen, so wird das Gesetz der Fehler-Wahrscheinlichkeit ausgedrückt durch das Integrale

$$\frac{4}{\pi h^2}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{r}^{r+dr} e^{-\frac{r^2}{h^2}}\,r\,.\,dr\,.\,d\varphi = \frac{2}{h^2}\int\limits_{r}^{r+dr} e^{-\frac{r^2}{h^2}}\,r\,.\,dr$$

Das Gesetz der Wahrscheinlichkeit wird daher allgemein dargestellt durch die Formel

$$\frac{2}{h^2}\,e^{-\frac{r^2}{h^2}}\,r\,.\,dr$$

was auch dadurch bestätigt wird, dass der Grenzwerth des Integrales durch die Relation

$$\frac{2}{h}\,.\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{h^2}}\,r\,dr = 1$$

zur Darstellung gelangt.

Die Sterblichkeits-Statistik, ihre Entwicklung und Anwendung für die Construction von Sterbetafeln.

V.

Von hoher Bedeutung sind diesfalls besonders die Fortschritte hinsichtlich der Ausgleichung der Sterbetafeln, deren Methoden eine stetige Entwicklung aufweisen. Die aus der Beobachtung abgeleiteten Sterbenswahrscheinlichkeiten leiden oft noch an Unregelmässigkeiten, die grösstentheils auf die relativ unzureichende Anzahl von Beobachtungen zurückzuführen sind. Es ist daher nothwendig, dergleichen Unregelmässigkeiten auszugleichen, um einen regelmässigen Verlauf der Tafeln zu erzielen, welcher nach dem mathematischen Absterbegesetze thatsächlich sich ergeben muss. Der bereits genannte Dr. Ph. Fischer war der erste, der die Sterbenswahrscheinlichkeiten graphisch einer Correctur unterzog und dieselben dann durch Rechnung auszugleichen versuchte, ohne jedoch irgend ein Gesetz vorauszusetzen (1860). In der Folge befassten sich mit dieser Frage Finlaison, Wittstein, Woolhouse, Higham sowie Gompertz und Makeham, welche sämmtlich die Ausgleichung der Sterbetafeln nach mathematischen Gesetzen anstrebten. Von besonderer Bedeutung ist hauptsächlich die Makeham'sche Hypothese von der Sterbe-Intensität, welche bis in die jüngste Zeit praktische Anwendung fand. Infolge Darstellung der Wahrscheinlichkeitscurven durch geschlossene mathematische Functionen wurde diese Frage schliesslich endgiltig gelöst.*)

Es sei diesbezüglich auf die in der VIII. Lieferung, pag. 47 dargestellten Formen 2) und 3) verwiesen, welche die Curve der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten und auf pag. 61 die Formen 18), welche die Curve der Lebenden allgemein zum Ausdrucke bringen.

Da dieselben transcendenter Natur sind, so ist es nothwendig, bei jeder auszugleichenden Sterbetafel die zugehörigen Constanten auf dem Wege der Annäherung festzustellen.

Dies ist wohl geeignet, den Ausgleichungsprocess etwas zu erschweren, jedoch entschädigt hiefür das mathematisch vollkommen verlässliche Resultat, welches auf diesem Wege erreicht wird. Der Verlauf einer jeden beliebigen Sterbetafel gelangt auf diese Weise durch eine geschlossene analystische Curvengleichung zur Darstellung, so dass die Ausgleichung nicht bloss näherungsweise, sondern mathematisch exact ausgeführt erscheint.

*) Siehe „Die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden als Element einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und die hieraus entspringenden Conclusionen", VIII. Lieferung.

Für den Näherungsprocess bei Bestimmung der Constanten sind für die Curve der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten, nachstehende Formen von Bedeutung:

1) $$\frac{t^{\frac{1}{18}} e^{-\frac{1}{6t}}}{(t-3)^{\frac{5}{9}}} = \tau$$

2) $${}^{1}\frac{4\,(w_x - a)}{x + 2\,C} = b \,.\, \frac{1 - t^2}{2t}$$

3) $$C_1 = \frac{1}{8}\,\frac{x_p - x_q}{\tau_p - \tau_q}$$

Ferner die Darstellung dreier Punkte der Curve, nämlich des Anfangspunktes ($x = 0$), des Wendepunktes ($t = 1$) und des Tiefpunktes ($w_x = 0$), für welche der Werth von τ constant ist, d. h.:

$$\text{für } x = 0 \text{ ist } \tau = \frac{2\,C}{8\,C_1}, \qquad \text{für } t = 1 \text{ ist } \tau = 0{\cdot}575941$$

4) $$\text{und für } w_x = 0 \text{ ist } \tau = 0{\cdot}19263511 \text{ und } t = 3 - 2\sqrt{2}$$

Mit Rücksicht auf die allgemeine Gleichung der Curve der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten

5) $$w_x - a = b \,.\, C_1 \frac{1 - t^2}{t} \,.\, \tau\,, \qquad x + 2C = \pm\, 8\, C_1 \,.\, \tau$$

und die vorhergehende Bedingung, den Tiefpunkt derselben betreffend, besteht zwischen den Constanten a, b und C_1 die fixe Beziehung

6) $$a = -\, b \,.\, C_1 \,.\, 1{\cdot}089709$$

welche für deren Berechnung von besonderer Bedeutung ist.

In der IX. Lieferung dieses Werkes haben wir in der Tabelle IX.*) die Sterbetafel der 17 englischen Gesellschaften einer näherungsweisen Ausgleichung unterworfen, u. zw. wurde der zu wiederholende Ausgleichungsprocess bloss ein einzigesmal durchgeführt. Es möge nun dieses offenbar unvollkommene Ausgleichungsresultat einer analytischen Untersuchung hinsichtlich seiner Verlässlichkeit unterworfen werden.

Die nöthigen Anhaltspunkte hiefür bieten zwei Punkte, nämlich der Wendepunkt und der Tiefpunkt in jener ausgeglichenen Sterbetafel. Der erstere fällt, nach der Maximaldifferenz der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten zu schliessen etwa in das 42. Lebensjahr, so dass in diesem Punkte die Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit $w_x = 25{\cdot}37128$ Jahre beträgt. Der Tiefpunkt, in welchem $w_x = 0$ ist fällt, etwa in das 100. Lebensjahr.

*) Siehe: „Unsere Methode der mathematischen Ausgleichung der Mortalitätstafeln."

Demnach ergeben sich folgende zwei Gleichungen:

für den Wendepunkt $42 + 2C = 8C_1 . 0·575941$ $(x = 42)$
" " Tiefpunkt $100 + 2C = 8C_1 . 0·192635$ $(x = 100)$

daher laut Formel 3) der Werth für C_1

$$C_1 = -18·9144$$

und solchermassen für C

$$C = -64·5743$$

Nun ist aber die Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit im Wendepunkte gleichbedeutend mit der Constante a, so dass

$$a = 25·37128$$

und daher mit Rücksicht auf die fixe Beziehung in Form 6)

$$b = 1·2310$$

Untersuchen wir nun, ob diese Constantenwerthe auch für den Anfangspunkt $(x = 0)$ den Anforderung entsprechen.

Diesem Punkte wird nämlich laut den Formeln 4) für diesen Fall Genüge geleistet durch

$$\tau = \frac{2C}{8C_1} = 0·85352$$

woraus sich laut Formel 3), wenn hier der Anfangspunkt und der Wendepunkt in Betracht gezogen wird, der gleiche Werth für die Constante C_1, wie oben, ergibt.

Desgleichen ist dies der Fall für alle anderen Punkte der Curve, sobald mittelst der vorhandenen Constantenwerthe der betreffende Werth von τ ermittelt wird. So ist

$10 + 2C = 8C_1 . 0·7874$ $(x = 10)$
$20 + 2C = 8C_1 . 0·7213$ $(x = 20)$
$30 + 2C = 8C_1 . 0·6552$ $(x = 30)$
etc.

Sind daher die verschiedenen Werthe von τ unschwer zu ermitteln, so lässt sich auch mit Hilfe der Formen 1) und 2) der jeweilige Werth der entsprechenden Grössen für t feststellen und solchermassen auch der zugehörige Werth der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit w_x berechnen und sodann mit den gegebenen Tabellenwerthen vergleichen.

Berücksichtigt man jedoch, dass der Anfangspunkt des Axensystems mit jedem beliebigen Alter zusammenfallen kann, indem dann eben von diesem Alter angefangen die Sterblichkeitscurve in die positive Coordinaten-Sphäre zu liegen kommt, so ist es naheliegend, dass in Bezug auf die zu berücksichtigende Sterbetafel dieser Punkt derjenige sein muss, welcher hinsichtlich seiner analytischen Beschaffenheit den gleichen Anforderungen entspricht, wie der Anfangspunkt der hier dargestellten Curve, d. h. derselbe muss dem Werthe $\tau = 0·85352$ Genüge leisten.

Die Constanten C, C_1 und b werden daher der Sterbetafel in der Tabelle IX möglicherweise entsprechen, doch ist es nicht ausgeschlossen, dass der Verlauf dieser Sterbetafel andere Werthe dieser Constanten bedingt, indem die Beschaffenheit des Werthes von τ im Anfangspunkte, einen correspondirenden Werth im Rahmen der Sterbetafel ausschliesst. Um dieses zu untersuchen, ist es nothwendig, nebst dem Wendepunkt und dem Tiefpunkt noch einen dritten bestimmten Punkt der zu untersuchenden Sterbetafel in Rechnung zu ziehen. Es mögen also die Werthe w_m und x_m die Coordinaten dieses Punktes darstellen, dann erhält man mit Rücksicht auf die erste der Formen 5) den Ausdruck

$$w_m - a = b \, . \, C_1 \frac{1 - t^2}{t} \, . \, \tau$$

und da wir annehmen, dass die bisherigen Werthe C, C_1 und b diesem Punkte der Curve nicht Genüge leisten, so müssen wir unter Zuhilfenahme der Beziehung 6) die Elimination der Constanten in dieser Gleichung durchführen, u. zw. ist dann für unsere Sterbetafel

$$b \, . \, C_1 = - \frac{a}{1\cdot089709} = - \frac{25\cdot37128}{1\cdot089709} = - 23\cdot28262$$

so dass obige Gleichung folgendermassen lauten muss

$$- \frac{w_m - 25\cdot37128}{23\cdot28262} = \frac{1 - t^2}{t} \, . \, \tau$$

worin τ den laut Formel 1) gegebenen Werth besitzt.

Wird nun t hieraus ermittelt und τ für diesen Punkt bestimmt, so ergeben sich für die Bestimmung der Constanten drei Gleichungen, u. zw.

$$x_m + 2C = 8C_1 \, \tau_m$$
$$42 + 2C = 8C_1 \, . \, 0\cdot575941$$
und $$100 + 2C = 8C_1 \, . \, 0\cdot192635$$

welche dreien Punkten der Curve Genüge leisten und die der gegebenen Sterbetafel entsprechende Wahrscheinlichkeitscurve vollends bestimmen. Nun bestehen hier aber drei Gleichungen zur Bestimmung blos zweier unbekannten Constanten; es wird demnach noch eine dritte Constante erforderlich sein, um die analytische Beschaffenheit der Curve zur Darstellung zu bringen. Das Wesen dieser Constante kann in der Bedingung liegen, welche den Abscissenintervallen vermöge des bedingten Curvenverlaufes zugrunde liegt. Dieselbe kann jedoch auch durch das Wesen der Variablen τ bedingt sein, deren Werth der Abscisse proportional ist und daher bestimmten, dem supponirten Wendepunkte und Tiefpunkte entsprechenden Werthen Genüge leisten muss. Der Aufschluss bleibt einer weiteren Untersuchung vorbehalten.

Die Sterblichkeits-Statistik, ihre Entwicklung und Anwendung für die Construction von Sterbetafeln.

VI.

In unserer vorigen Abhandlung gelangten wir zu dem Ergebniss, dass die analytische Lage der Curve, der zu untersuchenden Sterbetafel erst angepasst werden muss, sobald bei derselben die Ordinate des natürlichen Anfangspunktes unbekannt ist, da dies nun bei den meisten Sterbetafeln der Fall ist, so ist es nothwendig, diese unbekannte Grösse auf mathematischem Wege zu ermitteln, oder, was den gleichen Zweck erfüllt, die etwa in das dritte Lebensjahr fallende maximale Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, die analytisch demjenigen Punkte der Curve entsprechen muss, in welchem deren Tangente 0 ist.

Betrachten wir zu diesem Behufe den Verlauf der Curve mit Rücksicht auf deren analytische Lage, so finden wir, dass die Gleichung derselben

$$w_x - a = b\,C_1 \frac{1-t^2}{t} \cdot \tau \qquad\qquad x \pm 2C = 8C_1 \,.\, \tau$$

unter Berücksichtigung des in Formel 1) dargestellten Werthes von τ, folgenden Bedingungen Genüge leistet. Der Werth ist für

τ negativ	, wenn	$t < 3$
τ positiv	, wenn	$t > 3$
$\tau = 0$	, wenn	$t = 0$
$\tau = \infty$	, wenn	$t = 3$

hieraus folgt die in Lieferung VIII. dargestellte graphische Form, welche demjenigen Curvenverlaufe Genüge leistet, der durch die Formel

$$7) \qquad tg\,\alpha = \frac{d\,w_x}{dx} = h\left(\frac{(1+t)^2}{8\,t} - 1\right)$$

zum Ausdrucke gelangt und in folgenden Tangentenwerthen sich äussert:

für	$t=0$	ist	$tg\,\alpha = \infty$	für	$t=\infty$	ist	$tg\,\alpha = \infty$
„	$t < 3 - 2\sqrt{2}$	„	$tg\,\alpha > 0$	„	$t > 3 + 2\sqrt{2}$	„	$tg\,\alpha > 0$
„	$t = 3 - 2\sqrt{2}$	„	$tg\,\alpha = 0$	„	$t = 3 + 2\sqrt{2}$	„	$tg\,\alpha = 0$
„	$t > 3 - 2\sqrt{2}$	„	$tg\,\alpha < 0$	„	$t < 3 + 2\sqrt{2}$	„	$tg\,\alpha < 0$
„	$t = 1$	„	$tg\,\alpha = -\frac{1}{2}.h$	„	$t = 1$	„	$tg\,\alpha = -\frac{1}{2}.h$
„	$t = 3$	„	$tg\,\alpha = -\frac{1}{3}.h$	„	$t = \frac{1}{3}$	„	$tg\,\alpha = -\frac{1}{3}.h$

ferner für negative Werthe

für	$t=0$	ist	$tg\alpha=\infty$	für	$t=-\infty$	ist	$tg\alpha=-\infty$
„	$t<-3+2\sqrt{2}$	„	$tg\alpha>-\frac{3}{2}.h$	„	$t>-3-2\sqrt{2}$	„	$tg\alpha>-\frac{3}{2}.h$
„	$t=-3+2\sqrt{2}$	„	$tg\alpha=-\frac{3}{2}.h$	„	$t=-3-2\sqrt{2}$	„	$tg\alpha=-\frac{3}{2}.h$
„	$t>-3+2\sqrt{2}$	„	$tg\alpha<-\frac{3}{2}.h$	„	$t<-3-2\sqrt{2}$	„	$tg\alpha<-\frac{3}{2}.h$
„	$t=-1$	„	$tg\alpha=-h$	„	$t=-1$	„	$tg\alpha=-h$
„	$t=-3$	„	$tg\alpha=-\frac{7}{6}.h$	„	$t=-\frac{1}{3}$	„	$tg\alpha=-\frac{7}{6}.h$

wobei zu berücksichtigen ist, dass

$$3+2\sqrt{2}=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$$

so dass der Verlauf der Curve nach den rechtsseitigen Werthen von t ein ähnlicher ist, wie der nach den linksseitigen; d. h. der Verlauf der Curve ändert sich in seiner Beschaffenheit nicht, wenn die Werthe von t reciprok angenommen werden. Da nun t sowohl positiv als auch negativ sein kann, so wird diese Wechselbeziehung auch auf die negativen Werthe übergeben, ja sogar zwischen negativen und positiven Werthen von t stattfinden. Als Beweis hiefür lässt sich die bekannte Relation

8) $$t=-\frac{4\,(w_x-a)}{b\,(x+2C)}\pm\sqrt{\left[\frac{4\,(w_x-a)}{b\,(x+2C)}\right]^2+1}$$

anführen, nach welcher t stets zwei Werthe besitzen kann, von denen der eine stets positiv oder negativ reciprok zu anderen sich befindet.

Aber noch ein anderer Umstand ist hier von Belang, welcher die merkwürdige Beschaffenheit dieser Curven kennzeichnet. Es besitzen nämlich je zwei, reciproken Werthen entsprechende, Punkte einer Curve gleiche Tangenten. Da nun gleiche Tangenten hier bloss wechselseitig auf dem concaven und convexen Theile der Curve möglich sind, so folgt daraus der Schluss, dass je zwei parallelen Tangenten entsprechende Punkte der Curve zu einander in functioneller Wechselbeziehung sich befinden.

Hierin liegt auch die Bedeutung der in unserer allgemeinen Abhandlung (Lieferung VIII.) zur Darstellung gebrachten Doppelwerthe für τ, indem die eine stets für den positiv oder negativ reciproken t-Werth der anderen gilt.

Von hoher Bedeutung ist nun die Conclusion, welche hieraus entspringt. Da nämlich die Wendepunkte zweier auf reciproken Werthen beruhender Curven gemeinsamen Bedingungen entsprechen, so kann die eine Curve auch als Fortsetzung der anderen gelten.

Um uns über diesen Umstand Aufschluss zu verschaffen, betrachten wir die in voriger Abhandlung angeführte Formel 2)

$$\frac{4\,(w_x-a)}{x+2C}=b\,.\,\frac{1-t^2}{t}$$

in welcher der Ausdruck

$$\frac{1-t^2}{t}$$

je nach dem Wesen der für t eingesetzten Werthe sich entweder gar nicht oder bloss dem Zeichen nach ändern wird. Setzen wir der Reihe nach für t die Werthe

$$r\ ,\ -r\ ,\ \frac{1}{r}\ \text{und}\ -\frac{1}{r}$$

ein, so ergeben sich für diesen Ausdruck folgende Variationen

$$\frac{1-r^2}{r}\,,\ -\frac{1-r^2}{r}\,,\ -\frac{1-r^2}{r}\,.\ \text{und}\ \frac{1-r^2}{r}$$

Für die Beziehung je zweier diesbezüglicher Punkte wird daher nach obiger Gleichung die Relation

$$9)\qquad \frac{w_1 - a}{x_1 + 2C} = \pm \frac{w_2 - a}{x_2 + 2C}$$

gelten, u. zw. das positive Zeichen bei negativer Reciprocität und das negative Zeichen bei positiver Reciprocität.

Bei unserer Sterblichkeitscurve correspondiren z. B. die Punkte

$$x_1 = 18 \qquad w_1 = 42{\cdot}38470$$
$$x_2 = 48 \qquad w_2 = 21{\cdot}09763$$

nach den Differenzen Δw_x der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten zu schliessen, in dieser Weise miteinander, so zwar, dass die Tangenten der beiden Punkte einander gleich sind. Substituiren wir nun in die Formel 9) diese Werthe, indem wir $a = 25{\cdot}37128$ als Ordinate im Wendepunkte berücksichtigen, so erhalten wir für negative Reciprocität als bei positivem Zeichen

$$\frac{17{\cdot}01342}{18 + 2C} = \frac{-4{\cdot}27366}{48 + 2C}$$

so dass der Werth $2C = -41{\cdot}9771$ hieraus resultirt. Der gleiche Werth für $2C$ muss nun auch zwei anderen in gleicher Weise mit einander correspondirenden Punkten entsprechen. Nehmen wir die beiden Punkte

$$x_3 = 38 \qquad w_3 = 28{\cdot}24121$$
$$x_4 = 44 \qquad w_4 = 23{\cdot}93328$$

dann erhalten wir laut Formel 9) die Gleichung

$$\frac{2{\cdot}86993}{38 + 2C} = \frac{-1{\cdot}43800}{44 + 2C}$$

und hieraus den gesuchten Werth $2C = -41{\cdot}9972$.

Die geringe Differenz zwischen diesen beiden Werthen von $2C$ entspringt offenbar der unvollkommenen Ausgleichung der Curve, sowie jenen dem Wesen von Δw_x entsprechenden bloss aproximativ ermittelten Tangenten.

Unter Voraussetzung verschiedener Werthe für b und b_1 übergeht die Formel 9) bei negativen Zeichen in den Ausdruck

$$10)\qquad \frac{w_1 - a}{b\,(x_1 + 2C)} = -\frac{w_2 - a}{b_1(x_2 + 2C)}$$

welcher die Werthe $2C = -42{\cdot}00490$ und $2C = -65{\cdot}12256$,

$$\text{sowie } \frac{b}{b_1} = -\,0{\cdot}994235 \text{ und } \frac{b}{b_1} = 1{\cdot}598250 \text{ liefert.}$$

Untersuchen wir nun auf dieser Grundlage die in Form 5) dargestellte Gleichung der Ordinate dieser Curve,

$$w_x - a = b\,C_1\,\frac{1 - t^2}{t} \cdot \tau$$

so finden wir sobald diese Form für den oberen und unteren Theil der Curve nach deren Beschaffenheit sich gestaltet, dass wohl der Ausdruck

$$\frac{1-t^2}{t}$$

in seinem Werthe für beide Theile gleich sein und bloss bei positiver Reciprocität durch das entgegengesetzte Zeichen gekennzeichnet sein wird, jedoch der Werth τ sich für jeden Theil anders gestalten muss.

Bezeichnet man daher diesen Unterschied, indem man für diesen Werth τ_1 und τ_2 einsetzt, so ergibt sich

$$w_1 - a = b\, C_1 \frac{1-t^2}{t} \cdot \tau_1$$

$$w_2 - a = \pm\, b_1\; C_1 \frac{1-t^2}{t} \cdot \tau_2$$

daher aus diesen beiden Relationen die Gleichung

$$\frac{b_1}{b} \cdot \frac{w_1 - a}{w_2 - a} = \pm \frac{\tau_1}{\tau_2}$$

welcher sowohl für die negative als auch für die positive Reciprocität Geltung hat, wobei die Werthe

11) $$\tau_1 = \frac{t^{\frac{1}{9}} e^{-\frac{1}{6t}}}{(t-3)^{\frac{5}{9}}} \qquad \text{und} \qquad \tau_2 = \frac{t^{\frac{1}{9}} . e^{\frac{t}{6}}}{(1+3t)^{\frac{5}{9}}}$$

für negative Reciprocität, beziehungsweise

12) $$\tau_2 = \frac{t^{\frac{1}{9}} e^{-\frac{t}{6}}}{(1-3t)^{\frac{5}{9}}}$$

für positive Reciprocität in Betracht kommen. Dermassen können auch alle anderen Modificationen dieser Formen*) in der gleichen Weise zur Anwendung gelangen, jenachdem, welche von denselben für den Werth von τ_1 angenommen wird.

Ist also einer der beiden Werthe von τ gegeben, so kann der andere laut den Formen 11) und 12) ermittelt werden, so dass mit Rücksicht auf den bekannten Werth von a, die Differenz der beiden Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten

13) $$A . w_1 - B . w_2 = P$$

ermittelt werden kann, wobei w_1 und w_2 die Ordinaten zweier, gleichen Tangenten entsprechender Punkte der Sterblichkeitscurve darstellen.

---

*) Siehe VIII. Lieferung, Pag. 78, Formel 38.

Die Sterblichkeits-Statistik, ihre Entwicklung und Anwendung für die Construction von Sterbetafeln.

VII.

Nun gelangen wir zu dem wichtigen Gegenstande, welcher die analytische Lage der Curve betrifft und deren Anpassung an die zu untersuchende Sterbetafel behandelt.

Betrachtet man die beiden Gleichungen, welche die Coordinaten der Curve darstellen

$$w_x + a = b . C_1 \frac{1 - t^2}{t} . \tau \qquad \text{und} \quad x + 2C = 8C_1 . \tau$$

so nimmt man wahr, dass für die Abscisse

$$x = 0 \qquad \text{der Werth} \quad \tau = \frac{2C}{8C_1}$$

$$\text{und für} \quad x = -2C \qquad „ \quad „ \qquad \tau = 0$$

gilt, daher die Curve zwischen $x = 0$ und $x = -2C$ einer Sphäre des rechtwinkeligen Coordinatensystems angehört, u. zw. der positiven Sphäre für den negativen und der negativen Sphäre für den positiven Werth von C.

Berücksichtigen wir nun den Umstand, dass für unsere Formel 1) der Werth von τ nur dann 0 ist, wenn $t = 0$, so ergibt sich laut Formel 7)

$$\tau = 0 \;, \quad t = 0 \;, \quad tg\, \alpha = \infty$$

d. h. die Curve verlauft im Punkt $x = -2C$ senkrecht zur Abscissenaxe und die Ordinate in diesem Punkte ist laut dieser Form

$$w_x + a = \frac{0}{0},$$

also unbestimmt. Es ist ferner für $t = 3 - 2\sqrt{2}$. Die Tangente der Curve $tg\, \alpha = 0$, u. zw. bildet dieser Punkt das Minimum der Curve, nachdem hier kleinere Werthe von t positive Tangenten und grössere Werthe negative Tangenten ergeben.

Für dieses Minimum der Curve ist $\tau = -0{\cdot}192635$ folglich ist für diesen Punkt

$$x = -8\,C_1 . 0{\cdot}192635 - 2C \quad \text{und} \quad w_x + a = -b\,C_1 . 1{\cdot}089709$$

so dass w_x mit Rücksicht auf den stets positiven Werth von a, negativ ist, respective die Ordinaten der Curve hier stets in die negative Sphäre des Coordinatonsystems fallen. Die Curve kommt also umgekehrt unterhalb der Abscissenaxe zu liegen, u. zw. derart, dass die Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit im Minimum der Curve am grössten, und in der Abscissenaxe am kleinsten ist, sobald dieselbe als Sterblichkeitscurve aufgefasst wird. Bezeichnet man daher den Unterschied zwischen den Ordinaten des Wendepunktes und des analytischen Minimum der Curve mit dem Werthe a_1, so ist die grösste Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit durch $a + a_1$ ausgedrückt, und infolgedessen der Werth von w_x im analytischen Minimum der Curve

$$w_x = -a - a_1$$

Für $t = 1$ ist $\tau = -0{\cdot}575941$ und $tg\,\alpha = -\frac{h}{2}$, und sind daher in diesem Punkte die Coordinaten

$$x = -8\,C_1 \,.\, 0{\cdot}575941 - 2\,C \quad \text{und} \quad w_x + a = 0$$

da jedoch der Werth $t = 1$ dem zweiten Differentialquotienten der Curvengleichung gemäss bloss für diesen Wendepunkt Geltung besitzt*), so ist die Ordinate im Wendepunkte dieser Curve

$$w_x = -a$$

Für $t > 1$, wird die Tangente stets negativ kleiner, um schliesslich für $t = 3$ den Werth $tg\,\alpha = -\frac{h}{3}$ zu erreichen, in welchem Falle unsere Form 1) für τ den Werth $\tau = \infty$ liefert, so dass die Coordinaten

$$x = \infty \quad \text{und} \quad w_x = \infty$$

hier gelten. Dort wo also die Curve durch die Abscissenaxe geschnitten wird muss der Punkt derselben $w_x = 0$ liegen, wobei stets $t < 3$ ist.

Untersuchen wir nun die Beschaffenheit des Werthes τ nach der Formel 1), — denn auf diese sind unsere Betrachtungen vorläufig beschränkt — so finden wir, dass τ hier stets negativ sein muss, solange $t < 3$ ist, erst wenn $t > 3$ wird, erfolgt eine Umwandlung des Zeichens in ein positives.

Da ferner vor dem Wendepunkt der Curve $t < 1$ und nach dem Wendepunkt $t > 1$ ist, so wird der Ausdruck

$$\frac{1 - t^2}{t} \,.\, \tau$$

vor dem Wendepunkt negativ und nach dem Wendepunkt positiv sein.

Dieser Umstand bewirkt, dass mit Rücksicht auf den stets positiven Werth von b, das Zeichen der Constante C_1 hier massgebend ist für die Lage der Curve.

Nach der Gleichung der Abscisse

$$x + 2\,C = 8\,C_1\,\tau$$

ist für $\tau = 0$, $x = -2\,C$, daher x stets negativ, wenn die Constante C positiv und x stets positiv, wenn die Constante C negativ ist.

Ist aber die Constante C positiv, so ist die Constante C_1 mit Rücksicht auf das stets negative τ auch negativ, hingegen wenn die Constante C negativ ist, muss aus demselben Grunde C_1 positiv sein, für welch letzteren Fall die oben angeführte Lage der Curve unterhalb der Abscissenaxe und hinsichtlich der Abscisse in der positiven Sphäre liegend, gilt; d. h.

14) $$w_x + a = b\,C_1 \,.\, \frac{1 - t^2}{t} \,.\, \tau$$

daher hier w_x als stets negativ vorausgesetzt ist. Wird jedoch C_1 negativ angenommen, dann lautet die Form

15) $$w_x - a = b\,C_1 \,\frac{1 - t^2}{t} \,.\, \tau$$

*) Siehe VIII. Lieferung, pag. 39.

wobei w_x stets positiv erscheint und die Curve daher hinsichtlich der Abscisse in der negativen Sphäre des Axensystems, jedoch oberhalb der Abscissenaxe zu liegen kommt; u. zw. entspricht dann das Maximum derselben der grössten Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit und der Schnittpunkt der Curve mit der Abscissenaxe der kleinsten Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit.

Aus diesem Grunde wird also bei dieser Curve die Abscisse stets in umgekehrter Richtung zum Alter wachsen, indem das Alter 0 zur Zeit der Geburt absolut die grösste Abscisse aufweisen wird, im Gegensatze zur Sterbetafel, welche mit dem Alter 0 beginnt.

Befindet sich also die Curve hinsichtlich der Abscisse in der negativen Sphäre des Axensystems und hinsichtlich der Ordinate in der positiven Sphäre also oberhalb der Abscissenaxe, so ist C_1 negativ und C positiv, da nun die Abscisse x in diesem Falle stets negativ ist, so wird hier, falls das Maximalalter mit 100 Jahren angenommen wird, das wirkliche Alter durch die Gleichung

$$x_1 = 100 + x$$

dargestellt sein und die Abscissengleichung wird daher die Formen

$$-58 + 2C = -8C_1 \,.\, 0{\cdot}575941 \text{ für den Wendepunkt}$$
$$\text{und} \quad -97 + 2C = -8C_1 \,.\, 0{\cdot}192635 \text{ für den Maximalpunkt}$$

annehmen, sobald im Alter von 3 Jahren die grösste Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit angenommen wird. In diesem Falle ist sodann*)

$$2C = +116{\cdot}600 \quad \text{und} \quad 8C_1 = -101{\cdot}746$$

daher laut der zugehörigen Formel 15) für die Ordinate

$$w_x = 0 \text{ für den Schnittpunkt der Curve mit der Abscissenaxe}$$
$$w_x = a \text{ für den Wendepunkt}$$
$$w_x = a + a_1 \text{ für den Maximalpunkt}$$
$$\text{und} \quad a_1 = -b_1 C_1 \,.\, 1{\cdot}089709.$$

Befindet sich dagegen die Curve hinsichtlich der Abscisse in der positiven Sphäre und hinsichtlich der Ordinate in der negativen, also unterhalb der Abscissenaxe, so ist C_1 positiv und C negativ, daher die Abscisse stets positiv. Das wirkliche Alter wird also hier durch die Form

$$x_1 = 100 - x$$

zur Darstellung gelangen und die Abscissengleichung wird die Formen

$$58 + 2C = -8C_1 \,.\, 0{\cdot}575941 \text{ für den Wendepunkt}$$
$$\text{und} \quad 97 + 2C = -8C_1 \,.\, 0{\cdot}192695 \text{ für den Minimalpunkt}$$

annehmen. In diesem Falle ist sodann

$$2C = -116{\cdot}600 \text{ und } 8C_1 = +101{\cdot}746.$$

Daher laut der zugehörigen Formel 14)

$$w_x = 0 \text{ für den Schnittpunkt der Curve mit der Abscissenaxe}$$
$$w_x = -a \text{ für den Wendepunkt}$$
$$w_x = -a - a_1 \text{ für den Minimalpunkt}$$
$$\text{und} \quad -a_1 = -b_1 C_1 \,.\, 1{\cdot}089709.$$

Um nun den Werth von b zu ermitteln, setzen wir in der Curvengleichung

$$x = 0 \text{ und } w_x = 0$$

*) Siehe VIII. Lieferung, pag. 48, Formel 10.

und erhalten aus der Abscissengleichung hiefür

$$\tau = \frac{2C}{8C_1}$$

hingegen aus der Ordinatengleichung

laut Form 14) $$a = bC_1 \cdot \frac{1-t^2}{t} \cdot \tau$$

laut Form 15) $$-a = -bC_1 \frac{1-t_2}{t} \cdot \tau$$

wobei der Werth von τ und t jeweilig jenen den beiden Formen zugehörigen Constanten C und C_1 gemäss festgestellt werden muss. Da nun a_1 dem Wesen der Sterblichkeitscurven entsprechend stets grösser als a ist, so muss der Werth des Ausdruckes

$$bC_1 \cdot \frac{1-t^2}{t} \cdot \tau < 1{\cdot}089709 \,.\, b_1 C_1$$

sein und darnach wird sich daher der Verlauf der Curve regeln.

Um uns diesbezügllch ein Urtheil über die geometrischen Dimensionen derselben bilden zu können, trachten wir vor allen Dingen den Werth von b für diesen Fall zu ermitteln.

Es ist also in dem Punkte $x = 0$, $w_x = 0$

$$\tau = \frac{2C}{8C_1} = -\frac{116{\cdot}6}{101{\cdot}746} = -1{\cdot}145986$$

woraus laut Formel 1) für den zugehörigen Werth von t

$$t = 2{\cdot}25682 \quad \text{und daraus} \quad \frac{1-t^2}{t} \cdot \tau = 2{\cdot}0785$$

sich ergibt. Infolge dessen resultirt aus der Gleichung

$$a = bC_1 \,.\, 2{\cdot}0785$$

mit Rücksicht auf den Werth $C_1 = 12.71825$ und $a = 25{\cdot}37128$ laut unserer Sterbetafel, das Resultat $b = 0{\cdot}959764$.

Die kleinste Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit $w_x = 0$ muss aber nicht unbedingt in dem Alter $x_1 = 100$ eintreten, sondern kann je nach der Beschaffenheit der Sterbetafel auch in einem früheren oder späteren Alter zutreffen.

Auch das Maximum der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit muss nicht absolut im Alter von 3 Jahren, wie wir dies hier vorausgesetzt haben, eintreten, und können sich demzufolge auch die Constanten C und C_1 in der entsprechenden Weise ändern und somit auch die übrigen Dimensionen der Curve.

Hierüber geben zwei zu beiden Seiten des Wendepunktes beliebig gewählte Punkte der gegebenen Sterbetafel Aufschluss, nachdem dieselben zur endgiltigen Ermittlung der Constanten herangezogen worden.

Da nämlich die Differenz zwischen b und b_1 sich stufenweise auf sämmtliche zwischen $w_x = 0$ und $w_x = a + a_1$ gelegenen Alter vertheilt, so kann aus der ermittelten Differenz der bezüglichen Werthe für die beiden gewählten Punkte, der Werth von a_1 unter Voraussetzung sonstiger angemessener Dimensionen der Curve festgestellt, gleichzeitig aber auch auf Differenz der Werthe b und b_1 geschlossen werden.

Die Sterblichkeits-Statistik, ihre Entwicklung und Anwendung für die Construction von Sterbetafeln.

Mathematisch exacte Darstellung des Absterbegesetzes.

VIII.

In der vorigen Abhandlung über dieses Thema haben wir auf den Umstand hingewiesen, dass sich die Differenz zwischen b und b_1 nach einem bestimmten Gesetze auf sämmtliche zwischen den Grenzen, $x = 0$ und $x = k$ gelegenen Alter vertheilt, wobei $x = 0$ der minimalen Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit $w_x = 0$, hingegen $x = k$ der maximalen Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit $w_x = a + a_1$ entspricht. Das heisst mit anderen Worten, die Werthe b und b_1 sind Specialwerthe der variablen Constante b_x, welche nach einem bestimmten mathematischen Gesetze sich ändert.

Hat man es daher mit einer bestimmten Sterbetafel zu thun, welcher die Sterblichkeitscurve entsprechen soll, so werden diese Werthe b und b_1 den gegebenen Dimensionen der Sterbetafel angepasst werden müssen, wenn das für die variable Constante b_x geltende mathematische Gesetz dem Verlaufe der Sterbetafel Genüge leisten soll.

Der in Betracht gezogenen Sterbetafel*) entspricht für den Wendepunkt der Werth $\Delta w_x = -0{\cdot}71951$; d. h. da Δx Jahresintervallen entsprechend, gleich 1 ist, laut Tangentenform 7)

$$\frac{\Delta w_x}{\Delta x} = h\left(\frac{(1+t)^2}{8\,t} - 1\right) = -\frac{h}{2} \quad \text{respective} \quad -\frac{b_2}{2}$$

nachdem bekanntlich dem Wendepunkte der Werth $t = 1$ Genüge leistet und h mit der variablen Constante b_x identisch ist. Daraus folgt

$$-\frac{b_2}{2} = -0{\cdot}71951 \quad \text{oder} \quad b_2 = 1{\cdot}43902 \quad \text{im Wendepunkte.}$$

Es wäre daher gemäss dem ermittelten Werthe von $b = 0{\cdot}959764$, laut der fixen Beziehung

$$b_2 = b + \frac{b}{b_1} \qquad\qquad b_1 = 2{\cdot}00261$$

Berücksichtigt man jedoch den Umstand, dass bei der Sterblichkeitscurve der zeitliche Abstand vom Geburtsjahre bis zum vollständigen Aussterben, dem Werthe von $8\,C_1$ entsprechen muss, wenn dem mathematischen Absterbegesetze Genüge geleistet werden soll, so gelangt man zu dem Schlusse, dass obige Werthe von b und b_1 der Anforderung nicht entsprechen können, da sie nicht auf dieser Voraussetzung beruhen. Selbst aber wenn dies der Fall wäre, könnten die Werthe erst dann allen Anforderungen der Rechnung Genüge leisten, wenn der durch b und b_1 bedingte Verlauf der Curve dem Verlaufe der Sterbetafel entsprechen würde. Dies ist jedoch nur dann der Fall, wenn solcherart auch den anderen die Dimensionen der Curve bedingenden Punkten gleichzeitig Genüge geleistet wird, so zwar, dass dieselben mit den entsprechenden Punkten der Sterbetafel übereinstimmen. Um dies beurtheilen zu

*) Lieferung, IX., Tabelle IX.

können, ist es nothwendig, das mathematische Gesetz festzustellen, nach welchem die variable Constante b_x sich ändert. In dieser Hinsicht liefert uns obige Relation den erforderlichen Anhaltspunkt.

Dieselbe gestattet in der hier angemessenen allgemeinen Ausgestaltung

16) $$b + \frac{b + \alpha v}{b_1 + \beta v} = b_x$$

folgende Conclusionen. Wird α und β als constant und v als variabel vorausgesetzt, so ergibt sich

für $v = 0$, $b_x = b_2$

für $v = -\frac{b}{\alpha}$, $b_x = b$ für $v = \frac{b + b b_1 - b_1^2}{\beta (b_1 - b) - \alpha}$, $b_x = b_1$

demgemäss müssen sich auch alle anderen Werthe von b_x ergeben, sobald die Variation von v derart beschaffen ist, dass sie den Anforderungen des Curvenverlaufes entspricht. Aus der Form 16) wäre nun zu schliessen, dass alle Werthe von b_x, welche den zwischen dem Wendepunkte und dem Maximum der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit liegenden Curvenpunkten entsprechen, ein positives v, hingegen jene Werthe von b_x, welche den zwischen dem Wendepunkte und dem Minimum der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit liegenden Punkten entsprechen, ein negatives v erfordern. Auch der Lage, der hier in Betracht kommenden Curve gemäss wäre diese Annahme gerechtfertigt, da die Abscisse im Minimum der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit $x = 0$ hingegen im Maximum der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit $x_1 = -97$ ist, während der Wendepunkt zwischen den beiden sich befindet, indem dessen Abscisse $x_2 = -58$ unserer in Betrachtgezogenen Sterbetafel entspricht. Demnach müssen alle Abscissen vom Wendepunkte gegen das Minimum hin kleiner als x_2 und alle Abscissen vom Wendepunkte gegen das Maximum hin grösser als x_2 sein. Setzt man daher allgemein

17) $$v = x - x_2$$

so wird der Werth v mit Rücksicht auf die durchwegs negativen Werthe von x, für alle vom Wendepunkte abwärts liegenden Punkte positiv, weil $x_2 > x$ und für alle vom Wendepunkte aufwärts liegenden Punkte negativ, weil hier $x_2 < x$ ist. Betrachtet man nun den Werth

$$v = \frac{b + b b_1 - b_1^2}{\beta (b_1 - b) - \alpha} \quad \text{für} \quad b_x = b_1$$

so findet man, dass mit Rücksicht auf den Umstand, als b_1 unter allen Verhältnissen den Werth von b um ein Bedeutendes übersteigt, (b_1 stets etwa doppelt so gross wie b), der Werth von $v \,.\, \alpha$, respective $v \,.\, \beta$ laut dieser Form gleichfalls negativ sein muss, insbesondere wenn erwogen wird, dass auch $\beta > \alpha$ sein muss, wenn die Form den Anforderungen entsprechen soll. Demnach müssen α und β für den, zwischen dem Wendepunkte und dem Maximum liegenden Theil der Curve stets positiv, hingegen für den, zwischen dem Wendepunkte und dem Minimum liegenden Theil stets negativ sein, da v im letzteren Falle stets positiv ist und b_x grundsätzlich positiven Grössen entspricht.

Nun sind aber weiter die Strecken zwischen dem Minimum und dem Wendepunkte einerseits und dem Wendepunkt und dem Maximum anderseits

verschieden gross, ebenso wie die Steigerung von b auf b_2 unterschiedlich ist von derjenigen von b_2 auf b_1, ohne auch nur annähernd in irgend einem wahrnehmbaren Verhältnisse zu stehen, oder ein solches überhaupt zuzulassen. Infolge dessen müssen für den oberen Theil der Curve andere Werthe für α und β gelten als für den unteren, ebenso aber auch für die bisher noch nicht berücksichtigte Strecke zwischen dem Anfangspunkte und dem Maximum der Curve. Wir haben es daher hinsichtlich der variablen Constante b_x mit drei abgesonderten Theilen der Curve zu thun, denen verschiedene Werthe von α und β entsprechen werden und wahrscheinlicherweise die Wurzeln von Gleichungen dritten Grades bilden.

Wir wollen nun versuchen, nach diesem Gesetze für die Variation der Constante b_x, die Sterblichkeitscurve der gegebenen Sterbetafel anzupassen; und zwar zuerst für jenen Curventheil, welcher sich zwischen dem Wendepunkte und dem Maximum befindet. Gegeben sind für die Feststellung der Werthe α und β drei Werthe b, b_1 und b_2, wobei jedoch b_2 nicht in Betracht kommen kann, weil bei demselben $v = 0$ ist und infolgedessen α und β hier nicht in Rechnung kommen. Hingegen bleibt der Werth b_2 hinsichtlich der Beziehung zwischen b und b_1 von Belang. Die Gleichung für b kann, vermöge ihrer Beschaffenheit nur bei der Feststellung der Werthe α und β im anderen Curventheile Verwendung finden und ist soweit die Ermittlung derselben für den Curventheil zwischen dem Wendepunkt und dem Maximum in Betracht kommt, bloss in seinem Werthe von Einfluss. Es verbleibt daher bloss die Gleichung für b_1, welche hier Verwendung finden kann.

Berücksichtigt man jedoch, dass die Werthe b und b_1, wie wir selbe hier ermittelt haben, bloss den willkürlich angenommenen Dimensionen der Curve Genüge leisten, die zu untersuchende Sterbetafel jedoch anderen Dimensionen entsprechen kann, in welchem Falle die Werthe von b und b_1 gleichfalls eine entsprechende Aenderung erfahren, so gelangt man zu dem Schlusse, dass man es hier eigentlich mit vier Unbekannten zu thun hat; u. zw. sind dieselben b, b_1, α und β. Die einzige bekannte Grösse, welche bei der gegebenen Sterbetafel annähernd zutrifft, ist der Werth der variablen Constante im Wendepunkte b_2, sowie die Coordinaten dieses Punktes. Wir werden hier also vier Gleichungen aufstellen müssen, um alle diese Werthe den Dimensionen der Sterbetafel gemäss zu bestimmen. Zwischen b und b_1 besteht vorerst die Relation,

18) $$b + \frac{b}{b_1} = b_2$$

dann ist die Gleichung für b_1, worin wir den entsprechenden Werth der Variablen $v = -q$ annehmen

19) $$b + \frac{b - q \cdot \alpha}{b_1 - q \cdot \beta} = b_1$$

und schliesslich zwei beliebige Punkte in diesem Curventheile

20) $$b + \frac{b - p \cdot \alpha}{b_1 - p \cdot \beta} = b_3 \quad \text{für} \quad v = -p$$ 21) $$b + \frac{b - m\,\alpha}{b_1 - m\,\beta} = b_4 \quad \text{für} \quad v = -m$$

Aus diesen vier Gleichungen ergeben sich nun folgende Werthe für b, b_1, α und β. Die Gleichungen 19) und 20) liefern unter Berücksichtigung der Gleichung 18) die Werthe: 22)

$$\alpha = \frac{b_1(q-p)(b_3-b_2)(b_1-b_2)+b[q(b_3-b_2)-p(b_1-b_2)]}{pq(b_3-b_1)}, \beta = b_1 \frac{q(b_3-b_2)-p(b_1-b_2)}{pq(b_3-b_1)}$$

die Gleichungen 20) und 21) hingegen liefern unter Berücksichtigung der Gleichung 18) die Werthe: 23)

$$\alpha = \frac{b_1(m-p)(b_3-b_2)(b_4-b_2)+b[m(b_3-b_2)-p(b_4-b_2)]}{mp(b_3-b_4)}, \beta = b_1 \frac{m(b_3-b_2)-p(b_4-b_2)}{mp(b_3-b_4)}$$

durch Verbindung der Formen für α, beziehungsweise für β ergeben sich nun auch die Werthe

24) $$b_1 = \frac{mq(b_2-b_3)b_4+mp(b_3-b_4)b_2+pq(b_4-b_2)b_3}{mq(b_2-b_3)+mp(b_3-b_4)+pq(b_4-b_2)}$$ und schliesslich

25) $$b = b_1 \frac{m(q-p)(b_3-b_2)(b_1-b_2)(b_3-b_4)-q(m-p)(b_3-b_2)(b_4-b_2)(b_3-b_1)}{mq(b_3-b_2)(b_4-b_1)+pq(b_4-b_2)(b_1-b_3)+mp(b_1-b_2)(b_3-b_4)}$$

zur Bestimmung von b lässt sich aber auch die einfache Gleichung 18) verwenden, welche lautet

26) $$b = \frac{b_2 . b_1}{1+b_1}$$

Sind daher die Werthe b_2, b_3 und b_4, mit Hilfe der Coordinaten der beziehungsweisen Punkte aus der Sterbetafel ermittelt, so ist die variable Constante b_x für alle Punkte des oberen Theiles der Sterblichkeitscurve bestimmt und ist daher auch diesen Bedingungen der Lösung entsprochen.

Uebergehen wir nun hinsichtlich unserer Untersuchung dieses Gesetzes der Variation der Constante b_x auf jenen Theil der Curve, welcher sich zwischen dem Wendepunkte und dem Minimalpunkte befindet. Für den Minimalpunkt der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit $w_x = 0$ gilt laut der Form 16), welche das mathematische Gesetz der Variation der Constante b_x kennzeichnet, der Werth $b_x = b$ und demzufolge ergibt sich für den entsprechenden Werth von α die Gleichung $\alpha' = -\frac{b}{v} = -\frac{b}{r}$ für $v = r$

Wir werden nämlich zum Unterschiede der Curventheile hier anstatt α und β die Bezeichnungen α' und β' einführen. — Zur Fesstellung des Werthes von β' ist es jedoch nothwendig, einen weiteren gegebenen Punkt der Sterbetafel heranzuziehen, welcher der variablen Constante b_5 entsprechen möge. Es ist dies nicht zu vermeiden, da der diesem Theile der Curve gleichfalls zugehörige Wendepunkt, wie bereits erwähnt, wegen des Umstandes, dass daselbst $v = 0$ ist, für die Ermittlung von β' unverwendbar ist. Legen wir also die Gleichung

27) $$b + \frac{b + n . \alpha'}{b_1 + n . \beta'} = b_5 \quad \text{für} \quad v = n$$

unserer Rechnung zugrunde, wobei v für den ganzen Curventheil, laut Form 17) positive Werthe besitzt, hingegen α' und β' negativ sind. Nach vollzogener Substitution ergibt sich daher die Form

28) $$\beta' = \frac{r(b + b\,b_1 - b_5\,b_1) - n . b}{n . r . (b_5 - b)}$$

so dass auch für diesen Theil der Curve der Anforderung Genüge geleistet ist.

Die Sterblichkeits-Statistik, ihre Entwicklung und Anwendung für die Construction von Sterbetafeln.

Mathematisch exacte Darstellung des Absterbegesetzes.

IX.

Den dritten Abschnitt der Curve bildet jener vom Anfangspunkte bis zum Maximum derselben verlaufende Theil, für welchen die Werthe α'' und β'' gleichfalls ermittelt werden müssen. Hier ist es abermals nothwendig, neben der gegebenen Gleichung von b_x für den Maximalpunkt; d. i. laut Form 19)

$$b + \frac{b - q\,\alpha''}{b_1 - q\,\beta''} = b_1 \qquad v = -q$$

noch einen beliebig gegebenen Punkt innerhalb dieses Abschnittes zu wählen; u. zw. möge die variable Constante desselben durch die Gleichung

31) $$b + \frac{b - s\,\alpha''}{b_1 - s\,\beta''} = b_6 \quad \text{für} \quad v = -s$$

zum Ausdrucke gelangen. Für die hinsichtlich der Sterblichkeitscurve in Betracht kommenden Punkte dieses Abschnittes derselben, wird abermals v stets negative Werthe besitzen und es ergeben sich unter Berücksichtigung der in Form 18) ausgedrückten Beziehung zwischen b und b_1 die Gleichungen 32)

$$\alpha'' = \frac{b_1(q-s)(b_6-b_2)(b_1-b_2)+b[q(b_6-b_2)-s(b_1-b_2)]}{q\,.\,s\,(b_6-b_1)}, \beta'' = b_1\frac{q(b_6-b_2)-s(b_1-b_2)}{q\,.\,s\,(b_6-b_1)}$$

Diese beiden Werthe werden wieder stets positive sein.

Bezeichnen wir nun die Werthe von α und β mit A und B, von α' und β' mit A' und B', sowie von α'' und β'' mit A'' und B'' so ergeben sich die Gleichungen dritten Grades

33) $$\begin{aligned} &\alpha^3 - (A + A' + A'')\,\alpha^2 + (A\,A' + A\,A'' + A'\,A'')\,\alpha - A\,A'\,A'' = 0 \\ &\beta^3 - (B + B' + B'')\,\beta^2 + (B\,B' + B\,B'' + B'\,B'')\,\beta - B\,B'\,B'' = 0 \end{aligned}$$

deren Wurzeln α, α' und α'', beziehungsweise β, β' und β'' sind und deren Coëfficienten Functionen aller zur mathematischen Bestimmung der Curve gegebenen Grössen darstellen und von bestimmter Beschaffenheit sind. Während jedoch die gegebenen Grössen b_3, b_4, b_5, b_6 beliebige, der betreffenden Curve entsprechende, jedoch von deren sonstiger Beschaffenheit unabhängige Grössen sind, sind b, b_1 und b_2 sowie C, C_1, a, a_1 durch bestimmte Regeln von einander abhängig. Diese Regeln bestehen in allgemeinen Bedingungen, welche für die verschiedenen Dimensionen der Curve gelten und durch mathematische Beziehungen zwischen denselben zum Ausdrucke gelangen. Diese Beziehungen seien in nachfolgenden Ausführungen zusammengestellt. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die markanten Punkte der Curve mit verschiedenen Indices, u. zw. sei P_0 der Anfangspunkt, P_1 der Maximalpunkt, P_2 der Wendepunkt und $P_.$ der Minimalpunkt der Curve resp. Schnittpunkt derselben mit der Abscissenaxe; ferner mag allgemein der Kürze halber der Ausdruck

34) $$\frac{1 - t^2}{t}\,.\,\tau = u$$

(u wegen des stets negativen τ für $t < 1$ negativ, für $t > 1$ positiv)

indem der Abschnitt derselben $2C + 8C_1$ für unsere
dauer-Wahrscheinlichkeiten ausser Betracht kommt. Eben
mit jenem Theile der allgemeinen Wahrscheinlichkeitscu
dem Schnittpunkt derselben mit der Abscissenaxe weiter

Mit Rücksicht auf diesen Umstand wird die Abscissen
folgende Werthe der vier markanten Punkte der Sterbl

$$
\begin{array}{llll}
 & P_{\cdot} & x_{\cdot} = 0 & 0 + 2C = + 8C_1 \quad \tau \\
\text{35)} & P_2 & x_2 = - \ 59{\cdot}746 & - x_2 + 2C = + 8C_1 \quad \tau_2 \\
 & P_1 & x_1 = - \ 98{\cdot}746 & - x_1 + 2C = + 8C_1 \,. \ \tau_1 \\
 & P_0 & x_0 = - 101{\cdot}746 & - x_0 + 2C = + 8C_1 \quad \tau_0
\end{array}
$$

hierin sind nun die Werthe $2C = 118{\cdot}346$ und $8C_1 = -$
zu ziehen, so dass der Abstand des Anfangspunktes der
vom analytischen Anfangspunkte der Wahrscheinlichk
$2C + 8C_1 = 16{\cdot}6$ ist.*) Das wirkliche, der Sterblichkeits
Alter ist mit Rücksicht auf den Umstand, dass der Zeitpu
Abscisse der Wahrscheinlichkeitscurve x_0 entspricht, allg

36) $$x_i = x + 101{\cdot}746 = x - 8C_1$$

so dass im Anfangspunkte der Sterblichkeitscurve $x_i = 0$,
derselben $x_i = 3$, im Wendepunkte $x_i = 42$ und im Minimal
ist, welch' letztere Ziffer die Anzahl der Jahre von
völligen Aussterben nach obiger Sterblichkeitscurve darst

Was nun die Beziehungen zwischen den einzelnen das
Grössen anbelangt, so ist vor allen Dingen hervorzuhebe
von τ für den Maximalpunkt und den Wendepunkt abs
deshalb besonders bezeichnend ist, weil die Tangente de
curve im Maximalpunkt am kleinsten und im Wendepun

Diese beiden fixen Werthe sind

38) $\tau_{.} = \frac{2\,C}{8\,C_1}$ $\tau_0 = 1 + \tau_{.}$

zum Ausdrucke gelangt. Hieraus entspringt dann weiter mit Rücksicht auf die allgemeine Relation

39) $8\,C_1 = \frac{x_m - x_n}{\tau_m - \tau_n}$, die gleichfalls allgemein giltige Form $2\,C = \frac{x_m \cdot \tau_n - x_n \cdot \tau_m}{\tau_m - \tau_n}$

aus welchen unter Anwendung der fixen Werthe von τ_1 und τ_2 die Relationen

40) $x_2 - x_1 = -8\,C_1 \,.\, 0{\cdot}383306$ und $2\,C = \frac{x_2\,\tau_1 - x_1\,\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}$

sich ergeben, welche den speciellen Verlauf der Sterblichkeitscurve bedingen. Der horizontale Abstand zwischen dem Maximalpunkt und Wendepunkt der Sterblichkeitscurve ist nämlich ausschlaggebend für den speciellen Verlauf derselben, da von diesem auch jene Distanz abhängt, welche zwischen der Geburt und dem völligen Aussterben ($x_0 - x_{.}$) besteht und welche bekanntlich durch $8\,C_1$ dargestellt wird.

Von besonderer Wichtigkeit ist in dieser Hinsicht der Werth von u, dessen Bedeutung in der Form 34) gekennzeichnet ist. Dieser Werth besitzt für den Maximalpunkt und Wendepunkt gleichfalls fixe Werthe, u. zw. ist laut 37) $u_1 = -1{\cdot}089709$, $u_2 = 0$ so dass der Ordinatengleichung der Curve 15) gemäss $w_x = a$ für den Wendepunkt und $a_1 = -b_1\,C_1 \,.\, 1{\cdot}089709$ für den Maximalpunkt resultirt. Für den Minimalpunkt lautet diese Beziehung $a = -b \,.\, C_1\,u_{.}$ und da $u_{.}$ mit Rücksicht auf den Werth $\tau_{.} = \frac{2\,C}{8\,C_1}$ gegeben ist, indem $t_{.}$ mittels der Form 1) ermittelt werden kann, so ist bei bekannter Distanz zwischen dem Maximalpunkte und Wendepunkte auch die Beziehung zwischen a und b, sowie zwischen a_1 und b_1 gekennzeichnet, so dass unter Berücksichtigung der allgemein giltigen Relation 18), die Werthe a, b, a_1 und b_1 bestimmt werden können, sobald der den Wendepunkt betreffende Werth der variablen Constante b_2 bekannt ist. Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass mit Rücksicht auf die Form 38) auch der dem Anfangspunkte der Sterblichkeitscurve entsprechende Werth u_0 solchermassen bestimmt ist. Daraus folgt, dass zur Feststellung der Dimensionen einer mathematisch gesetzmässigen Sterblichkeitscurve die gegebenen Coordinaten des Wendepunktes und Maximalpunktes vollständig hinreichen. Da nämlich die Ordinate des Wendepunktes a ist, hingegen die Ordinate des Maximalpunktes $a + a_1$, so ist auch b und b_1 bestimmt, so dass sich b_2 hieraus ermitteln lässt. Sind aber die Dimensionen einer Sterblichkeitscurve vollständig gegeben, so genügen die Coordinaten dreier weiterer Punkte, um auch die variable Constante b_x für alle anderen Punkte der Curve zu bestimmen. Die Curve ist daher durch fünf gegebene Punkte vollständig bestimmt.

Wenden wir nun diese Ergebnisse auf die Frage der Beurtheilung der in Betracht gezogenen Sterbetafel an, so gelangen wir zu folgenden Conclusionen.

Unter der Voraussetzung, dass der Wendepunkt der Sterbetafel den Coordinaten $x_i = 42$ $w_x = a = 25{\cdot}37128$ beziehungsweise dem Werthe $b_2 = 1{\cdot}43902$ vollständig genau entspricht, sowie, dass das Maximum der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit im Alter $x_i = 3$ eintritt, würden die Dimensionen der angepassten Sterblichkeitscurve den in 35) dargestellten Bedingungen Genüge leisten. Darnach würde sich ergeben

$$\tau. = -1{\cdot}163152 \text{ und hieraus } t. = 2{\cdot}2751 \text{ sowie } u. = 2{\cdot}13503$$

ferner $\tau_0 = -0{\cdot}163152$ und dementsprechend $b = 0{\cdot}934352$, $b_1 = 1{\cdot}851410$, sowie

$$a_1 = 25{\cdot}65907 \text{ und schliesslich } a + a_1 = 51{\cdot}03035$$

als Maximum der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeit. Es besteht nun die Frage, ob auch der sonstige Verlauf der Sterbetafel diesen Werthen entpricht, und ob die obigen Voraussetzungen richtige sind. Zur Beantwortung derselben wird das Gesetz der Variation der Constante b_x herangezogen werden müssen, indem für den oberen Theil der Curve zwei beliebige Punkte der Sterbetafel, beziehungsweise die denselben entsprechenden Werthe b_3 und b_4 bei den bezüglichen Formen in Rechnung gebracht werden.

Wählen wir zu diesem Behufe die Alter $x_i = 10$ und $x_i = 41$, so entsprechen denselben die Abscissen $x_3 = -91{\cdot}746$ und $x_4 = -60{\cdot}746$ und die Ordinaten $w_3 = 47{\cdot}86241$ und $w_4 = 26{\cdot}09021$.

Hieraus ergeben sich laut der Form 15) die der variablen Constante b_x entsprechenden Werthe $b_3 = 1{\cdot}69173$, $b_4 = 1{\cdot}44293$ und aus der Abscissendifferenz zwischen den einzelnen Punkten und dem Wendepunkt laut Form 17) die Werthe $q = 39$, $p = 32$, $m = 1$.

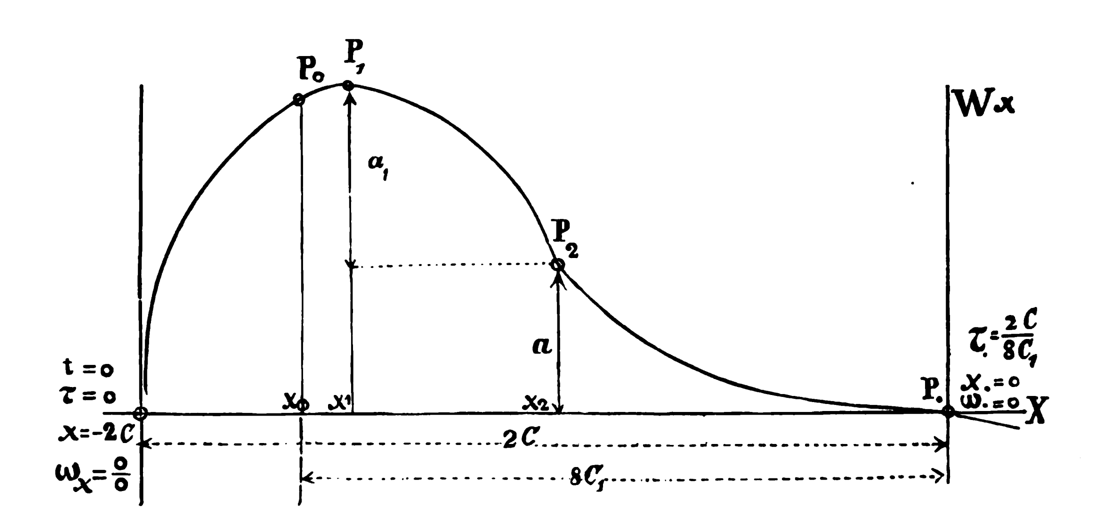
Wir erhalten daher*) $\alpha = 0{\cdot}00786284$, $\beta = 0{\cdot}02947352$ ferner $b = 0{\cdot}932170$ und $b_1 = 1{\cdot}839144$ und hieraus $\tau. = -1{\cdot}16470$ resp. $t. = 2{\cdot}27670$, $u. = 2{\cdot}14003$ und $8\,C_1 = -101{\cdot}6107$.

Somit ergibt sich für die vom Geburtsjahre bis zum völligen Aussterben betragende Distanz eine Differenz von 0·1353 Jahren gegenüber der supponirten Sterblichkeitscurve. Dieselbe kann nun ihren Grund ebenso in der unvollkommenen Ausgleichung der Sterbetafel wie in der Ungenauigkeit des ermittelten Wendepunktes und des angenommenen Maximalpunktes haben, worüber nur ein weiterer rechnerischer Process genügenden Aufschluss zu geben geeignet ist.

Auf ähnliche Weise lassen sich noch sieben vollständig verschiedene Arten von Wahrscheinlichkeitscurven der einschlägigen praktischen Verwendung zuführen und ihrer Natur gemäss in exacter Weise bestimmen. Dieselben sind durchwegs in ihrem Wesen Ergebnisse der allgemein integrirten linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, so dass hiemit dieses wissenschaftlich ausserordentlich bedeutende Problem auch in praktischer Hinsicht umfassend und endgiltig gelöst erscheint.

*) Unter Berücksichtigung eines weiteren Punktes für den unteren Theil der Curve ergeben sich $\alpha' = -0{\cdot}15602216$, $\beta' = -0{\cdot}01347133$.

Die Curve der Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten.



$$w_x - a = b_x \,.\, C_1 \frac{1 - t^2}{t} \,.\, \tau \quad , \quad x + 2\,C = 8\,C_1 \,.\, \tau$$

$$\tau = \frac{t^{\frac{1}{18}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{6\,t}}}{(t - 3)^{\frac{5}{9}}} \quad , \quad t_o \overset{=}{<} t < 3$$

$$\frac{d\,w_x}{d\,x} = b_x \left(\frac{(1 + t)^2}{8\,t} - 1 \right)$$

Fixe Werthe für die markanten Punkte der Curve:

$P.$: $\quad x. = 0 \;,\; w. = 0 \;,\; \tau. = \frac{2\,C}{8\,C_1}$

P_2 : $\quad w_2 = a \;,\; t_2 = 1 \;,\; \tau_2 = -\,0{\cdot}575941$

P_1 : $\quad w_1 = a + a_1 \;,\; t_1 = 3 - 2\sqrt{2} \;,\; \tau_1 = -\,0{\cdot}192635$

P_0 : $\quad x_0 = 8\,C_1 \;,\; \tau_0 \quad 1 + \tau.$

DIE MATHEMATIK

im

Dienste der Nationalökonomie

unter Rücksichtnahme auf die

praktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik

mit einigen, durch selbständige wissenschaftliche Errungenschaften auf dem Gebiete der reinen Mathematik begründeten, neuen Fundamenten der politischen Arithmetik

für Versicherungs- und Bank-Institute, sowie auch Lehrkräfte höherer Bildungsanstalten besonders geeignet.

Supplementband zum gleichnamigen Werke.

Verfasst

von

Dr. LUDWIG GROSSMANN

Inhaber des Ersten Wiener mathematischen Bureau und Herausgeber der Fachschrift „Controle“.

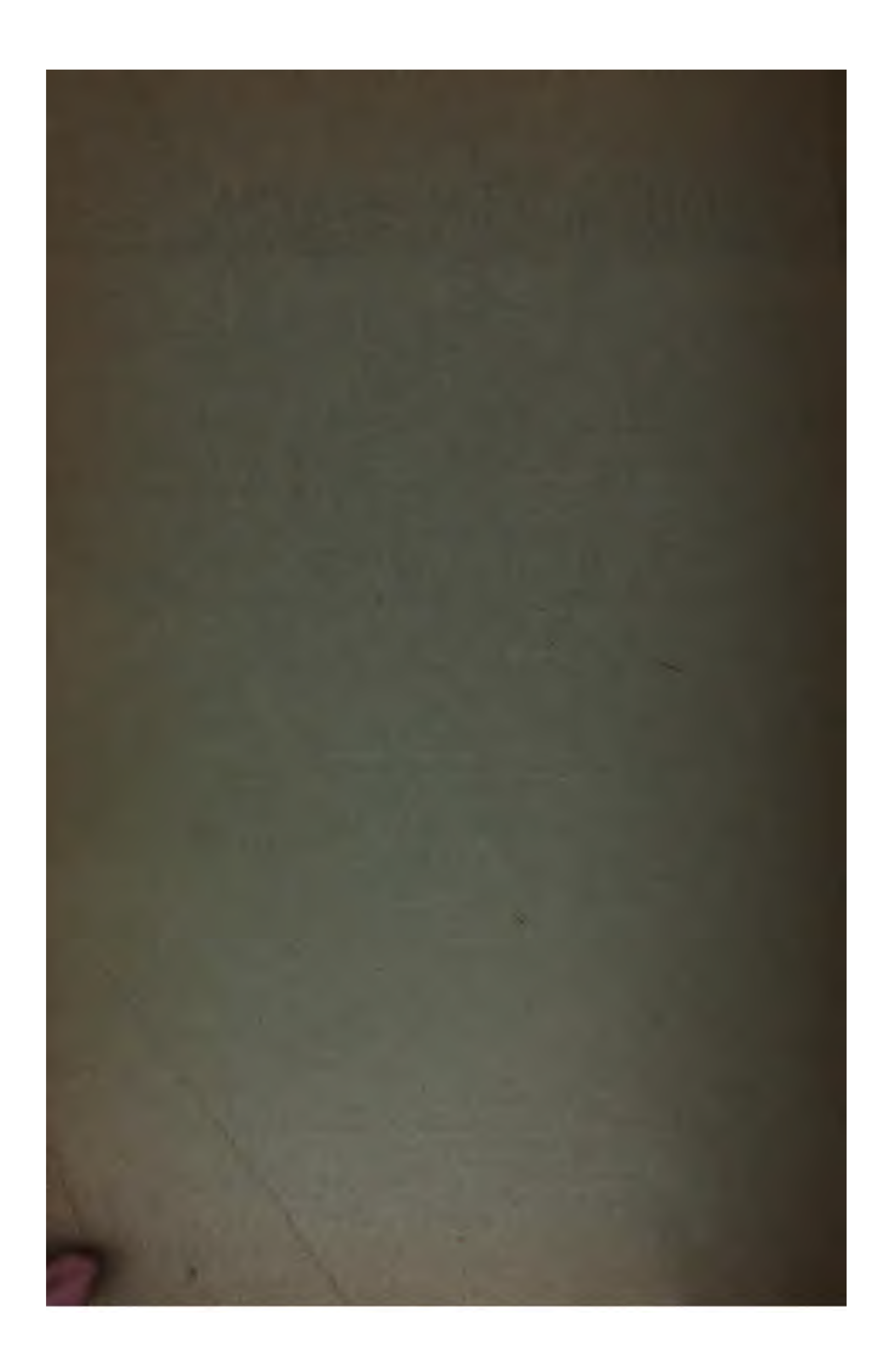
Achte Lieferung.

WIEN 1896.

Im Selbstverlage des Verfassers.

III., Sofienbrückengasse Nr. 14.

Druck von Josef Bayer & Comp., Wien, I., Wollzeile 25.



DIE MATHEMATIK

im

Dienste der Nationalökonomie

unter Rücksichtnahme auf die

praktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik

mit einigen, durch selbständige wissenschaftliche Errungenschaften auf dem Gebiete der reinen Mathematik begründeten, neuen Fundamenten der politischen Arithmetik

für Versicherungs- und Bank-Institute, sowie auch Lehrkräfte höherer Bildungsanstalten besonders geeignet.

Supplementband zum gleichnamigen Werke.

Verfasst

von

Dr. LUDWIG GROSSMANN

Inhaber des Ersten Wiener mathematischen Bureau und Herausgeber der Fachschrift „Controle“.

Neunte Lieferung.

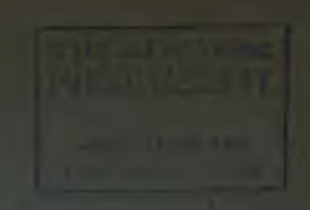
WIEN 1897.

Im Selbstverlage des Verfassers

III., Schönbrückengasse Nr. 14.

Druck von Josef Bayer & Comp., Wien, I., Wollzeile 25.





DIE MATHEMATIK

im

Dienste der Nationalökonomie

unter Rücksichtnahme auf die

praktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik

mit einigen, durch selbständige wissenschaftliche Errungenschaften auf dem Gebiete der reinen Mathematik begründeten, neuen Fundamenten der politischen Arithmetik

für Versicherungs- und Bank-Institute, sowie auch Lehrkräfte höherer Bildungsanstalten besonders geeignet.

Supplementband zum gleichnamigen Werke.

Verfasst

von

Dr. LUDWIG GROSSMANN

Inhaber des Ersten Wiener mathematischen Bureau und Herausgeber der Fachschrift „Controle"

Zehnte Lieferung.

WIEN 1898.

Im Selbstverlage des Verfassers.

III., [illegible] Nr. 11.

Druck von Josef Bayer & Comp., Wien, I., Wollzeile [illegible]

DIE MATHEMATIK

im

Dienste der Nationalökonomie

unter Rücksichtnahme auf die

praktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik

mit einigen, durch selbständige wissenschaftliche Errungenschaften auf dem Gebiete der reinen Mathematik begründeten, neuen Fundamenten der politischen Arithmetik

für Versicherungs- und Bank-Institute, sowie auch Lehrkräfte höherer Bildungsanstalten besonders geeignet.

Supplementband zum gleichnamigen Werke.

Verfasst

von

Dr. LUDWIG GROSSMANN

Inhaber des Ersten Wiener mathematischen Bureau und Herausgeber der Fachschrift „Controle“.

Elfte Lieferung

WIEN 1899.

Im Selbstverlage des Verfassers.

III., Sofienbrückengasse Nr. 14.

Druck von Josef Bayer & Comp., Wien, I., Wollzeile 25.





DIE MATHEMATIK

im

Dienste der Nationalökonomie

unter Rücksichtnahme auf die

praktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik

mit einigen, durch selbständige wissenschaftliche Errungenschaften auf dem Gebiete der reinen Mathematik begründeten, neuen Fundamenten der politischen Arithmetik

für Versicherungs- und Bank-Institute, sowie auch Lehrkräfte höherer Bildungsanstalten besonders geeignet.

Supplementband zum gleichnamigen Werke.

Verfasst

von

Dr. LUDWIG GROSSMANN

Inhaber des Ersten Wiener mathematischen Bureau und Herausgeber der Fachschrift „Controle"

Zwölfte Lieferung.

WIEN 1900.

Im Selbstverlage des Verfassers.

III., Sofienbrückengasse Nr. 14.

Druck von Josef Bayer & Comp., Wien, I., Wollzeile [illegible]



Publicationen

und

Rechenschafts-Berichte.


Concordia
Cölnische Lebens-Versicherungs-Gesellschaft,
gegründet 1853.
Billige Prämien, sehr günstige Bedingungen, die denkbar grösste Sicherheit.
Grundcapital . . . . 30 Millionen Mark.
Gesammtvermögen zu Ende 1899 . . . 111 " "
Versicherte Capitalien zu Ende Mai 1900 245·4 " "
Seither ausgezahlte Sterbecapitalien . 93·7 " "
Erhebliche Ermässigung der Prämie bei ratenweiser Auszahlung des fälligen Capitals.
Dividende schon nach 2 Jahren.
Dieselbe beträgt im Jahre Jahre 1901 für die mit Gewinn-Antheil Versicherten aus 1879: 56·7%, aus 1880: 54%, aus 1881: 51·3%, aus 1892: 48·6%, aus 1883: 45·9% u. s. w. der im Jahre 1899 entrichteten Prämie.
Vortheilhafte Ausstattungs- und Renten-Versicherungen.

◆ Gegründet 1857. ◆ ◆ Gegründet 1857. ◆

Erste ungarische allgemeine Assecuranz-Gesellschaft
in Budapest

übernimmt Versicherungen:

a) **gegen Feuerschäden** (wenn auch durch Blitz verursacht) auf Gebäude, Fabriken, Maschinen, landwirthschaftliche und gewerbliche Vorräthe, Waaren, Mobilien, Viehbestände etc.;

b) **gegen Transportschäden** reisender Güter zu Wasser, zu Lande und auf Eisenbahnen;

c) **gegen Hagelschäden** mit voller Schadenvergütung;

d) **auf das Leben des Menschen,** u. zw. Ablebens- und Erlebens-Versicherungen, Aussteuer-Versicherungen, Jahresrenten etc.

Gewährleistungs-Fonds der Gesellschaft am 31. December 1899:

1. Voll eingezahltes Actien-Capital	K	6,000.000·—
2. Reserve-Capital	„	6,000.000·—
3. Gesammt-Prämien-Reserven in der Feuer-, Transport- und Einbruch-Diebstahls-Versicherungs-Branche (abzüglich des Rückversicherungs-Antheiles und frei von jeder Belastung)	„	4,070.000·—
4. Prämien-Reserve in der Lebensversicherungs-Branche	„	69,737.646·14
	K	85,815.122·19
ausbezahlte Schäden seit dem Bestande der Gesellschaft circa	K	337,000.000·—

Lebensversicherungs-Gesellschaft
„ATROPOS“
in Leipzig.

Gegründet 1797.

Die Gesellschaft empfiehlt sich zum Abschlusse von **Todesfallversicherung, Aussteuerversicherung, Volksversicherung** mit und ohne ärztliche Untersuchung, **Kinderversicherung** und **Kinderversorgung** zu äusserst liberalen Bedingungen.

Vollständige Unanfechtbarkeit nach kurzem Bestehen, Unverfallbarkeit, Rückkauf, Darlehen, beitragsfreie Polizze, Uebernahme des Kriegs-Risicos ohne Extraprämie, Dividendengenuss bereits nach drei Jahren.

Tüchtige Vertreter werden jederzeit gegen Fixum angestellt.







